

# GIỚI HẠN HÀM SỐ (phần 2)

**Vô cùng bé – vô cùng lớn**

# ĐỊNH NGHĨA

- $\alpha(x)$  là vô cùng bé khi  $x \rightarrow x_0$  nếu giá trị của  $\alpha(x)$  rất bé khi  $x$  gần  $x_0$ .

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

- $\alpha(x)$  là vô cùng lớn khi  $x \rightarrow x_0$  nếu giá trị của  $|\alpha(x)|$  rất lớn khi  $x$  gần  $x_0$ .

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |\alpha(x)| = +\infty$$

## Ví dụ

$$1 / \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$$

$x^\alpha, \alpha > 0$  là VCB khi  $x \rightarrow 0$

$$2 / \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

$x^\alpha, \alpha > 0$  là VCL khi  $x \rightarrow +\infty$

$$3 / \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$4 / \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$5 / \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$\ln x$  là VCB khi  $x \rightarrow 1$

là VCL khi  $x \rightarrow +\infty, 0$

# TÍNH CHẤT CỦA VÔ CÙNG BÉ

1. Tổng, hiệu, tích các VCB là VCB.

2.  $c \neq 0$ ,  $\alpha(x)$  là VCB  $\Rightarrow c \times \alpha(x)$  là VCB.

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x)$ ,  
với  $\alpha(x)$  là VCB khi  $x \rightarrow x_0$ .

# SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG BÉ

---

$\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  là 2 VCB khi  $x \rightarrow x_0$ , đặt

$$K = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

1.  $K=0$ ,  $\alpha(x)$  là VCB bậc cao hơn  $\beta(x)$ ,

ký hiệu:  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ .

2.  $K \neq 0, \infty$  :  $\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  đồng bậc.

$K=1$ :  $\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  tương đương:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$

# SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG BÉ

$\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  là 2 VCB khi  $x \rightarrow x_0$ , nếu tồn tại  $n > 0$

sao cho:

$$K = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)^n} \neq 0, \neq \infty$$

(tức là  $\alpha(x)$  đồng bậc với  $[\beta(x)]^n$  )

Thì  $\alpha(x)$  được gọi là VCB bậc  $n$  đối với  $\beta(x)$

## VÍ DỤ

là 2 VCB khi  $x \rightarrow 0$

$$1 / \begin{cases} \alpha(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^4} \\ \beta(x) = x \end{cases}$$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^4}{x^3}} \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$$

$$2 / \begin{cases} \alpha(x) = \ln(\cos x) \\ \beta(x) = x \end{cases}$$

là 2 VCB khi  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \frac{\ln(\cos x)}{x} = \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x} \\ &= \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} \times x \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times (-1/2) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha(x) = o(\beta(x))$      $\alpha(x)$  bậc cao hơn  $\beta(x)$

$$3 / \begin{cases} \alpha(x) = \ln(\cos x) \\ \beta(x) = x \end{cases} \quad \text{là 2 VCB khi } x \rightarrow 0$$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)^2} = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$= \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times (-1/2) = -1/2$$

$\alpha(x)$  là VCB bậc 2 đối với  $\beta(x)$ .

## Các vcb tương đương cơ bản

Khi  $x \rightarrow 0$

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\ln(1 + x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

## Ví dụ

$$\sin 2x \sim 2x, \text{ khi } x \rightarrow 0$$

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2}x^4, \text{ khi } x \rightarrow 0$$

$$\tan(\ln(1+x)) \sim \ln(1+x) \sim x, \text{ khi } x \rightarrow 0$$

$$\ln x \sim x - 1, \text{ khi } x \rightarrow 1$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}, \text{ khi } x \rightarrow \pm\infty$$

# Nguyên tắc thay tương đương VCB

## 1. Chỉ được thay tương đương qua tích các VCB

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x) \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \times \beta(x) \sim \alpha_1(x) \times \beta_1(x)$$

VD: khi  $x \rightarrow 0$

$$1 / (e^x - 1) \times \sin x \sim x \times x = x^2,$$

$$2 / \sqrt[3]{1 - 2x^5} - 1 (e^x - 1) \times \tan \sqrt[3]{x}$$

$$\sim \frac{1}{3}(-2x^5) \times x \times \sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3}x^{\frac{16}{3}}$$

# Nguyên tắc thay tương đương VCB

2. Nguyên tắc ngắt bỏ VCB bậc cao: tổng các VCB khác cấp tương đương với VCB bậc thấp nhất

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x) \approx \alpha_i(x)$$

với  $\alpha_i$  là VCB bậc thấp nhất

VD: khi  $x \rightarrow 0$

$$x^2 - 2x^3 + 3x \approx 3x$$

$$\sin x^3 - 2x^2 \approx -2x^2$$

# Nguyên tắc thay tương đương VCB

3.  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ , khi  $x \rightarrow x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$

$$f(x) \times \alpha(x) \sim a \times \alpha(x) \sim a \times \alpha_1(x)$$

VD: khi  $x \rightarrow 0$

$$1 / (x + 1) \times \ln(x + 1) \sim 1 \times \ln(x + 1) \sim x$$

$$2 / e^{2x} - e^{x^2} = e^{x^2} e^{2x - x^2} - 1$$

$$\sim e^0 e^{2x - x^2} - 1 \sim 1 \times 2x - x^2 \sim 2x$$

## 4. Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x) \quad \text{khi } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

**VD:**  $1 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 3x^2}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$2 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \arctan x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x}{\ln(1 + \cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

# Nguyên tắc thay tương đương VCB

---

## 5. Phép thay qua hiệu 2 VCB

$$\begin{cases} \alpha(x) \square \alpha_1(x), & \beta(x) \square \beta_1(x) \\ \alpha(x) \not\square \beta(x) \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow \alpha(x) - \beta(x) \square \alpha_1(x) - \beta_1(x)$$

(chỉ thay tương đương qua hiệu nếu 2 VCB ban đầu không tương đương)

## Cách thực hiện

Thay  $\alpha$  và  $\beta$  qua các tương đương trung gian (chẳng hạn  $x^p$  khi  $x \rightarrow 0$ ), đến khi không còn thay được nữa, nếu hiệu triệt tiêu thì  $\alpha$  và  $\beta$  là 2 VCB tương đương  $\Rightarrow$  không thay qua hiệu trong trường hợp này

# VÍ DỤ

$$1 / \arctan x - \sin x^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & - & x^2 \end{array} \square x$$

$$2 / \tan x - \sin x$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & - & x \end{array}$$

$$3 / (e^x - 1)(x + 1) - \sin x$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x \times 1 & - & x \end{array}$$

$$4 / x - \ln(x^2 + 1) - \sin x$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & - & x^2 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \\ x \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & - & x \end{array}$$

## Lưu ý

1. **Không** chuyển vế trong tương đương cơ bản.
2. **Không** thay tương đương qua hàm số ngoại trừ hàm lũy thừa dương (chỉ thay tương đương cho VCB, VCL.)
3. Tính triệt tiêu trong tương đương tổng hiệu chỉ xét cho từng cặp hàm

## Ví dụ

Xét tính đúng, sai trong các tương đương sau

Khi  $x \rightarrow 0$

$$e^x \not\sim 1 + x$$

$$\sin^2 x \stackrel{\text{Đ}}{\sim} x^2$$

$$\sin^{-2} x \not\sim x^{-2}$$

$$\ln(1 + \sin x) \not\sim \ln(1 + x) \sim x$$

$$\ln(1 + \sin x) \stackrel{\text{Đ}}{\sim} \sin x \sim x$$

$$e^{\sin x} - 1 \not\sim e^x - 1 \sim x$$

$$e^{\sin x} - 1 \stackrel{\text{Đ}}{\sim} \sin x \sim x$$

# VÍ DỤ TỔNG HỢP

---

1. Tìm các hằng số  $a$  và  $p$  sao cho

$$\alpha x \square ax^p, \text{ khi } x \rightarrow 0$$

2. So sánh bậc các VCB

3. Tính giới hạn

Tìm các hằng số a và p sao cho  $\alpha x \sim ax^p$ , khi  $x \rightarrow 0$

$$1 / \alpha (x) = \sin(x^2 - 2x) \sim x^2 - 2x \sim -2x$$

$$\Rightarrow a = -2, p = 1$$

$$2 / \alpha (x) = \sin(x^2 - \tan 2x)$$

$$\sim x^2 - \tan 2x$$

$$\sim x^2 - 2x \Rightarrow a = -2, p = 1$$

Tìm các hằng số  $a$  và  $p$  sao cho  $\alpha x \sim ax^p$ , khi  $x \rightarrow 0$

$$3 / \alpha(x) = \sin x - \tan 2x$$

$$\sim x - 2x = -x \Rightarrow a = -1, p = 1$$

$$4 / \alpha(x) = \ln \left[ 1 + \sin^3(e^x - 1) \right]$$

$$\sim \sin^3(e^x - 1)$$

$$\sim (e^x - 1)^3 \sim x^3 \Rightarrow a = -1, p = 3$$

**Tìm các hằng số  $a$  và  $p$  sao cho  $\alpha(x) \sim ax^p$ , khi  $x \rightarrow 0$**

---

$$5 / \alpha(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$\square \frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, p = 1$$

## So sánh bậc các VCB khi $x \rightarrow 0$

$$1 / \begin{cases} \alpha(x) = \sin(x^2 - 2x) \\ \beta(x) = \sqrt[3]{1 - 3x^2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) \sim -2x & \text{Bậc 1 theo } x \\ \beta(x) \sim \frac{1}{3}(-3x^2) & \text{Bậc 2 theo } x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta(x) = o(\alpha(x)) \quad (\beta(x) \text{ bậc cao hơn } \alpha(x))$$

## So sánh bậc các VCB khi $x \rightarrow 0$

---

$$2 / \begin{cases} \alpha(x) = \arctan x \\ \beta(x) = e^{x(x+1)} - 1 \end{cases}$$

$$\alpha(x) \sim x$$

$$\beta(x) \sim x(x+1) \sim x$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$$

## So sánh bậc các VCB khi $x \rightarrow +\infty$

---

$$\alpha(x) = \frac{1}{\ln x}, \beta(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \times \frac{e^x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \times \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$\Rightarrow \beta(x)$  bậc cao hơn  $\alpha(x)$

# Tính giới hạn

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \tan x} - e^{3x^2}}{x^3 + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2} (e^{x \tan x - 3x^2} - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x \tan x - 3x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x^2}{x^2} = -2\end{aligned}$$

## Tính chất vô cùng lớn

1. Tích các VCL là VCL.

2.  $c \neq 0$ ,  $\alpha(x)$  là VCL  $\Rightarrow c \times \alpha(x)$  là VCL.

3.  $f(x)$  bị chặn trong lân cận  $x_0$ ,

$\alpha(x)$  là VC khi  $x \rightarrow x_0$

$\Rightarrow \alpha(x) + f(x)$  là VCL khi  $x \rightarrow x_0$ .

# SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG LỚN

---

$\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  là 2 VCL khi  $x \rightarrow x_0$ , đặt

$$K = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right|$$

1.  $K = +\infty$ ,  $\alpha(x)$  là VCB bậc cao hơn  $\beta(x)$ .

2.  $K \neq 0, \infty$  :  $\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  đồng bậc.

$K = 1$ :  $\alpha(x)$  và  $\beta(x)$  tương đương:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$

# Nguyên tắc thay thế VCL

---

1. Chỉ được thay tương đương qua tích các VCL
2. Nguyên tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp: **tổng các VCL khác cấp tương đương với VCL bậc cao nhất**
3.  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ , khi  $x \rightarrow x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$   
 $f(x) \times \alpha(x) \sim a \times \alpha(x) \sim a \times \alpha_1(x)$
4. Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn: **giống VCB**
5.  $f(x)$  **bị chặn** trong lân cận  $x_0$ ,  $\alpha(x)$  là VCL  
khi  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \alpha(x) + f(x) \sim \alpha(x)$  khi  $x \rightarrow x_0$ .

# VÍ DỤ

---

1. Khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $m > n > 0$ :

$x^m$  là VCL bậc cao hơn  $x^n$ .

2. Khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $p > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a > 1$ :

$$\ln^p x \ll x^\alpha \ll a^x$$

3. Khi  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\ln x \ll \sin x \ll \ln x$

$$1 / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x/2}}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x/2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x/2}} = 0$$

$$2 / \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{x/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x/2} = 0$$