

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN.

ĐẠO HÀM TẠI 1 ĐIỂM

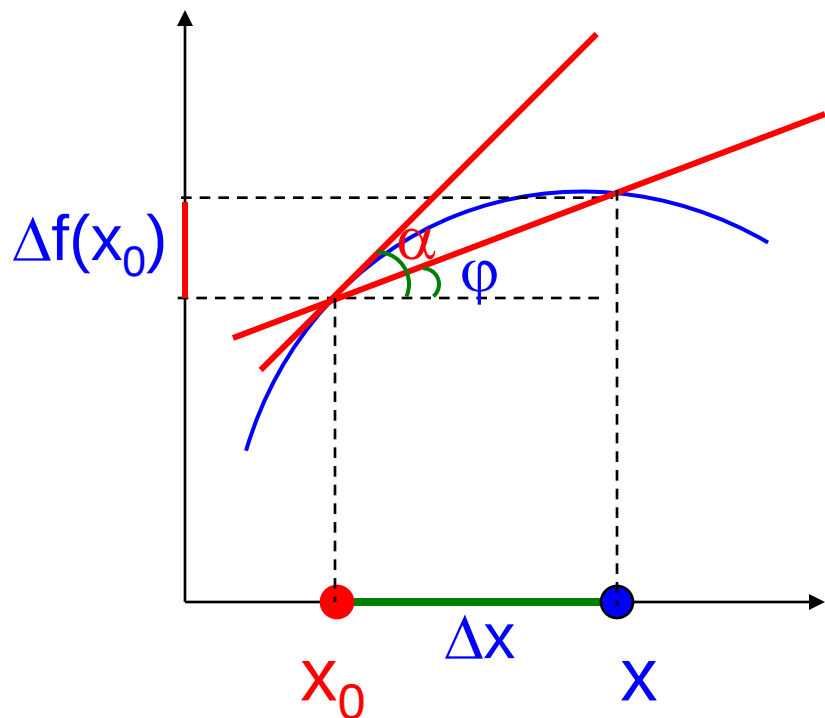
Cho $y = f(x)$ xác định trong $(a, b) \ni x_0$, xét tỷ số

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nếu tỷ số trên có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow x_0$ hay $\Delta x \rightarrow 0$ thì f có đạo hàm tại x_0 .

Đặt

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\tan \varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

$x \rightarrow x_0$

$$\tan \alpha = f'(x_0)$$

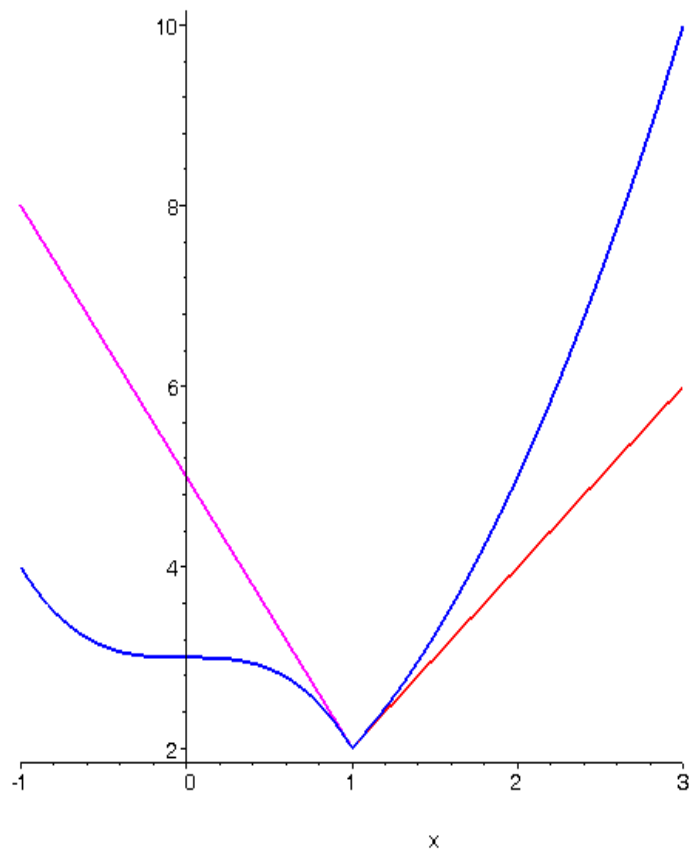
$f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong
(C): $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0, f(x_0))$

Đạo hàm trái tại x_0 :

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Đạo hàm phải tại x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^+)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



f có đạo hàm tại x_0

$$\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Cách tính đạo hàm

1. Nếu f xác định bởi 1 biểu thức sơ cấp: dùng công thức đạo hàm sơ cấp và các quy tắc(tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp).
2. Nếu tại x_0 , biểu thức f' không xác định: tính bằng định nghĩa.
3. Nếu hàm số có phân chia biểu thức tại x_0 : tính bằng định nghĩa.
4. Nếu $f(x) = u(x)^{v(x)}$ hoặc $f(x)$ là tích thương của nhiều hàm: tính $(\ln f)'$

Ví dụ: tính đạo hàm tại các điểm được chỉ ra

$$f(x) = 2^{x \ln x} \quad \text{tại } x = 1$$

$$f'(x) = 2^{x \ln x} \ln 2 (x \ln x)'$$

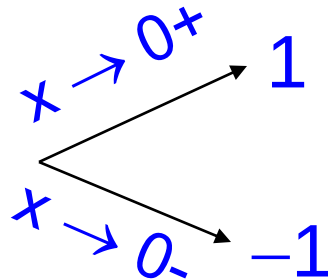
$$= 2^{x \ln x} \ln 2 (\ln x + 1)$$

$$f'(1) = \ln 2$$

$$2 / f(x) = |x| \quad \text{tại } x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x}$$



$\Rightarrow f'(0)$ không tồn tại

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$x = 0$ Tính bằng định nghĩa.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= x \sin \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2 \\ \Rightarrow f'(1) &= 2 \end{aligned}$$

Đạo hàm và liên tục

f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0 .

VD: tìm các hằng số a, b để f có đạo hàm tại x_0

(Nên xét tính liên tục tại x_0 trước)

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để f có đạo hàm tại $x = 0$

Đạo hàm hàm ngược

Cho $y = f(x): (a, b) \rightarrow (c, d)$ liên tục và tăng ngặt.

Khi đó tồn tại hàm ngược $f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ liên tục và tăng ngặt.

Nếu tồn tại $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$ thì tại $y_0 = f(x_0)$, f^{-1} có đạo hàm và

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ta thường viết: $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

Đạo hàm các hàm lượng giác ngược

$$1. y = \arcsin x, x \in (-1, 1) \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2. y = \arctan x, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \tan y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Bảng công thức đạo hàm các hàm mới

$$\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccot} x' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\cosh x' = \sinh x$$

$$\sinh x' = \cosh x$$

$$\tanh x' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{coth} x' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Đạo hàm hàm cho theo tham số

Cho các hàm số : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Nếu : * $x = x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$

* $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm, $x'(t) \neq 0$

$$y'(x) = y'(t) \cdot t'(x)$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Ví dụ

$$\text{Cho : } \begin{cases} x(t) = t.e^t - 1 \\ y(t) = t^2 + t \end{cases} \quad \text{Tính } y'(x) \text{ tại } x = -1$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 1}{e^t + t.e^t}$$

$$x = -1 \Leftrightarrow t.e^t - 1 = -1 \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow y'(-1) = 1$$

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Cho $f(x)$ có đạo hàm cấp 1 trong lân cận x_0 , nếu f' có đạo hàm tại x_0 , đặt

$$f''(x_0) = f'(x)' \Big|_{x=x_0}$$

Có thể viết: $f''(x) = f'(x)'$

Tổng quát: đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n - 1)$

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

Ví dụ

Tìm đạo hàm cấp 2 của f tại $x = 1$: $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} \right)^2} = - \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1 + x^2}{x^2}} = - \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = \left(- \frac{1}{1 + x^2} \right)' = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(1) = \frac{1}{2}$$

Đạo hàm cấp cao các hàm cơ bản

$$a^x^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad e^x^{(n)} = e^x$$

$$\left[ax + b^\alpha \right]^{(n)} = a^n \alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) ax + b^{\alpha - n}$$

$$\left(\frac{1}{ax + b} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \frac{a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

$$\ln(ax + b)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{a^n}{(ax + b)^n}$$

Đạo hàm cấp cao các hàm cơ bản

$$\sin(ax + b)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(ax + b)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + b + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Công thức đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao
của tổng hiệu:

$$f \pm g^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$

Đạo hàm cấp cao
của tích:

$$f.g^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(công thức Leibnitz)

Ví dụ

1. Tính đạo hàm cấp 7 tại $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{5}{3x + 1} + \frac{1}{3x - 2}$$

$$f^{(7)}(x) = \frac{5}{3} \frac{(-1)^7}{(x + 1)^8} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^7}{(x - 2)^8}$$

$$f^{(7)}(1) = \frac{5}{3} \frac{(-1)^7}{(1 + 1)^8} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^7}{(1 - 2)^8} = -\frac{1}{3} \left(\frac{5}{2^8} + 1 \right)$$

2. Tính đạo hàm cấp 7 tại $x = 1$.

$$f(x) = (x^2 - x).e^{2x}$$

$$f^{(7)}(x) = \sum_{k=0}^7 C_7^k (x^2 - x)^{(k)} e^{2x} \quad (7-k)$$

$$= C_7^0 (x^2 - x)^{(0)} e^{2x} \quad (7) + C_7^1 (x^2 - x)^{(1)} e^{2x} \quad (7-1)$$

$$+ \dots + C_7^7 (x^2 - x)^{(7)} e^{2x} \quad (7-7)$$

$$= C_7^0 (x^2 - x)^{(0)} e^{2x} {}^{(7)} + C_7^1 (x^2 - x)^{(1)} e^{2x} {}^{(7-1)}$$

$$+ \dots + C_7^7 (x^2 - x)^{(7)} e^{2x} {}^{(7-7)}$$

$$= 1 \cdot (x^2 - x) \cdot 2^7 e^{2x} + 7 \cdot (2x - 1) \cdot 2^6 e^{2x}$$

$$+ \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 2 \cdot 2^5 \cdot e^{2x} + 0$$

$$f^{(7)}(1) = 28 \cdot 2^6 \cdot e^2$$

Đạo hàm cấp cao của hàm tham số

Cho các hàm số : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$y''(x) = y'(x)'_x = \frac{y'(x)'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)'_t}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$$

$$y^{(n)}(x) = \frac{y^{(n-1)}(x)'_t}{x'(t)}$$

Ví dụ

Cho $y(t) = t^2 + 1$, $x(t) = t^3 - t + 2$, tính $y''(t)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t}{3t^2 - 1} \\ y''(x) &= \frac{y'(x)'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2 - 1} \right)'_t}{3t^2 - 1} \\ &= \frac{2(3t^2 - 1) - 6t \cdot 2t}{(3t^2 - 1)^3} \\ &= \frac{-2 - 6t}{(3t^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Cách 2: $y(t) = t^2 + 1, x(t) = t^3 - t + 2$

$$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$$

$$= \frac{2 \cdot (3t^2 - 1) - 6t \cdot 2t}{(3t^2 - 1)^3} = \frac{-2 - 6t}{(3t^2 - 1)^3}$$

SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN

f khả vi tại x_0 nếu tồn tại một hằng số A sao cho

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

hay $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$

Khi đó đại lượng: $dy = df(x_0) = A \cdot \Delta x$

gọi là vi phân của f tại x_0

Ví dụ

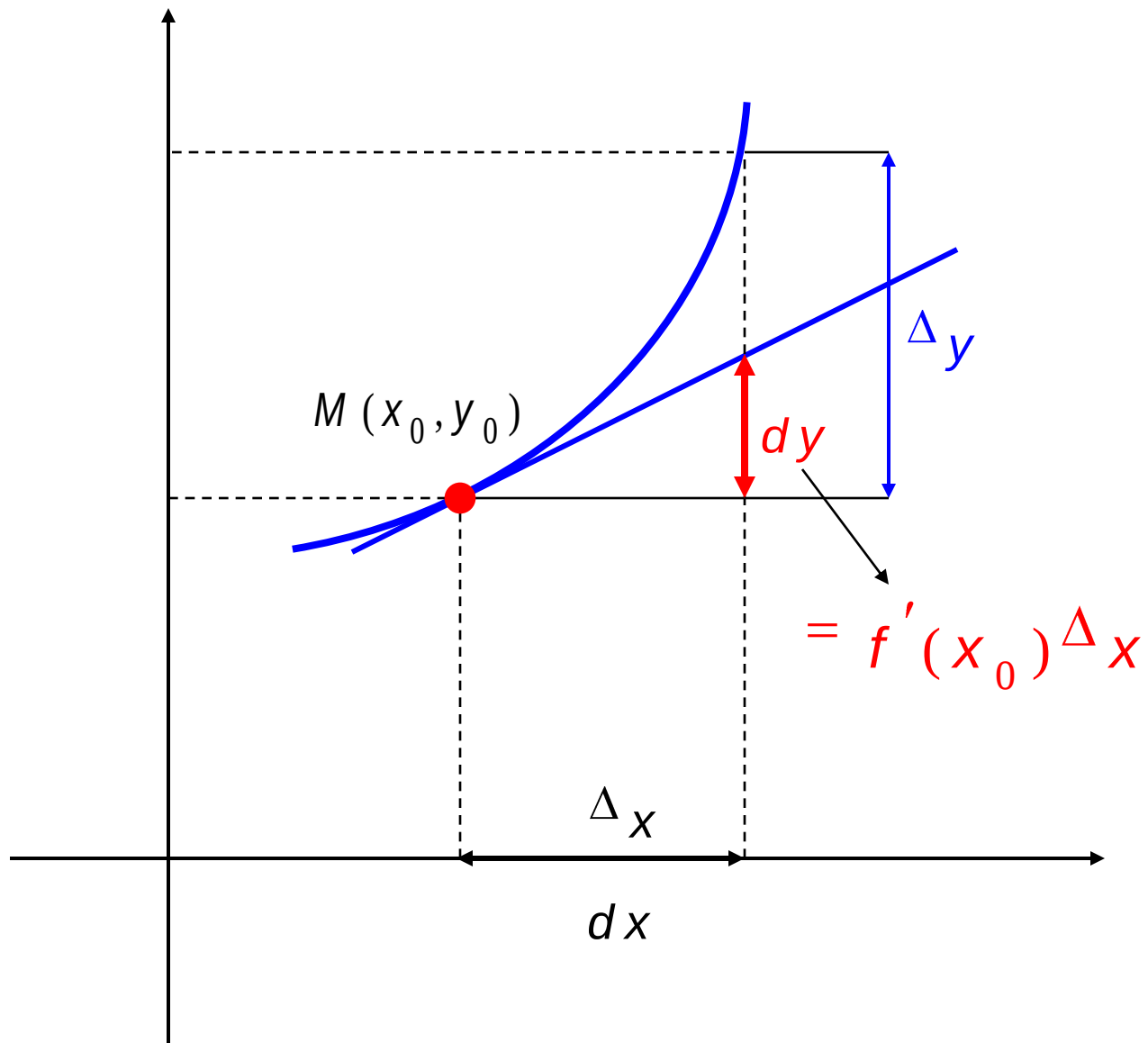
Cho $f(x) = x^2$, chứng minh f khả vi và tìm $df(1)$

$$f(x) - f(1) = x^2 - 1$$

$$= (x - 1)(x + 1)$$

$$= (x - 1)(x - 1 + 2)$$

$$= \underbrace{2(x - 1)}_{df(1)} + \underbrace{(x - 1)^2}_{o(x - 1)}$$



Đạo hàm và vi phân

f khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f$ có đạo hàm tại x_0

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Cách viết thông thường:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Cách viết khác của đạo hàm:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Ví dụ

2. Tìm vi phân của $f(x) = xe^x$ tại $x = 0$

$$df(0) = f'(0).dx$$

$$f'(x) = (x + 1)e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow df(0) = 1.dx = dx$$

2. Tìm vi phân của $f(x) = x \sin x$

$$df(x) = f'(x).dx = (\sin x + x \cos x) dx$$

Các phép tính vi phân

$$d(c.f) = c df, c = \text{const}$$

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f.g) = g df + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - fdg}{g^2}$$

Vi phân hàm hợp

Nếu $y = f(x)$ khả vi theo x (biến độc lập): $dy = f'(x)dx$

Nếu $x = x(t)$, $y = f(x)$ khả vi, $x = x(t)$ khả vi

$\Rightarrow y = f(x(t))$ khả vi theo t (biến độc lập):

$$y'(t) = f(x(t))' = f'(x) \cdot x'(t)$$

$$dy = y'(t)dt = f'(x) \cdot x'(t)dt = f'(x)dx$$

Dù x là biến độc lập hay hàm số, dạng vi phân của y theo x không đổi.

Ví dụ áp dụng

Cho $y = f(x) = \sin(x^2)$,

1. Tính dy theo dx

2. Với $x = x(t) = \arctan(t)$, tính dy theo dt tại $t = 1$

$$1. \quad dy = y'(x)dx = 2x \cos(x^2)dx$$

$$2. \quad y = \sin(x^2) = \sin(\arctan^2 t)$$

$$\begin{aligned} dy &= y'(t)dt = \arctan^2 t' \cos \arctan^2 t dt \\ &= 2 \arctan t \frac{1}{1+t^2} \cos \arctan^2 t dt \end{aligned}$$

Cách khác: dùng vi phân hàm hợp

$$dy = y'(x)dx = 2x \cos(x^2)dx \quad dx = x'(t)dt$$

$$= 2x \cos(x^2) \cdot \arctan t' dt$$

$$= 2x \cos(x^2) \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

Tại $t = 1$, $x = \pi/4$

$$\Rightarrow dy = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi^2}{16}\right) dt$$

VI PHÂN CẤP CAO

1. Nếu x là biến độc lập: $dx = \Delta x$: là hằng số

$$d^2 y = d \, dy = d \, y' dx = y'' dx \, dx = y'' dx^2$$

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

2. Nếu x = x(t): $dx = x' dt$: là hàm số

$$d^2 y = d \, dy = d \, y' dx = d(y') \cdot dx + y' d \, dx$$

$$d^2 y = y'' dx^2 + y' d^2 x$$

Ví dụ

Cho $y = \sin(x)$

1. Tính d^2y theo dx .

2. Nếu $x = \cosh(t)$, tính d^2y theo dt .

$$1. \quad d^2y = y''(x)dx^2 = -\sin x dx^2$$

$$2. \quad y = \sin \cosh t$$

$$d^2y = y''(t)dt^2$$

$$= \left[\cosh t \cos \cosh t - \sinh^2 t \sin \cosh t \right] dt^2$$

$$2. \quad d^2 y = y''(x) dx^2 + y'(x) d^2 x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \cos x, \quad y''(x) = -\sin x \\ dx = \sinh t dt \Rightarrow dx^2 = \sinh^2 t dt^2 \\ d^2 x = \cosh(t) dt^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow d^2 y = -\sin x \cdot \sinh^2 t dt^2 + \cos x \cdot \cosh t dt^2$$

$$= -\sin x \cdot \sinh^2 t + \cos x \cdot \cosh t \quad dt^2$$

Tổng kết.

1. Tính đạo hàm cho 2 loại hàm số ($y = f(x)$, tham số).
2. Nếu x là biến độc lập: tính vi phân là tính đạo hàm
3. Nếu $x = x(t)$ (là hàm số):
 1. Vi phân cấp 1 : $dy = y'(x)dx$, sau đó khai triển dx theo dt
 2. Vi phân cấp 2: $d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$
cuối cùng phải đưa về dt^2 (chỉ tính đến cấp 2)