QUY TẮC L'HOSPITALE

PHÁT BIỂU ĐỊNH LÝ

Định lý 1: Cho f khả vi trong (a, b) thỏa

$i.\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$ (Dạng vđ 0/0)

$ii.\ g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

$iii.\ \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Khi đó: $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

PHÁT BIỂU ĐỊNH LÝ

Định lý 2: Cho f khả vi trong (a, b) thỏa

i. $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \infty$ (Dạng vđ ∞/∞)

ii. $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

iii. $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Khi đó: $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Lưu ý khi áp dụng quy tắc L'H

1. Quy tắc L'hopspitale chỉ áp dụng cho các dạng vô định $\frac{0}{0}$ $và$ $\frac{\infty}{\infty}$
2. Các kết quả trên vẫn đúng nếu thay $x \to a^+$, $x \to x_0$, $x \to \infty$
3. Nếu $\frac{f'}{g'}$ không có giới hạn, không kết luận gì cho $\frac{f}{g}$
4. Kết hợp với VCL và VCB để cho kết quả nhanh hơn.

Ví dụ

$$1/\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3+x^2\sin x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{2x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\tan^2 x)}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right] \qquad \infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\frac{1}{2}$$

$$3\ /\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \qquad \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x) 2x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x) 2x}{x^4}$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$4/\ \lim_{x \to 0^+} x \ln x \qquad 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$$5/A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad 1^{\infty}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$A = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\sin x - x}} \right]^{\frac{\sin x - x}{x^3}}$$

$$\boldsymbol{vì} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow A = e^{-\frac{1}{6}}$$