KHẢO SÁT HÀM SỐ

HÀM SỐ y = f(x)

1. Khảo sát sự biến thiên, cực trị.
2. Khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn.
3. Khảo sát tiệm cận.
4. Vẽ đồ thị.

SỰ BiẾN THIÊN

f(x) tăng (giảm) trong (a,b)

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ (f(x_1) \geq f(x_2))$

Bỏ dấu " = " : tăng (tăng chặt)

f khả vi trong (a,b):

- *f tăng trong (a,b)* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$
- *f tăng chặt trong (a,b)* $\Leftrightarrow f'(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$

(Giảm được thay bởi $\leq$ và $<$.)

CỰC TRỊ

x_0 là điểm cực đại của f

$\Leftrightarrow \exists(a,b) \ni x_0: f(x) \le f(x_0), \forall x \in (a,b)$

Tương tự cho cực tiểu

Điều kiện cần: ***f đạt cực trị tại x_0, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*** **(điểm cực trị là điểm tới hạn).**

Điều kiện đủ: ***f liên tục tại x_0, khả vi trong lân cận x_0 (không cần kvi tại x_0), nếu khi đi qua x_0***

f' đổi dấu từ (+) sang (-) thì f đạt cực đại tại x_0.

f' đổi dấu từ (-) sang (+) thì f đạt cực tiểu tại x_0.

TÌM CỰC TRỊ NHỜ ĐẠO HÀM CẤP CAO

$f'(x_0) = 0$: $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{f đạt cực tiểu chặt } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{f đạt cực đại chặt tại } x_0. \end{cases}$

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Nếu n chẵn thì f đạt cực trị tại x_0: $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 : \text{CT} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 : \text{CĐ} \end{cases}$

Nếu n lẻ thì f không đạt cực trị tại x_0

Vídụ

Tìm cực trị: $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$

$$= \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$ (Với x ≠ – 1 và x ≠ 2)

f’ cùng dấu tử số : $g(x) = x(x-2)$

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$$

Bảng xét dấu $g(x)=x(x-2)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$f' cũng đổi dấu khi đi qua 0 và 2

Kết luận: $\begin{cases} \text{f đạt cực đại tại } x_0 = 0 \\ \text{f đạt cực tiểu tại } x_1 = 2 \end{cases}$

Không cần xác định f'(-1), f'(2) (chỉ cần f liên tục tại 2)

Nếu để bảng xét dấu cho f’

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$\Rightarrow$ f liên tục tại 0, 2 và f’ đổi dấu khi đi qua 0 và 2 nên f đạt cực trị tại đây

Tìm cực trị: $f(x) = x.\ln^2 x$

Miền xác định: $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}$$

$f''(1) = 2 > 0$ Cực tiểu

$f''(e^{-2}) = \dfrac{-2}{e^{-2}} < 0$ Cực đại

Hoặc: lập bảng xét dấu

$$f'(x) = \ln x(\ln x - 2)$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			CĐ		CT		

Tìm cực trị: $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Miền xác định: R

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^{1/3}} = 2\left(\frac{(x+1)^{1/3} - 1}{(x+1)^{1/3}}\right)$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
TS				
MS				
f'				

Tìm cực trị: $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Miền xác định: *R*

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^{1/3}} = 2\left(\frac{(x+1)^{1/3} - 1}{(x+1)^{1/3}}\right)$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
TS		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
MS							
f'							

Tìm cực trị: $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Miền xác định: *R*

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^{1/3}} = 2\left(\frac{(x+1)^{1/3} - 1}{(x+1)^{1/3}}\right)$$

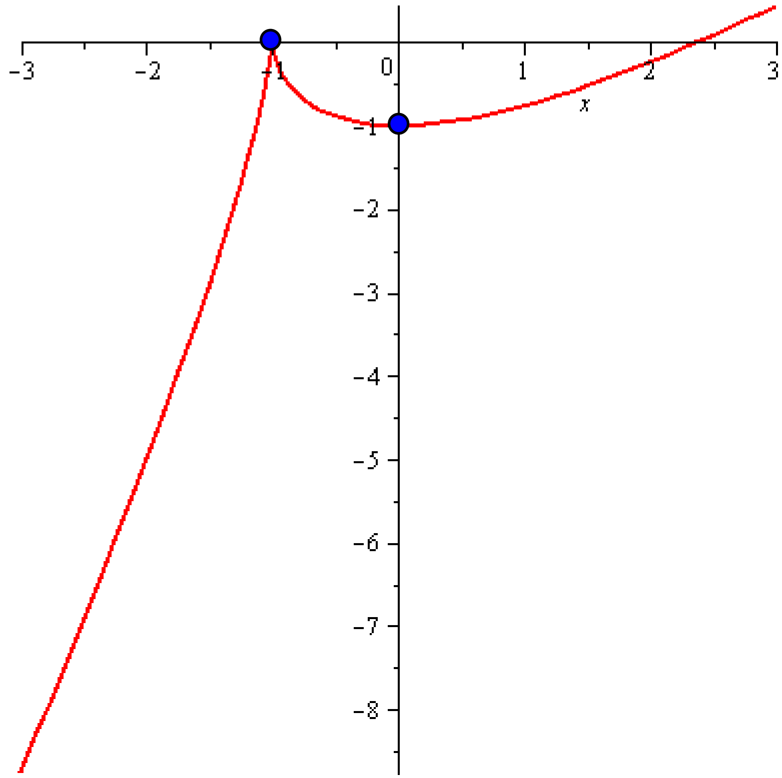
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
TS		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
MS		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
f'							

Tìm cực trị: $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{\;x+1\;^{2}}$

Miền xác định: *R*

$$f'\;\; x \;=\; 2 - \frac{2}{x+1\;^{1/3}} \;=\; 2\left(\frac{x+1\;^{1/3} - 1}{x+1\;^{1/3}}\right)$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
TS		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
MS		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
f'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	



−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

Tìm cực trị: $$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

Miền xác định: -∞ < x ≤ 0, 2 < x < + ∞

$$y' = \frac{\frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}} = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

Kết luận: đi qua x = 3, y’ đổi dấu từ (-) sang (+) nên y đạt cực tiểu tại x = 3.

Tìm cực trị: $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$$ (x ≠ 0)

f’ không đổi dấu khi qua bất kỳ điểm nào trên toàn bộ MXĐ nên không có cực trị.

TiỆM CẬN y = f(x)

$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$ ⟶ Tiệm cận đứng $x = x_0$

$\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) = a$ ⟶ Tiệm cận ngang y = a

$\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to (\pm)\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \to (\pm)\infty} [f(x) - ax] = b$

⟶ Tiệm cận xiên y = ax + b

Nếu viết được $f(x) = ax + b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to \infty$ thì TCX là y = ax + b

Các bước tìm tiệm cận:

1. Tìm miền xác định của hàm số.
2. Tìm TC đứng tại các điểm ngoài MXĐ nhưng dính vào MXĐ
3. Nếu MXĐ có $(\pm)\infty$, xét limf(x) từng trường hợp để xét TC ngang và TC xiên

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + 2x - 1$

Miền xác định: $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$

$\underline{x \to -1^+}$: $f(x) \to +\infty$: TCĐ x = -1

$\underline{x \to +\infty}$: $f(x) \to +\infty$: có thể có TCX

$$\alpha(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$f(x) = 2x - 1 + \alpha(x)$$ $\Rightarrow$ TCX : y =2x – 1

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Miền xác định: $-\infty < x \leq 0,\ 2 < x < +\infty$

$x \to 2^+$: $f(x) \to +\infty$: TCĐ $x = 2$

$x \to \pm\infty$: $f(x) \to +\infty$: có thể có TCX

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm 1$$

$\{a = 1,\ x \to +\infty\}$, $\{a = -1,\ x \to -\infty\}$

$\boxed{x \to +\infty}$ (a = 1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \frac{1}{2} \frac{2}{x-2} = 1$$

TCX y = x + 1

$\boxed{x \to -\infty}$ $(a = -1)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x-2}} + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\frac{1}{2}\,\frac{2}{x-2}\right) = -1$$

TCX $y = -x - 1$

Có thể tìm tiệm cận xiên bằng khai triển Taylor

$\boxed{x \to +\infty}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = x\sqrt{\frac{x}{x-2}} = x\sqrt{1+\frac{2}{x-2}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x-2} + 0\left(\frac{1}{x-2}\right)\right]$$

$$= x + \frac{x}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

Khai triển đến khi f(x) xuất hiện VCB (khi $x \to \infty$)

$$= x + \frac{x}{x-2} + x \times 0(\frac{1}{x-2})$$

$$= x + 1 + \frac{2}{x-2} + x \times 0(\frac{1}{x-2})$$

$$= x + 1 + \alpha(x),$$

$$v\acute{o}i \quad \alpha(x) = \frac{2}{x-2} + x \times 0(\frac{1}{x-2}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ TCX: y = x+1

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

$$= (x-1)e^{1+\frac{1}{x-1}} = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

MXĐ: R\{1}

x→1⁻ : $\frac{1}{x-1} \to -\infty$

$f(x) \to 0$ ⟶ không có tiệm cận đứng

x→1⁺ : $\frac{1}{x-1} \to +\infty$

$f(x) \to +\infty$ ⟶ **TCĐ x = 1**

$x \to \pm\infty$: f(x) $\to \pm\infty$: có thể có TCX. $\boxed{f(x) = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}$

$$\frac{f(x)}{x} = e\,\frac{x-1}{x}\,e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} e = a$$

$$f(x) - ex = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - ex$$

$$= ex\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) - e^{\frac{x}{x-1}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} e - e = 0 = b$$

$\boxed{\text{TCX: } y = ex}$

Tìm TCX bằng khai triển Taylor

$$f(x) = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= e(x-1)\left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$$

$$= e \quad x-1 \; + e + e \quad x-1 \;\; o\left(\frac{1}{x-1}\right) = ex + \alpha \quad x$$

$\boxed{\text{TCX: } y = ex}$

Vẽ đồ thị

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

MXĐ: $-\infty < x \leq 0$, $2 < x < +\infty$

$$y' = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

Tiệm cận: $\underline{x \to 2}^{+}$: $f(x) \to +\infty$: TCĐ $x = 2$

$\underline{x \to +\infty}$: TCX $y = x + 1$

$\underline{x \to -\infty}$: TCX $y = -x - 1$

Bảng biến thiên

$$y' = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	□	0		$\|\|$ $+\infty$	□	$\sqrt{27}$	□	$+\infty$

TCX
y=-x-1

TCĐ
x=2

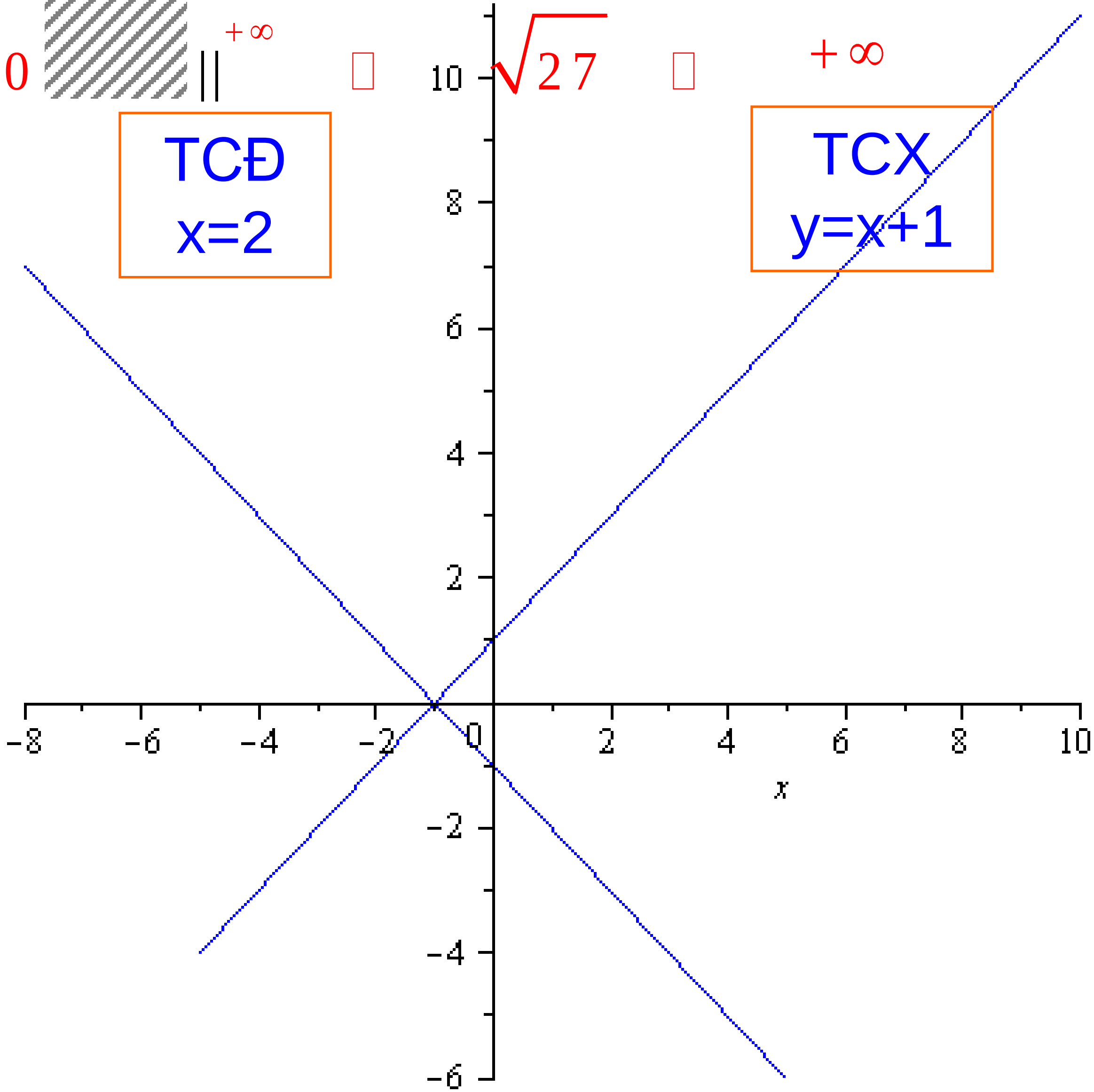
TCX
y=x+1

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0		$\|\| \; +\infty$		$\sqrt{27}$		$+\infty$

TCX $y=-x-1$

TCĐ $x=2$

TCX $y=x+1$

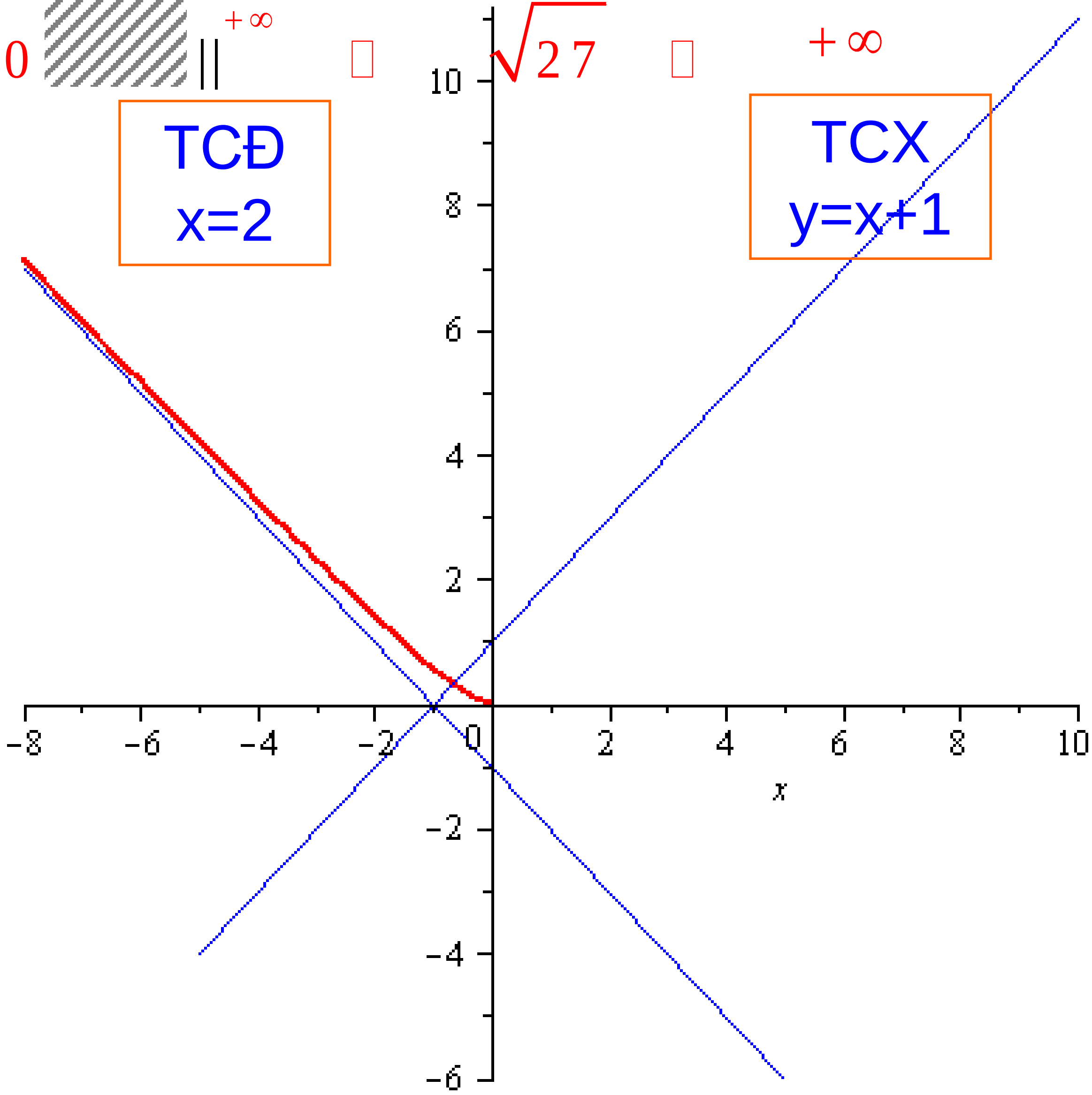


x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		$\|\|$ $+\infty$	↘	$\sqrt{27}$	↗	$+\infty$

TCX
y=-x-1

TCĐ
x=2

TCX
y=x+1

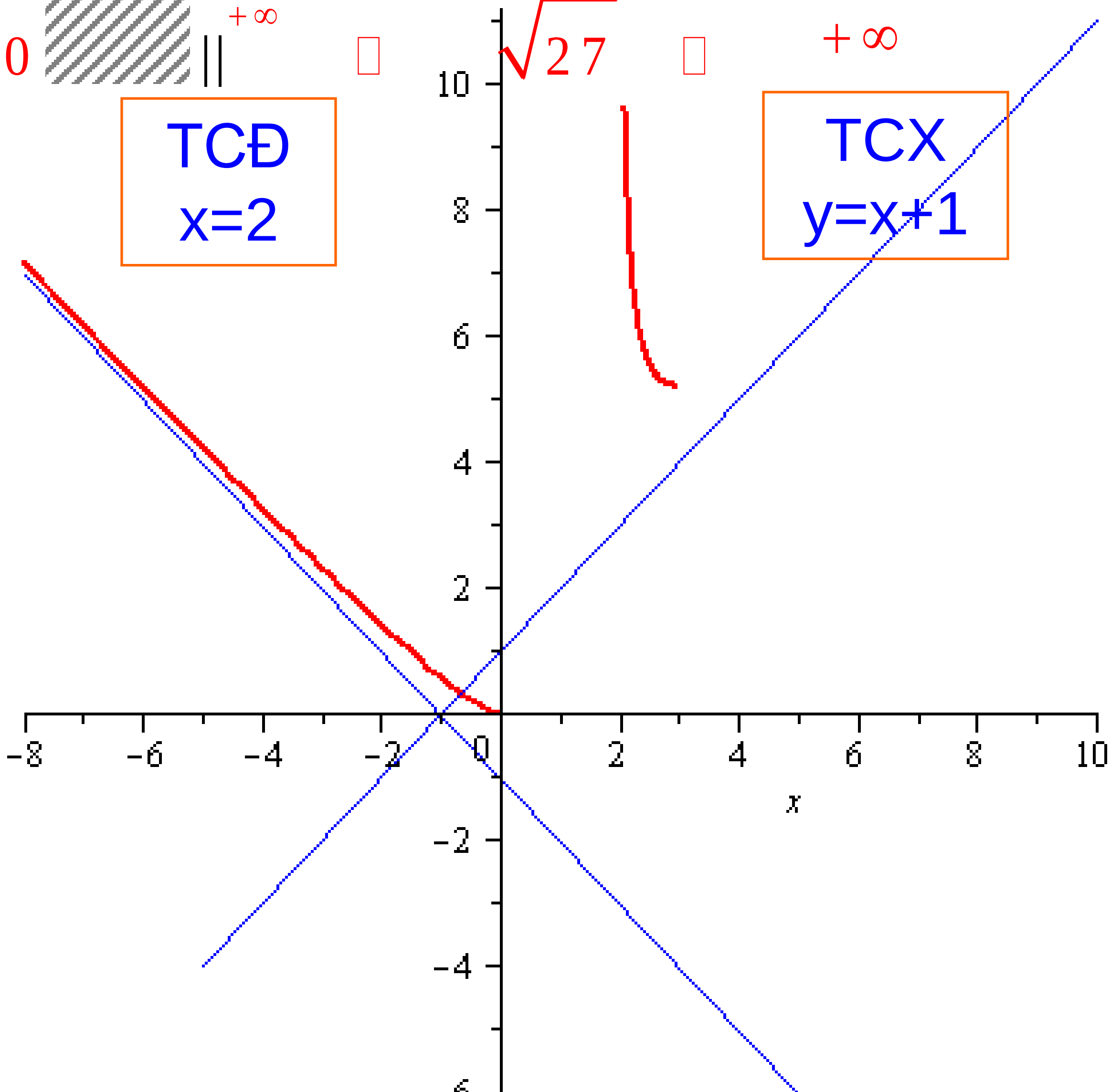


x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		$\|\| +\infty$	↘	$\sqrt{27}$	↗	$+\infty$

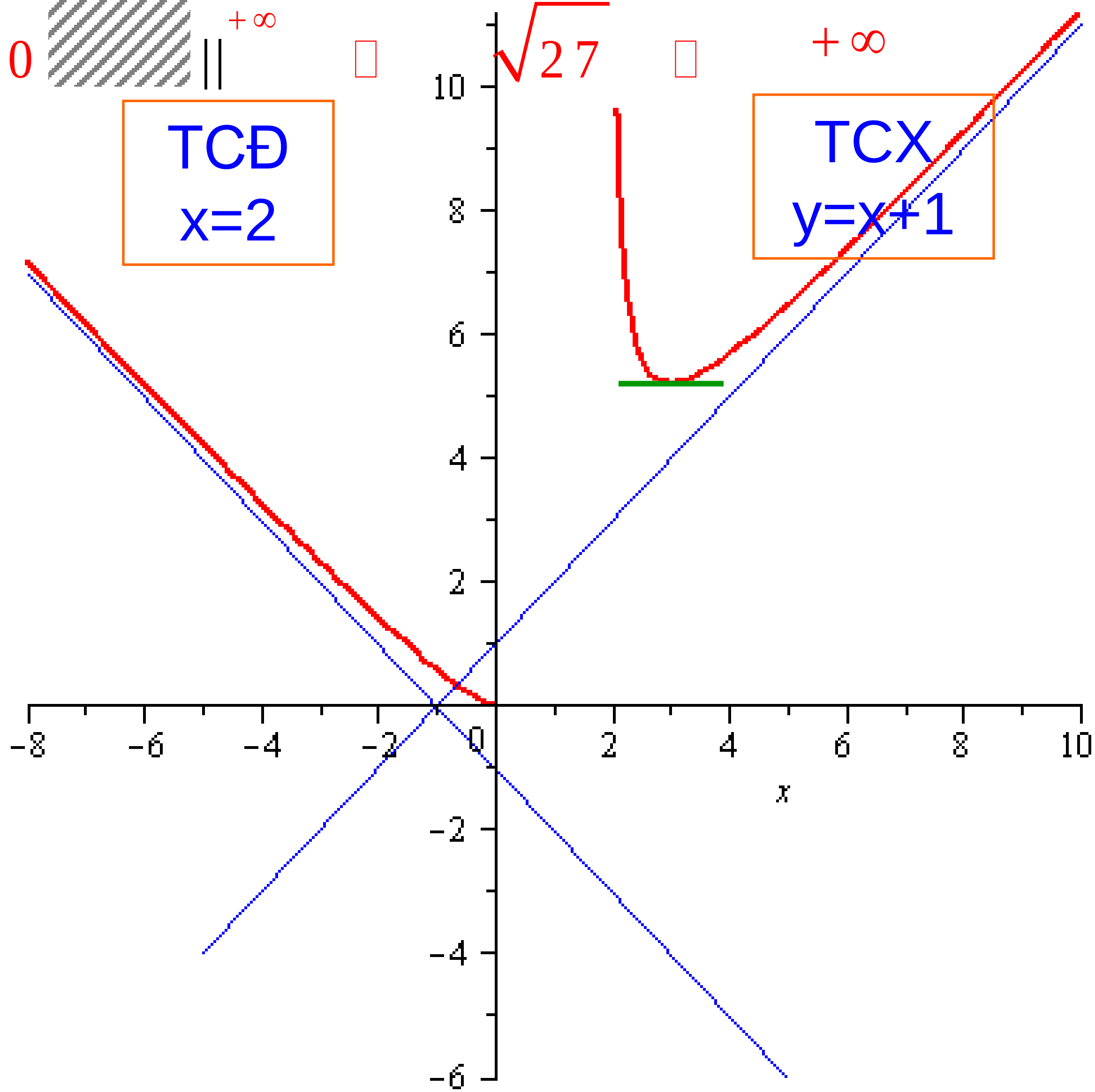
TCX
y=-x-1

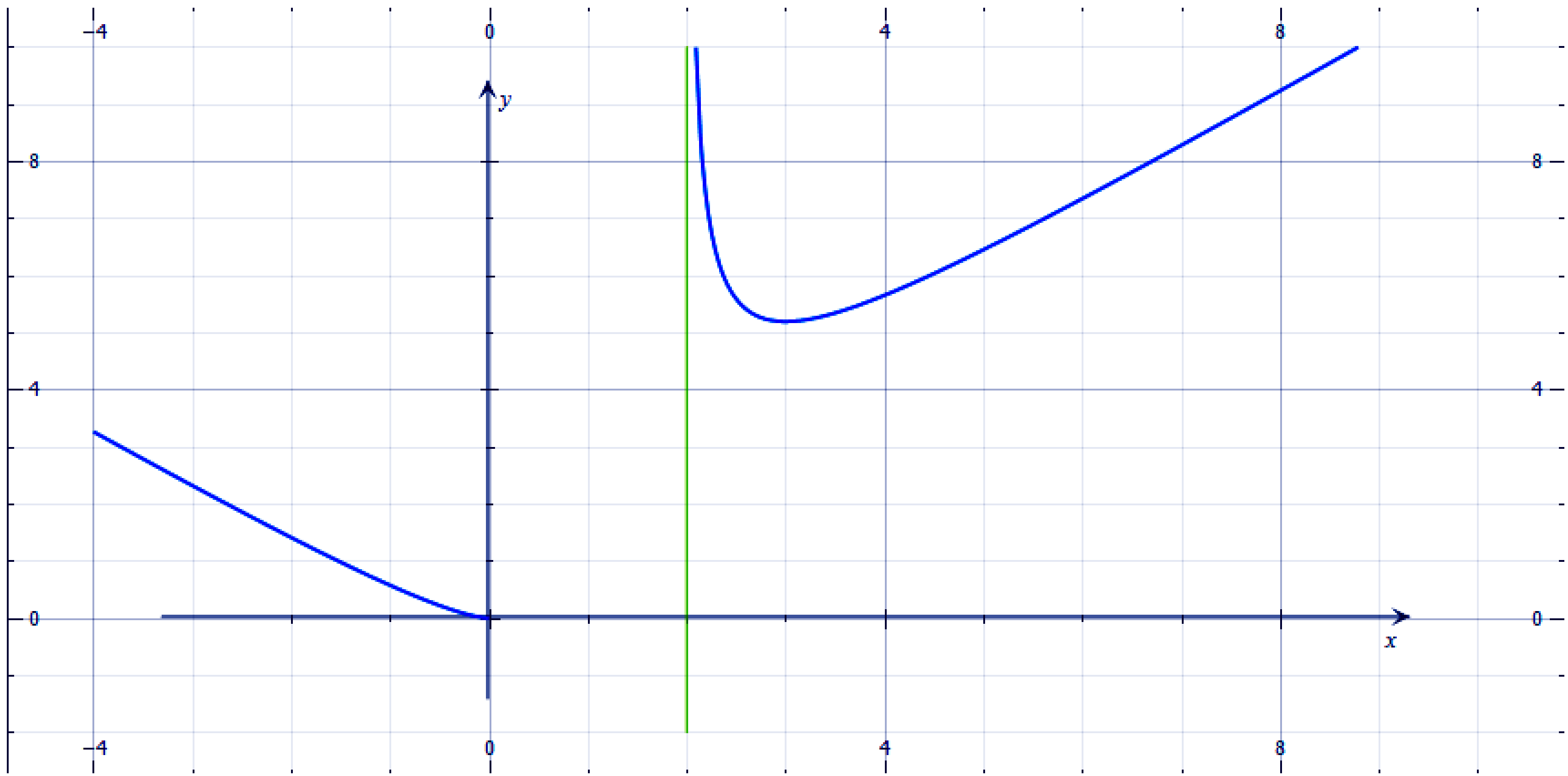
TCĐ
x=2

TCX
y=x+1



x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		$\|\| +\infty$	↘	$\sqrt{27}$	↗	$+\infty$





-4
0
4
8
y
8
4
0
x
-4
0
4
8

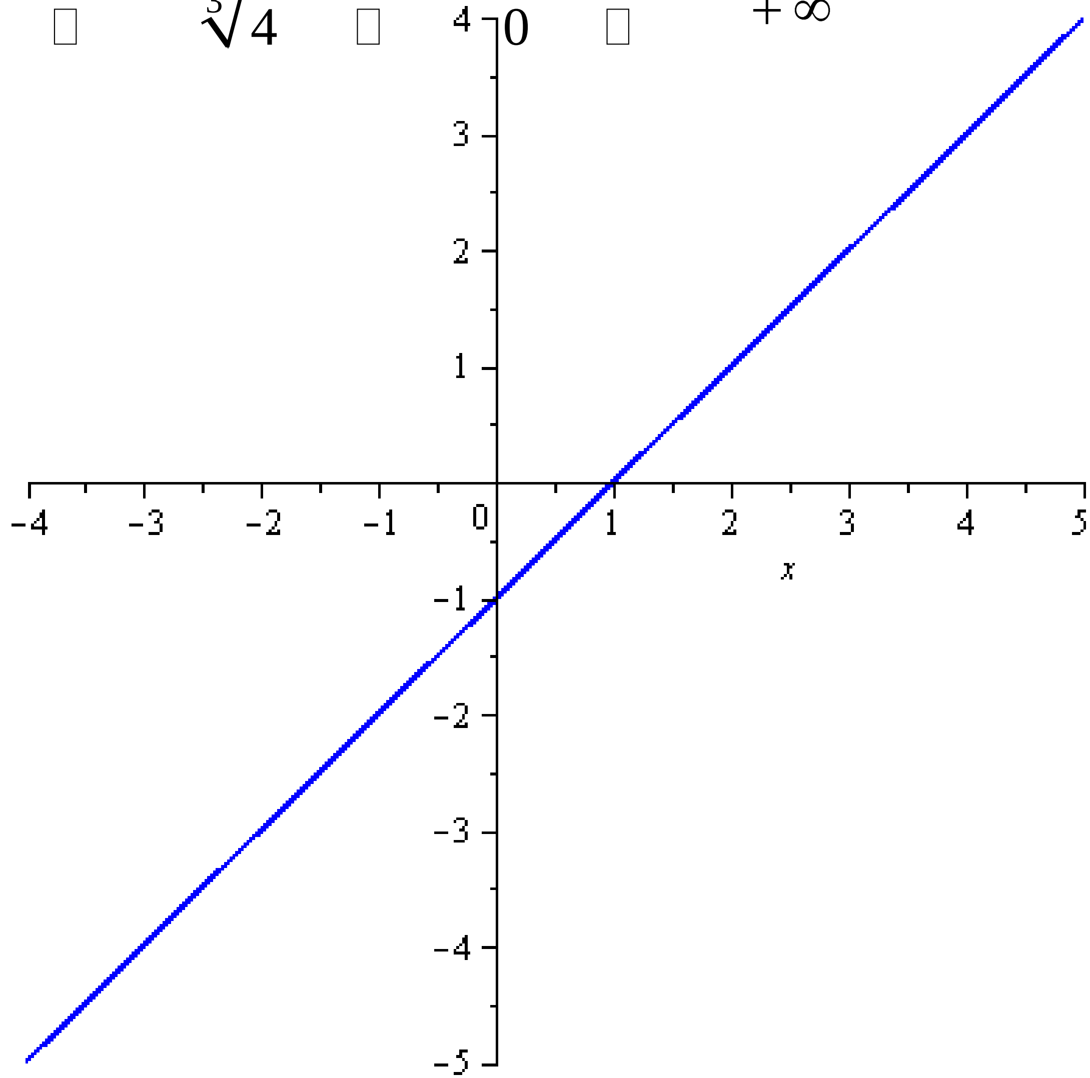
Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$

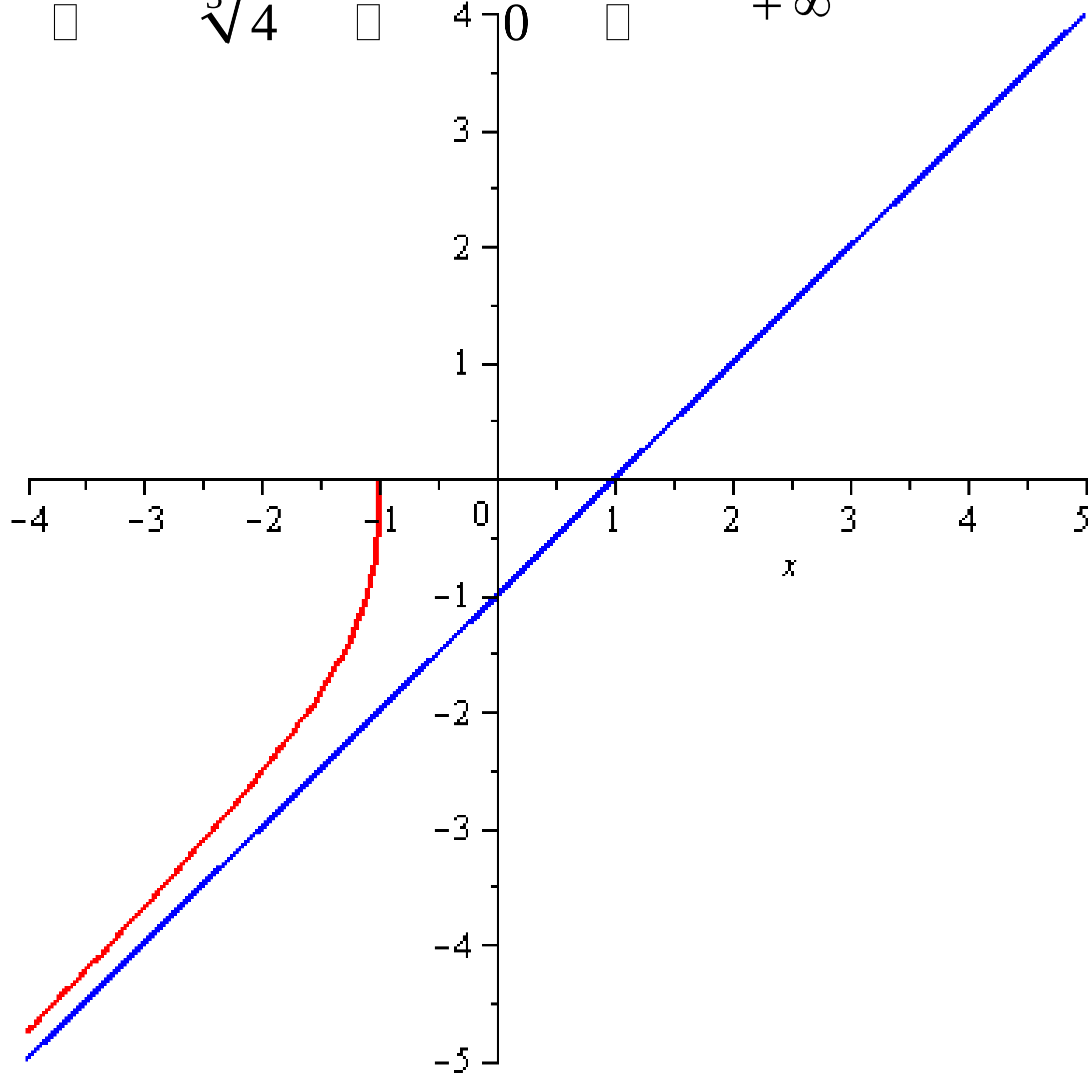
TCX : y = x – 1, $x\to\pm\infty$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	0	□	$+\infty$
	TCX y=x–1		TT//oy		TT//ox		TT//oy		TCX y=x–1

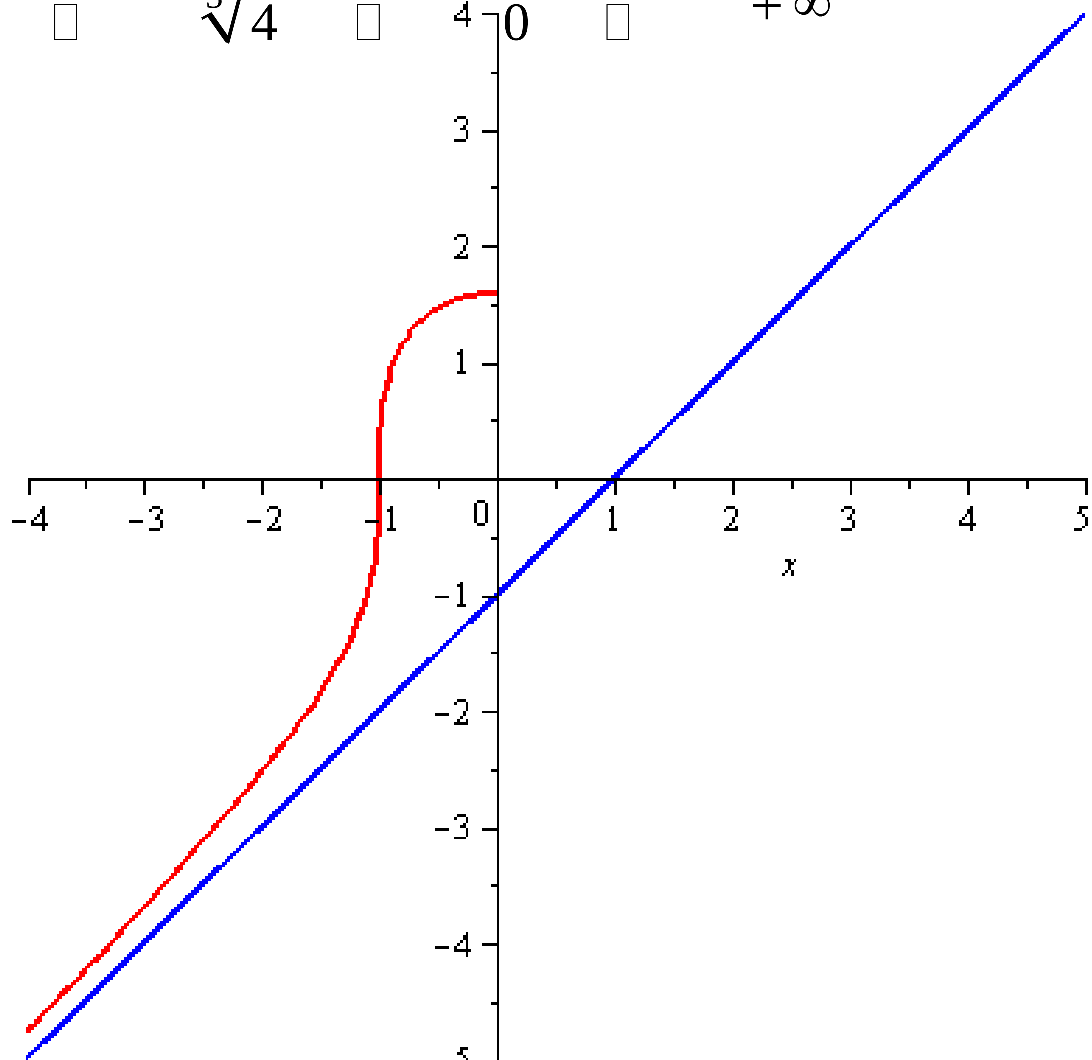
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	0	□	$+\infty$



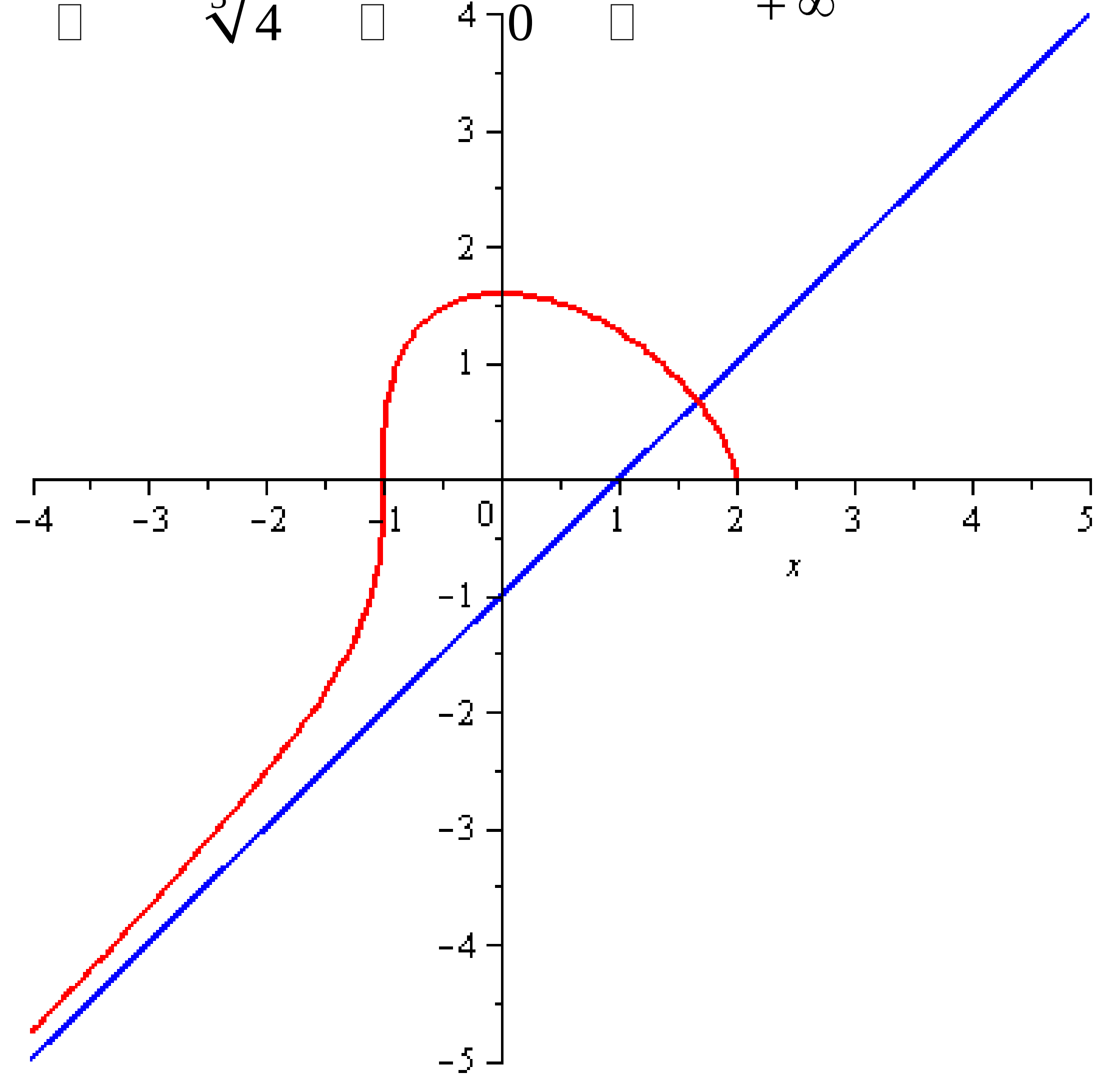
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	0	□	$+\infty$



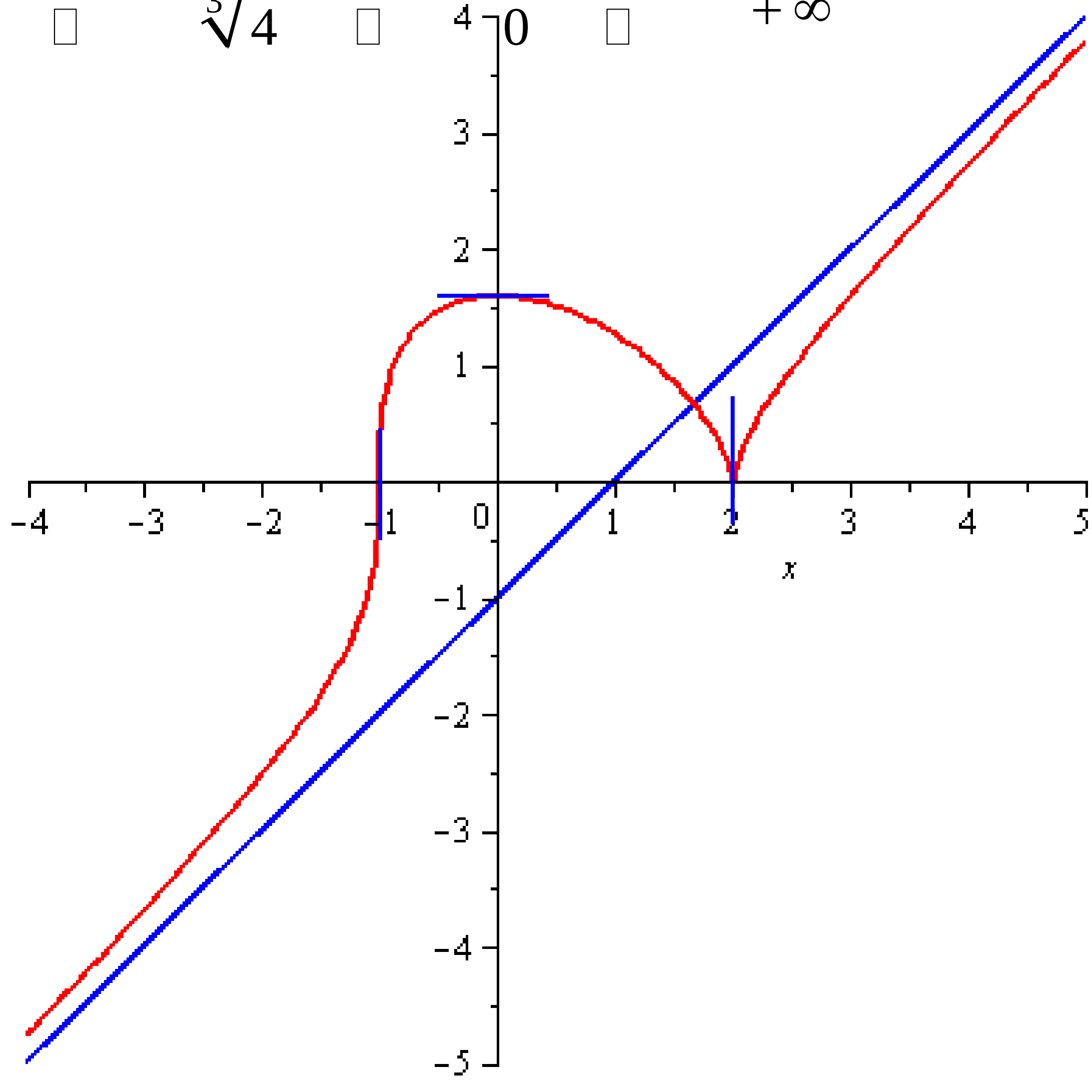
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

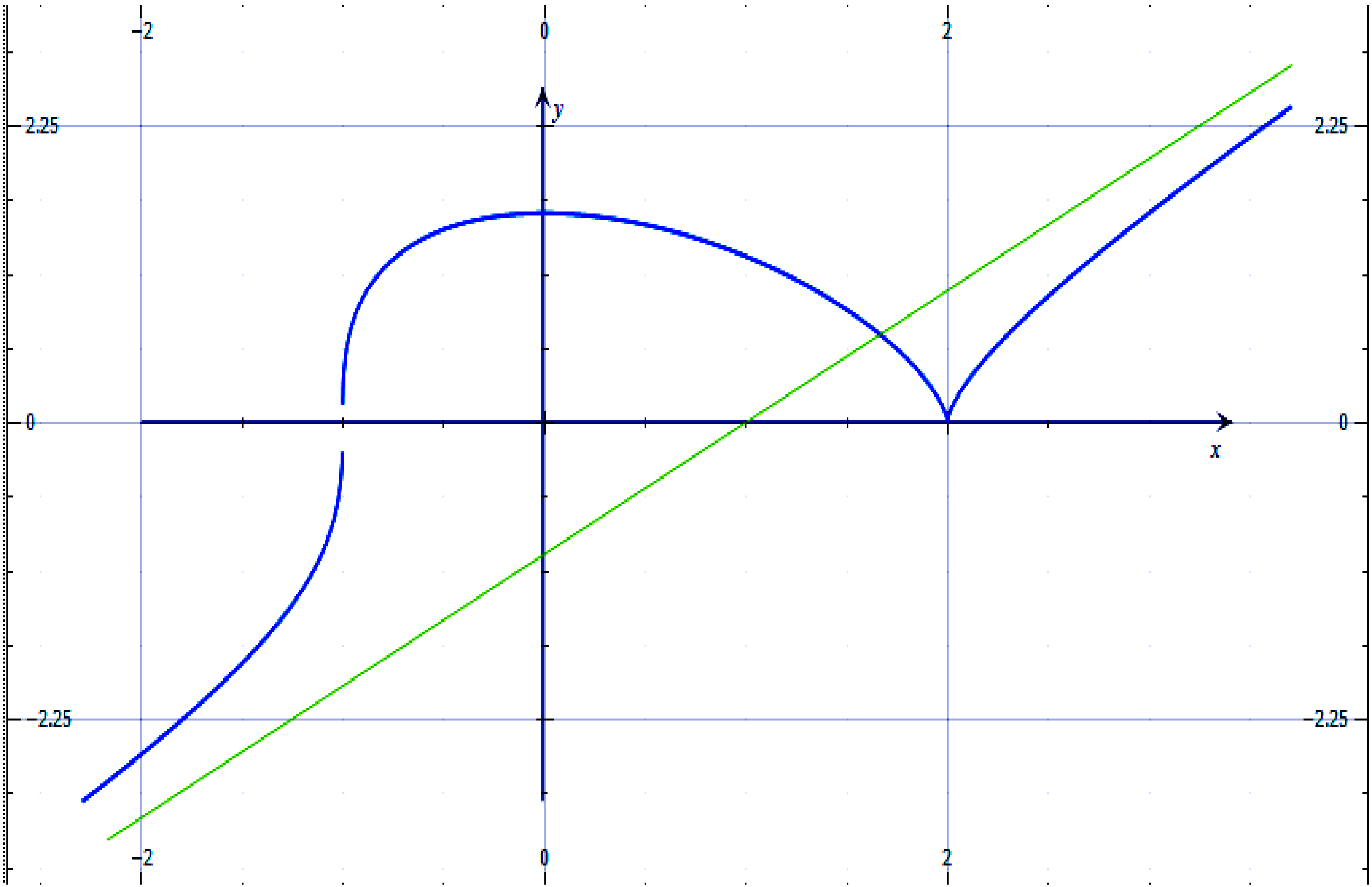


x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	0	□	$+\infty$



x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	0	□	$+\infty$





−2
0
2
2.25
0
−2.25
y
x

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- NHỎ NHẤT

<u>Loại 1</u>: tìm gtln, gtnn trên toàn miền xác định

$\Rightarrow$ khảo sát hàm số

<u>Loại 2</u>: tìm gtln, gtnn trên [a, b]

<u>B1</u>: Tìm các điểm tới hạn trong (a, b)

<u>B2</u>: so sánh giá trị của f tại các điểm tới hạn và f(a), f(b) để rút ra min, max.

VÍ DỤ

1/ Tìm gtln, gtnn $f(x) = x^x$

MXĐ: $(0, +\infty)$. $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	□	$e^{-1/e}$	□	$+\infty$

<u>Kết luận</u>: gtln không có, gtnn là $f(1/e) = e^{-1/e}$

2/ Tìm gtln, gtnn trên [0, 2]: $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1} = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

(1 điểm tới hạn)

f(0) = 0, f(1) = arctan(1/2), f(2) = arctan (2/5)

$\Rightarrow f_{max}$ = f(1) =arctan (1/2), f_{min} = f(0) = 0

3/ Tìm gtln, gtnn trên [-3, 2]: $f(x) = |x|(x+2)$

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2), -3 \le x \le 0 \\ x(x+2), 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2, -3 < x < 0 \\ 2x+2, 0 < x < 2 \end{cases}$$

Điểm phân chia biểu thức được xem là 1 điểm tới hạn khi tìm min, max, *không cần tính đạo hàm*

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1 $\in$ (-3, 2)

So sánh f(-3), f(-1), f(0), f(2) để tìm min, max

KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM THAM SỐ

$$x = x(t), y = y(t)$$

Tìm MXĐ và liên tục của x(t), y(t)

- Xét tính tuần hoàn, đối xứng (khác y = f(x))
- Tính x’(t), y’(t) và lập bảng biến thiên.
- Tìm tiệm cận(nếu có)
- Vẽ đồ thị.

CỰC TRỊ HÀM THAM SỐ

$x = x(t),\ y = y(t)$

Đi qua x_j , $y'(x)$ đổi dấu thì y đạt cực trị (theo x) tại x_j . Giá trị cực trị là y_j

- Bước 1: tính $x'(t)$, $y'(t) \Rightarrow$ các giá t
- Bước 2 : lập bảng biến thiên

t		t_0		t_1		t_2		t_3	
$x'(t)$									
$x(t)$	□	x_0	□	x_1	□	x_2	□	x_3	□
$y'(t)$									
$y(t)$		y_0		y_1		y_2		y_3	
$y'(x)$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$
		CĐ		K		K		CT	

Tìm cực trị

$$x = te^{t},\ y = te^{-t}$$

$$x'(t) = (1+t)e^{t} \to t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \to t_1 = 1$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x(t)$		□	$-1/e$	□	e	□	
$y'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$y(t)$		□	$-e$	□	$1/e$	□	
$y'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

y đạt cực đại tại x = e (t=1), $y_{cđ} = 1/e$

Tìm cực trị

$$x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$$

$$x' = 2 - 2t \rightarrow t_0 = 1$$

$$y' = 4t - 3t^2 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 4/3$$

t	$-\infty$		0		1		$4/3$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x(t)$		□	0	□	1	□	$8/9$	□	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$y(t)$		□	0	□	1	□	$32/27$	□	
$y'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

CT **CĐ**

TiỆM CẬN HÀM THAM SỐ $x = x(t)$, $y = y(t)$

- Bước 1: tìm tìm tất cả các giá trị t_0 sao cho
  $x(t) \to \infty$ hay $y(t) \to \infty$ (t_0 có thể là ∞)

- Bước 2: xác định loại TC

Khi $t \to t_0$

$x(t) \to a$, $y(t) \to \infty$: TC đứng $x = a$

$x(t) \to \infty$, $y(t) \to a$: TC ngang $y = a$

$x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$, $\begin{cases} \dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \\ y(y) - ax(t) \to b \end{cases}$: TC xiên $y = ax + b$

Tìm tiệm cận hs $x = te^{t}, y = te^{-t}$

Bước 1: $\begin{cases} x(t) \to \infty \text{ khi } t \to +\infty \\ y(t) \to \infty \text{ khi } t \to -\infty \end{cases}$

Bước 2:

- $t \to +\infty$, $x(t) \to +\infty$, $y(t) \to 0$: TCN : $y = 0$
- $t \to -\infty$, $x(t) \to 0$, $y(t) \to -\infty$: TCĐ : $x = 0$

Tìm tiệm cận hs $$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$$

- $x(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \pm\infty$ hay $t \rightarrow 1$
- $y(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \pm 1$

- <u>$t \rightarrow \pm\infty$</u> : $x(t) \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 0$: TCN $y = 0$
- <u>$t \rightarrow -1$</u> : $x(t) \rightarrow -1/2$, $y(t) \rightarrow \infty$: TCĐ $x = -1/2$

$$x(t)=\frac{t^2}{t-1},\ y(t)=\frac{t}{t^2-1}$$

❖ **$\underline{t \to 1}$: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$**

$$* \quad \lim_{t\to 1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1}\frac{t}{t^2-1}\times\frac{t-1}{t^2}=\frac{1}{2}$$

$$* \quad \lim_{t\to 1}\left[y(t)-\frac{1}{2}x(t)\right]=\lim_{t\to 1}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{t^2}{2(t-1)}\right]$$

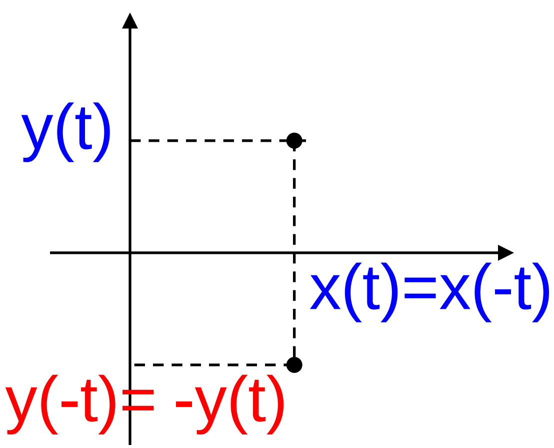
$$=\lim_{t\to 1}\frac{-t}{2(t^2-1)}\times(t^2+t-2)=\frac{-3}{4}$$

TCX $\boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}$

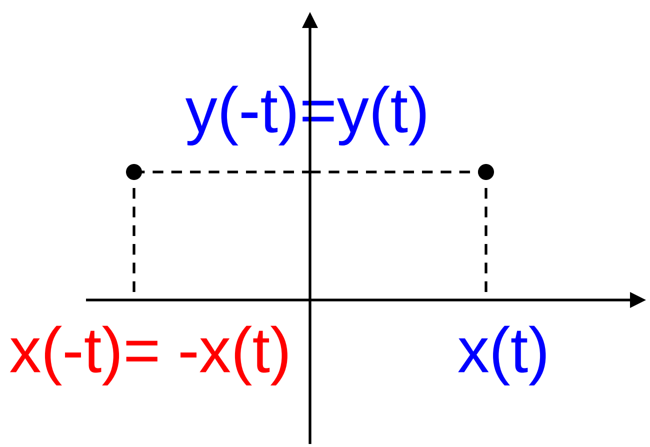
VỀ TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG ĐƯỜNG CONG THAM SỐ

1. x(t) chẵn, y(t) lẻ: đt đối xứng qua ox
2. x(t) lẻ, y(t) chẵn: đt đối xứng qua oy
3. x(t) lẻ, y(t) lẻ: đt đối xứng qua gốc tđ

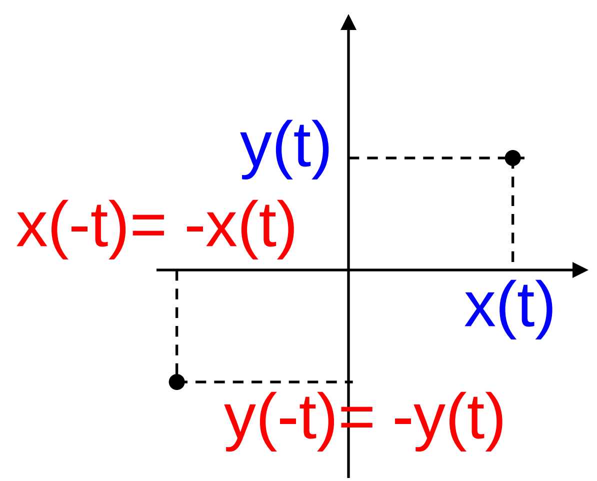
Chỉ ks phần $t \geq 0$



(1)



(2)



(3)

VỀ TÍNH TUẦN HOÀN TRONG ĐC THAM SỐ

1. x(t) TH chu kỳ T_1, y(t) TH chu kỳ T_2

$\Rightarrow$ Chỉ khảo sát và vẽ trong 1 chu kỳ T =bscnn(T_1,T_2)

2. x(t + T) = x(t) + A, y(t) TH chu kỳ T

$\Rightarrow$Đc y = y(x) TH với chu kỳ A

$\Rightarrow$Chỉ khảo sát trong 1 chu kỳ T(vẽ lặp lại theo tính TH của hàm số y = f(x))

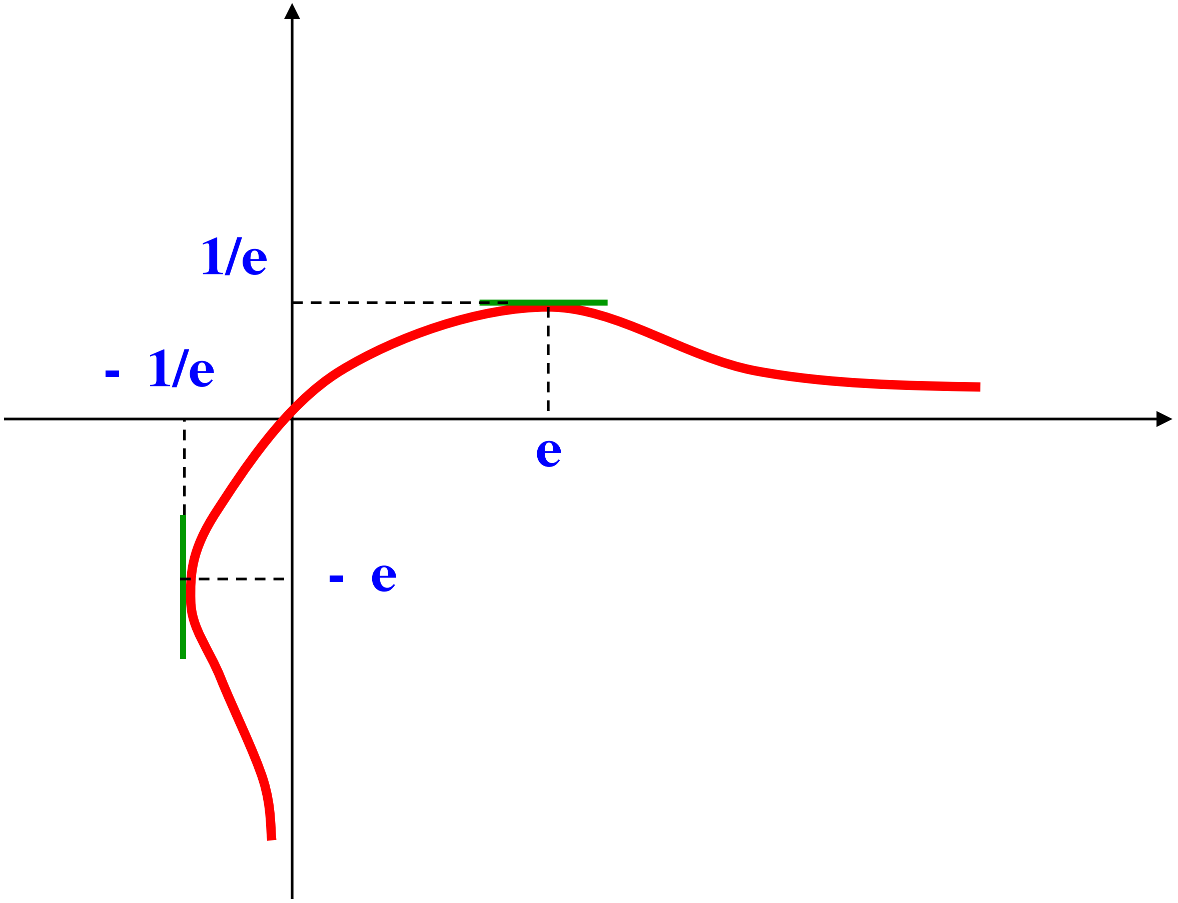
Vẽ dồ thị hs $x = te^{t}, y = te^{-t}$

$$x'(t) = (1+t)e^{t} \to t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \to t_1 = 1$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(t)$	0	□	$-1/e$	□	e	□	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$y(t)$	$-\infty$	□	$-e$	□	$1/e$	□	0
$y'(x)$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
	TCĐ x=0		TTĐ (// oy)		TTN (// ox)		TCN y=0

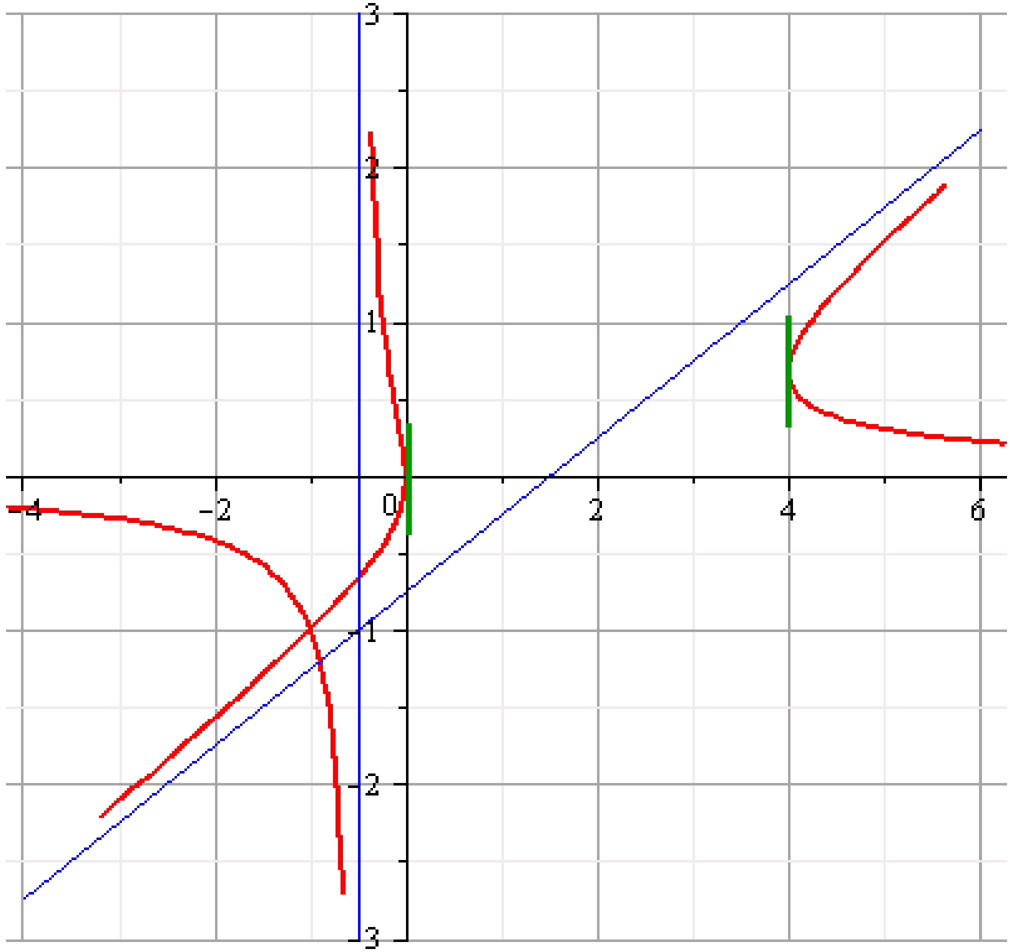
Vẽ đồ thị hs:



Vẽ đồ thị hs: $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1},\ y(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$

$$x'(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2} \Rightarrow t = 0,\ t = 2;\ y'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0\ ,\ \forall t \neq \pm 1$$

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	□	$-\frac{1}{2}$	□	0	□	$-\infty \Vert +\infty$	□	4	□	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$y(t)$	0	□	$-\infty \Vert +\infty$	□	0	□	$-\infty \Vert +\infty$	□	$\frac{2}{3}$	□	0
$y'(x)$	**TCN** **y=0**	$-$	**TCĐ** **x= -1/2**	$-$	∞ **TTĐ**	$+$	**TCX** **y=1/2x-3/4**	$+$	∞ **TTĐ**	$-$	**TCN** **y=0**



3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
2
4
6

Vẽ đồ thị

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ a > 0 \\ (x^{2/3} + y^{2/3} = a^2) \end{array}}$$

- x(t), y(t) xác định liên tục trên R.
- x(t), y(t) tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ khảo sát và vẽ trong 1 chu kỳ ($t \in [-\pi, \pi]$)
- x(t) chẵn, y(t) lẻ ⇒ đt đối xứng qua ox ⇒ chỉ khảo sát nửa chu kỳ ($t \in [0, \pi]$)(nửa chu kỳ còn lại vẽ đối xứng qua ox).

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \le 0, \forall t \in [0, \pi]$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$

Bảng biến thiên

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \le 0, \forall t \in [0, \pi]$$

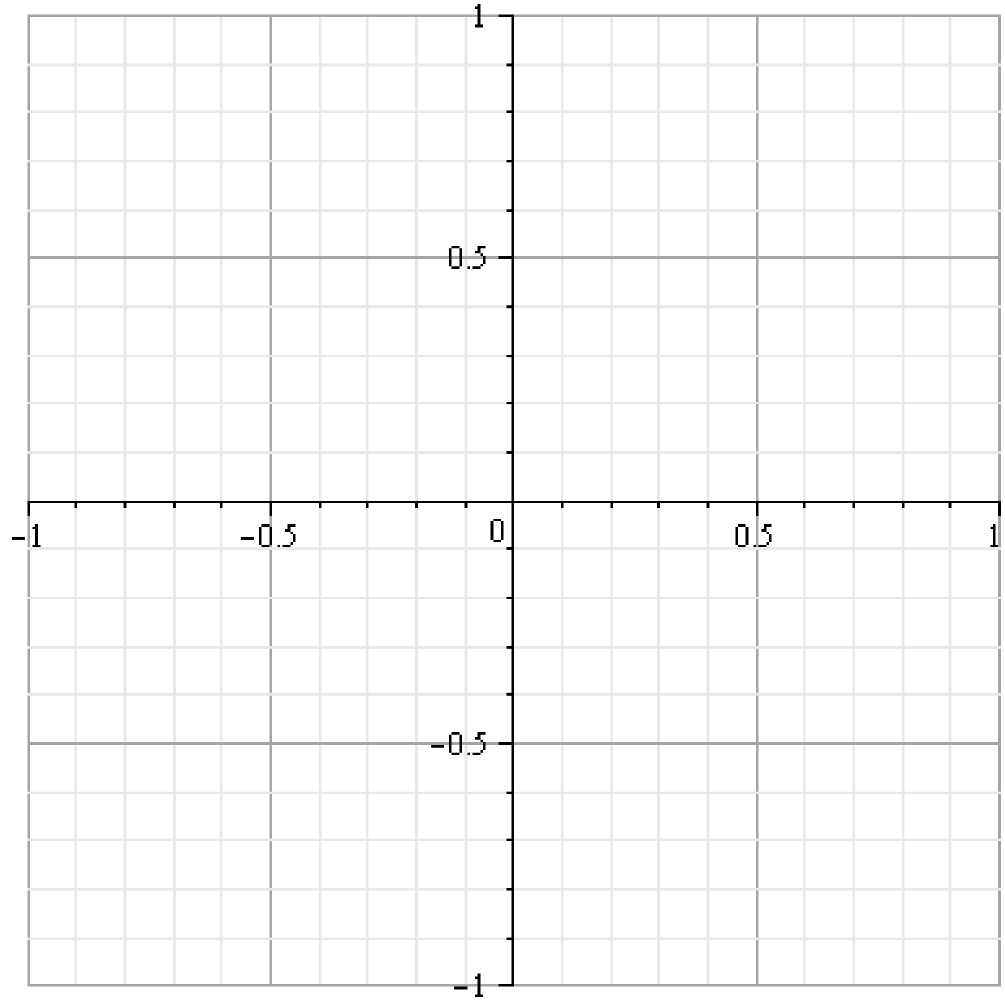
$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	□	0	□	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	□	a	□	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0
	TTN		TTĐ		TTN

x(π-t)= -x(t), y(π-t)= y(t) ⇒ đx qua Oy

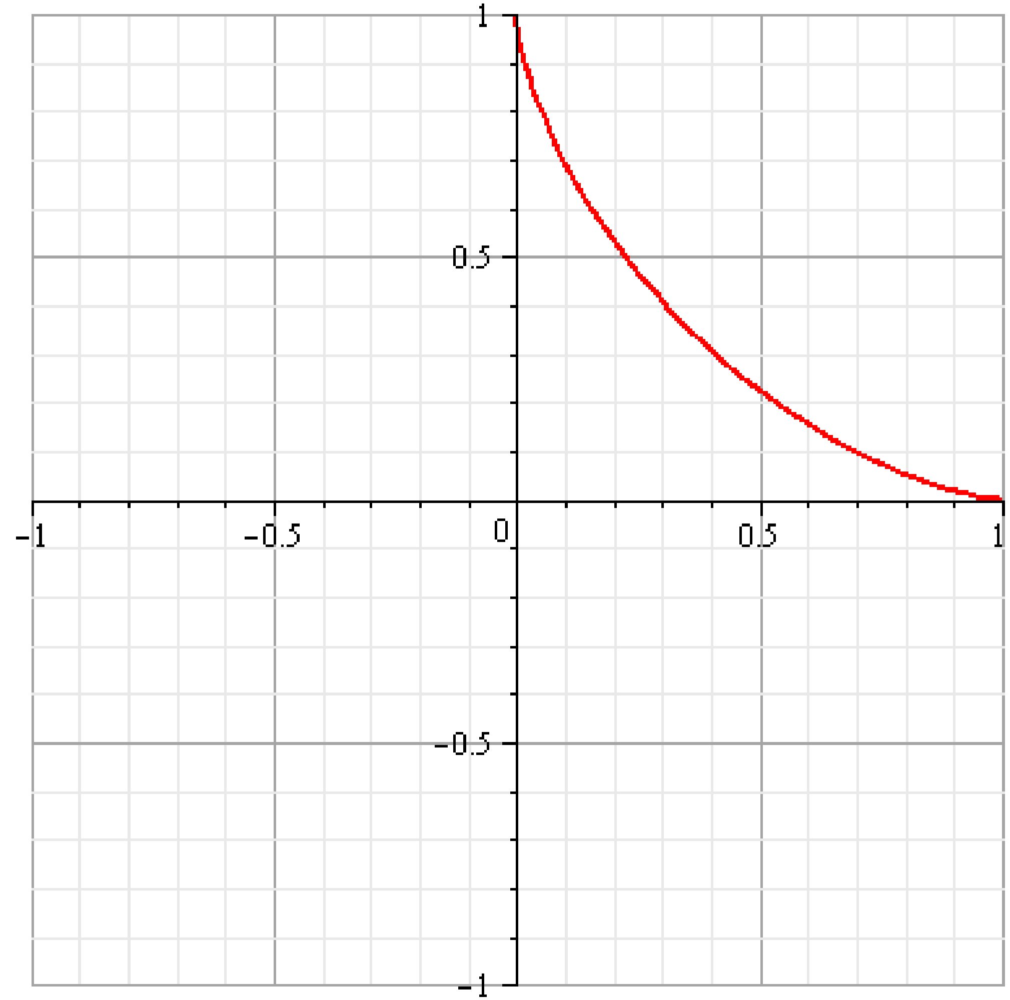
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	□	0	□	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	□	a	□	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0

TTN **TTĐ** **TTN**



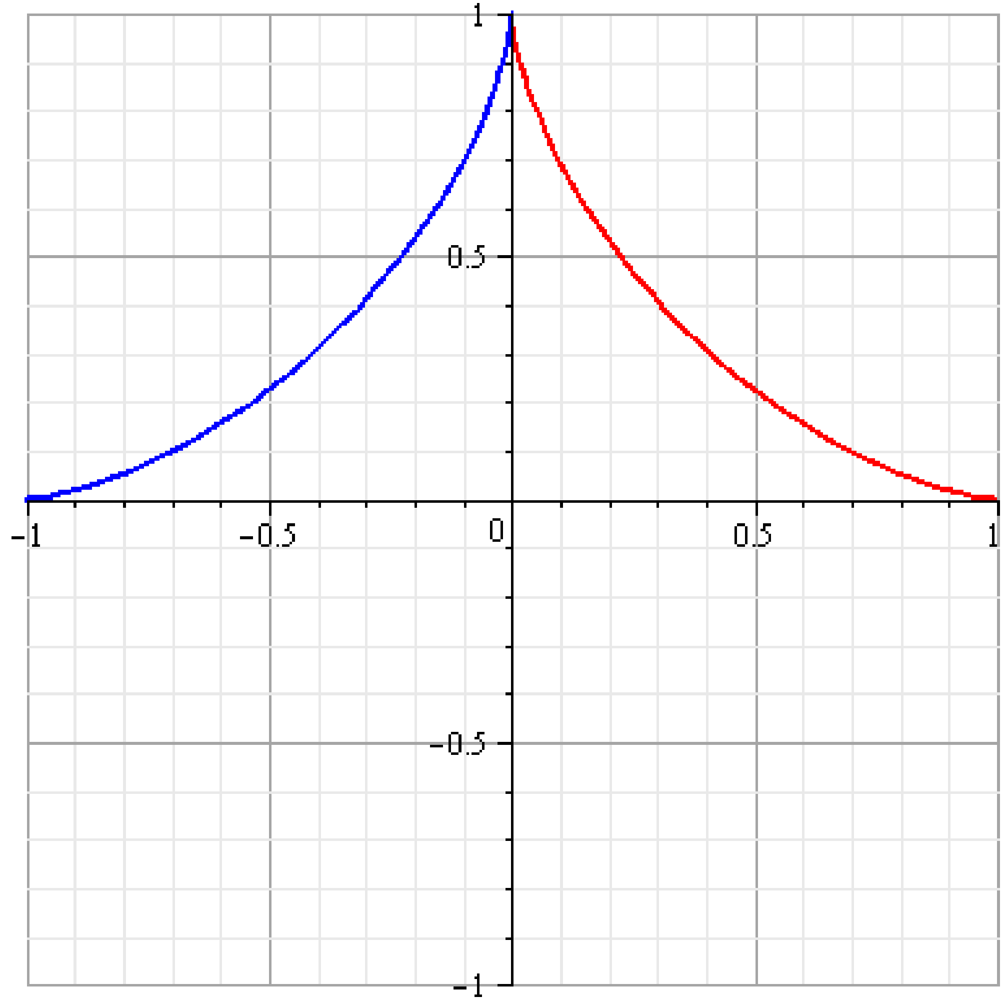
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	□	0	□	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	□	a	□	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0

TTN **TTĐ** **TTN**

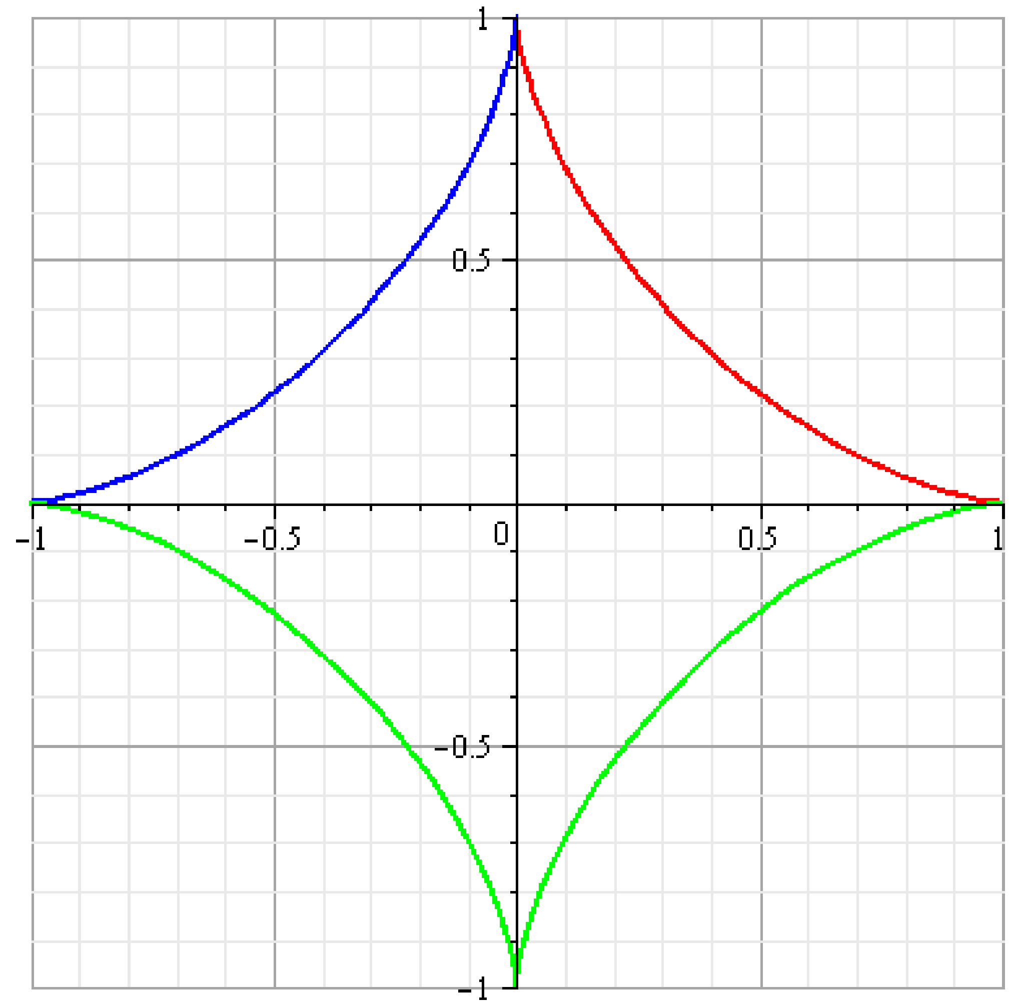


t	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	□	0	□	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	□	a	□	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0

TTN **TTĐ** **TTN**



t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	□	0	□	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	□	a	□	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0
	TTN		**TTĐ**		**TTN**



Vẽ đồ thị Cycloid: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \; a > 0$

- **x(t), y(t) xác định liên tục trên R.**

- **y(t) tuần hoàn với chu kỳ 2π**

x(t+2 π) = x(t) +2πa ⇒ y =y(x) tuần hoàn với chu kỳ 2πa ⇒ khảo sát 1chu kỳ (t∈[- π, π]) và vẽ y tuần hoàn theo x với chu kỳ 2πa.

- **x(t) lẻ, y(t) chẵn ⇒ đường cong đối xứng qua oy**

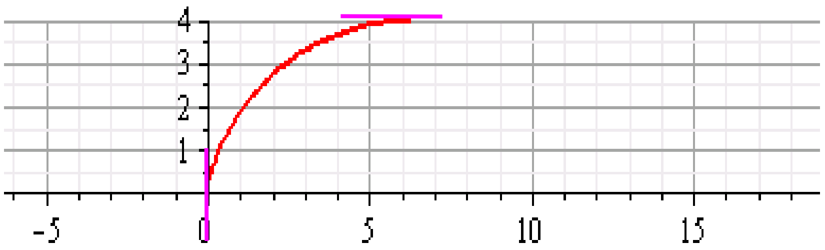
⇒ chỉ khảo sát nửa chu kỳ (t∈[0, π])(nửa chu kỳ còn lại vẽ đối xứng qua oy).

Cycloid: x = 2(t – sint), y = 2(1-cost)

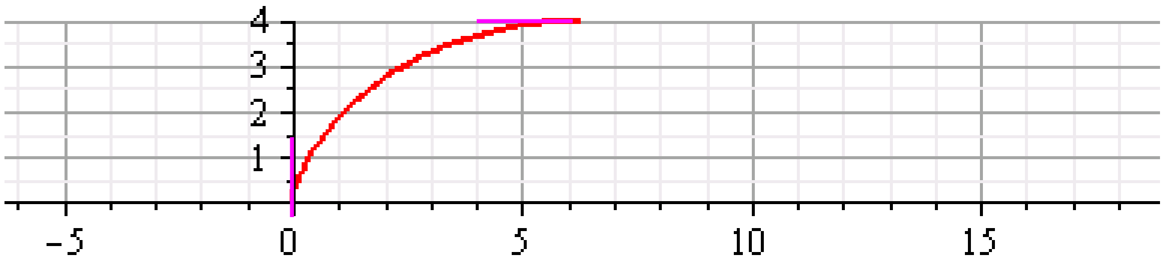
(y tuần hoàn chu kỳ 4π theo x)

$x'(t) = 2(1-\cos t) \geq 0$, $y'(t) = 2\sin t \geq 0$, $\forall t \in [0, \pi]$

t	0		π
$x'(t)$	0	+	|
$x(t)$	0	□	2π
$y'(t)$	0	+	0
$y(t)$	0	□	4
$y'(x)$	∞	+	0
	TTĐ		TTN

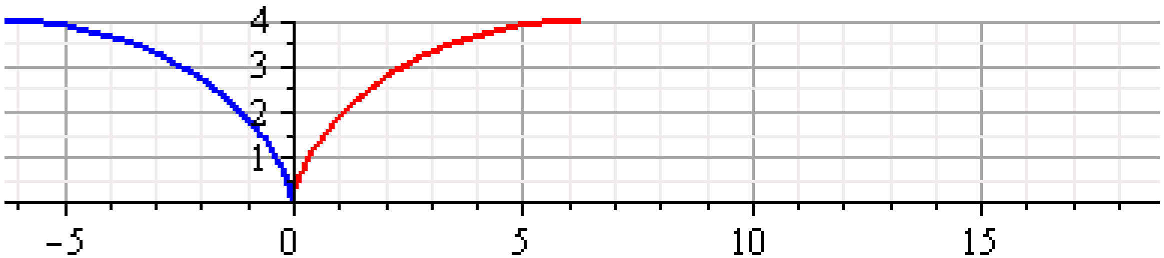


Cycloid: x = 2(t – sint), y = 2(1-cost)



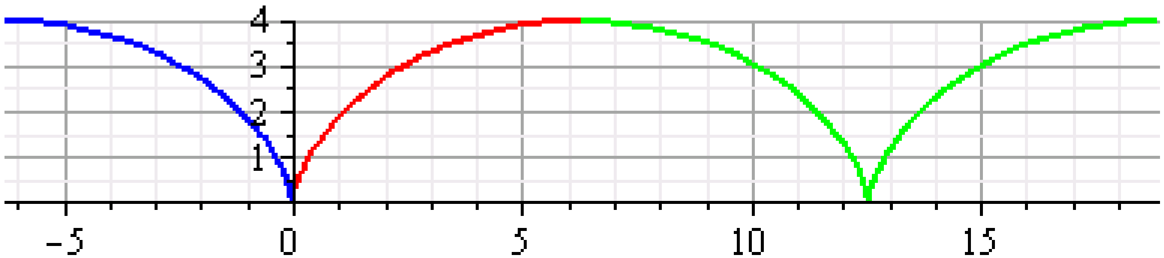
$\boxed{t \in [0, \pi]}$

Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$



$t \in [-\pi, \pi]$

Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$



$t \in [-\pi, 3\pi]$