TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

ĐỊNH NGHĨA

F(x) là nguyên hàm của f(x) trong (a, b) $\Leftrightarrow$ F'(x) = f(x)

$\int f(x)dx = F(x) + C$: tích phân bất định

BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$1/\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$2/\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$3/\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$4/\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$5/\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

$$6/\ \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$7/\ \int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$8/\ \int chx\,dx = shx + C$$

$$9/\ \int shx\,dx = chx + C$$

$$10/\ \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$11/\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cothx + C$$

$$12/\ \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$13/\ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Ví dụ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln 3 + 1} (3e)^x + C$$

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Đổi biến:

Đổi biến 1: $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)\,dt$

$$\int f(x)\,dx = \int f(u(t))u'(t)\,dt$$

Đổi biến 2: $u(x) = t \Rightarrow u'(x)\,dx = dt$

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

2. Tích phân từng phần:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Ví dụ

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$\int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx = \frac{1}{2}\int \arctan \frac{x}{2} d\left(\arctan \frac{x}{2}\right)$$

Một số lưu ý khi dùng tp từng phần

$P_n(x)$ là đa thức bậc n.

$$\left.\begin{aligned} &\int P_n.\ln(\alpha x)dx \\ &\int P_n.\arctan x dx \\ &\int P_n.\arcsin x dx \end{aligned}\right\} \quad dv = P_n dx, \text{ u là phần còn lại}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int P_n.e^{\alpha x}dx \\ &\int P_n.\sin x dx \end{aligned}\right\} \quad u = P_n(x), \text{ } dv \text{ là phần còn lại}$$

Ví dụ

$$I = \int \arcsin x\,dx \qquad \begin{cases} u = \arcsin x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx,\ chon\ \ v = x \end{cases}$$

$$I = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

Nguyên tắc: chuyển về các tích phân cơ bản

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m}, \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$$

Trong đó: * m là các số tự nhiên,

* Các tam thức bậc 2 có $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{1}{1-m}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C}$$ **(m > 1)**

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$$

Đạo hàm của MS (lấy hết ***Ax***)

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

$$= \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a} + C$$

Ví dụ

$$\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \left(\frac{1}{2}-1\right)\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 2.\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + C$$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\boxed{\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{du}{u^n}}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dv}{(v^2+a^2)^n} = I_n}$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{v}{(v^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right]}$$

Chứng minh quy nạp I_n

$$\boxed{I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}}$$

$$u = (x^2+a^2)^{-n} \Rightarrow du = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}dx$$

$$dv = dx,\ \text{chọn}\ v = x$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int x^2(x^2+a^2)^{-n-1}dx$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int (x^2+a^2-a^2)(x^2+a^2)^{-n-1}dx$$

$$= x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int (x^2+a^2)^{-n}dx - 2na^2\int (x^2+a^2)^{-n-1}dx$$

$$I_n = x(x^2+a^2)^{-n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + (2n-1)I_n\right]$$

ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH

Hàm hữu tỷ: $f(x) = \dfrac{p(x)}{(x-a)^m (x-b)^n (x^2+px+q)^r}$

Với đa thức ở tử có bậc nhỏ hơn mẫu và tam thức ở mẫu có $\Delta < 0$, sẽ được phân tích ở dạng

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_n}{(x-b)^n}$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2+px+q)^r}$$

MỘT SỐ VÍ DỤ PHÂN TÍCH

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x-3} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

<u>Tính A</u>: nhân 2 vế với (x-1), sau đó thay x bởi 1

$$\frac{2x-1}{x+3} = A + \frac{B}{x+3}(x-1) \overset{x=1}{\Rightarrow} A = \frac{1}{4}$$

Để tính nhanh, trong biểu thức $\dfrac{2x-1}{(\quad)(\quad)}$

Che (x-1) rồi cho x = 1 ta tìm được A

<u>Tính B</u>: nhân 2 vế với (x+3), sau đó thay x bởi -3

(hoặc che x+3 trong phân thức ban đầu)$\Rightarrow$ B = 7/4

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(\qquad\qquad)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

<u>Tính B</u>: vế trái che $(x-1)^{2}$, sau đó thay x bởi 1

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(} = \frac{A}{x - 1} + \frac{1/4}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3}$$

Tính B: vế trái che $(x-1)^2$, sau đó thay x bởi 1

Tính C: vế trái che (x + 3), thay x bởi -3

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x-1)^2(\quad} = \frac{A}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{-7/16}{x+3}$$

Tính B: vế trái che $(x-1)^2$, sau đó thay x bởi 1

Tính C: vế trái che (x + 3), thay x bởi -3

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{-7/16}{x+3}$$

Tính B: vế trái che $(x-1)^2$, sau đó thay x bởi 1

Tính C: vế trái che (x + 3), thay x bởi -3

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \to \infty$

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1/4}{(x-1)^2} + \frac{-7/16}{x+3}$$

Tính B: vế trái che $(x-1)^2$, sau đó thay x bởi 1

Tính C: vế trái che (x + 3), thay x bởi -3

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \to \infty$

$$0 = A + 0 - \frac{7}{16} \Rightarrow A = \frac{7}{16}$$

Sử dụng nguyên tắc chung

Quy đồng mẫu số và đồng nhất tử số 2 vế

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2+x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$2x-1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow\ 2x-1 = (A+B)x^2 + (A+3B+C)x + A+3C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+3B+C=2 \\ A+3C=-1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}$$

Ví dụ tính tích phân

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+3)}dx$$

$$= \int \frac{7/16}{x-1}dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-7/16}{x+3}dx$$

$$= \frac{7}{16}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{7}{16}\ln|x+3| + C$$

$$\int \frac{2x-1}{(x^2+x+1)(x+3)}dx = \int \frac{-dx}{x+3} + \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$$

$$= -\ln|x+3| + \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= -\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}+C$$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}} \right)$$

trong đó m_1, n_1, m_2, n_2 là các số nguyên.

Phương pháp chung: đặt

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

n là BSCNN(n_1, n_2)

Ví dụ

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2 + x}}{\sqrt{x+1}} dx \qquad \frac{m_1}{n_1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{1}{2}$$

$$BSCNN(n_1, n_2) = 6$$

$$t^6 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 6t^5 dt$$

$$I = \int \frac{t^4 + t^6 - 1}{t^3} 6t^5 dt \quad = 6\int \left(t^6 + t^8 - t^2 \right) dt$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$$

$$t^3 = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \Rightarrow dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}$$

$$I = -6 \int t \frac{1}{\frac{t^3+1}{t^3-1}+1} \frac{t^2 dt}{(t^3-1)^2} = -3 \int \frac{dt}{t^3-1}$$

$$I = -3\int \frac{dt}{t^3 - 1} = -3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt$$

Các trường hợp riêng của tích phân Eurler

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

Nguyên tắc chung: đưa về bình phương đúng của các tam thức dưới căn và áp dụng tp bảng.

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Tương tự cho trường hợp còn lại.

Ví dụ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9} - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - u^2}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3}{2} u + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C$$

Ví dụ

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}$$

$$= \frac{-1}{6}\int \frac{(-6x+2)dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+2x+1}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{-3x^2+2x+1} + \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right) + C$$

ĐỔI BIẾN LƯỢNG GIÁC

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

Sau khi đưa tam thức bậc 2 về bình phương đúng, có thể rơi vào các TH sau:

$$\int R(u, \sqrt{A^2 - u^2})\,du$$ $\Rightarrow$ Đặt u = Asint

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - A^2})\,du$$ $\Rightarrow$ Đặt u = A/sint

$$\int R(u, \sqrt{u^2 + A^2})\,du$$ $\Rightarrow$ Đặt u = Atant

Lưu ý

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}}$$

Đặt x – k = 1/u sẽ đưa về dạng

$$\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a'u^2+b'u+c'}}$$

Ví dụ

$$I = \int \sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3}\,dx = \int \sqrt{\left[(x+2)^2 + 1\right]^3}\,dx$$

$$I = \int \sqrt{(u^2 + 1)^3}\,du$$

Đặt u = tant

$$I = \int \sqrt{(\tan^2 t + 1)^3}\,\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^5 t} = \int \frac{\cos t\,dt}{(1 - \sin^2 t)^3} = \int \frac{dv}{(1 - v^2)^3}$$

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x}}$$

$$t = \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{dx}{(x-1)^2}, \qquad x = 1 + \frac{1}{t}$$

$$I = \int \frac{-dt}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{t}\right)}} = \int \frac{-t\,dt}{\sqrt{2t^2+3t+1}}$$

TÍCH PHÂN TREBUSEV

$$\boxed{\int x^{m}(ax^{n}+b)^{p}dx}$$

m,n, p là các sô hữu tỷ

TH 1: *p* là số nguyên : Đặt $x = t^k$,

k là BSCNN mẫu số của m, n.

TH 2: $\dfrac{m+1}{n}$ là số nguyên: Đặt $ax^n + b = t^k$, k là mẫu số của p

TH 2: $\dfrac{m+1}{n} + p$ là số nguyên: Đặt $bx^{-n} + a = t^k$, k là mẫu số của p

VÍ DỤ

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$m = -1, n = 1, p = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{m+1}{n} = 0 \Rightarrow x + 1 = t^3$$

$$I = \int \frac{3t^2}{(t^3-1)t^2}dt$$

$$= 3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{(t+2)dt}{t^2+t+1}$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

Đặt $x^{-2}+1 = t^2 \Rightarrow -2x^{-3}dx = 2tdt$

$$I = \int \frac{-2dx}{x^3x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \int \frac{2t(t^2-1)dt}{t} = 2\int (t^2-1)dt$$

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

$$\boxed{I = \int \sin^m x \cos^n x \, dx}$$

* m =2k + 1 $\quad I = -\int \sin^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x)$

* n =2k + 1 $\quad I = \int \sin^m x \cos^{2k} x \, d(\sin x)$

* m, n chẵn: dùng công thức hạ bậc

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

$$\boxed{\int R(\cos x, \sin x)dx}$$

Thay x bởi –x, biểu thức dưới dấu tp không đổi

$$\Rightarrow t = \cos x$$

Thay x bởi π–x, biểu thức dưới dấu tp không đổi

$$\Rightarrow t = \sin x$$

Thay x bởi π+x, biểu thức dưới dấu tp không đổi

$$\Rightarrow t = \tan x$$

Tổng quát: $\Rightarrow t = \tan \frac{x}{2}$

VÍ DỤ

$$I = \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \, d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, d(\cos x)$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$$

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x + 2\sin x} dx$$

Thay x bởi π - x trong biểu thức dưới dấu tp

$$\frac{\cos^3(\pi - x)}{\cos^2(\pi - x) + 2\sin(\pi - x)} d(\pi - x)$$

$$= \frac{-\cos^3 x}{\cos^2 x + 2\sin x}(-dx)$$

$$= \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x + 2\sin x} dx$$

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x + 2\sin x} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x \; dx}{1 - \sin^2 x + 2\sin x}$$

Đặt t = sinx

$$= \int \frac{1 - t^2}{1 - t^2 + 2t} dt$$

$$= \int \left(1 - \frac{2t}{1 - t^2 + 2t} \right) dt$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$$

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2})dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 3}$$

Một dạng đặc biệt của tp hàm lượng giác

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{a'\sin x + b'\cos x + c'}dx$$

Biểu diễn

TỬ SỐ = A$\times$ (đạo hàm mẫu số) + B$\times$(MẪU SỐ) +C

Tìm A, B, C bằng đồng nhất thức.

Ví dụ

$$I = \int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3}\,dx$$

$$\sin x + 2\cos x - 3$$

$$= A(\sin x - 2\cos x + 3)' + B(\sin x - 2\cos x + 3) + C$$

$$\Leftrightarrow \sin x + 2\cos x - 3$$

$$= A(\cos x + 2\sin x) + B(\sin x - 2\cos x + 3) + C$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{3}{5},\ C = -\frac{6}{5}$$

$$I = \frac{4}{5}\int \frac{d(\sin x - 2\cos x + 3)}{\sin x - 2\cos x + 3} - \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}$$

$$\frac{4}{5}\ln\left|\sin x - 2\cos x + 3\right|$$

$$t = \tan\frac{x}{2}$$