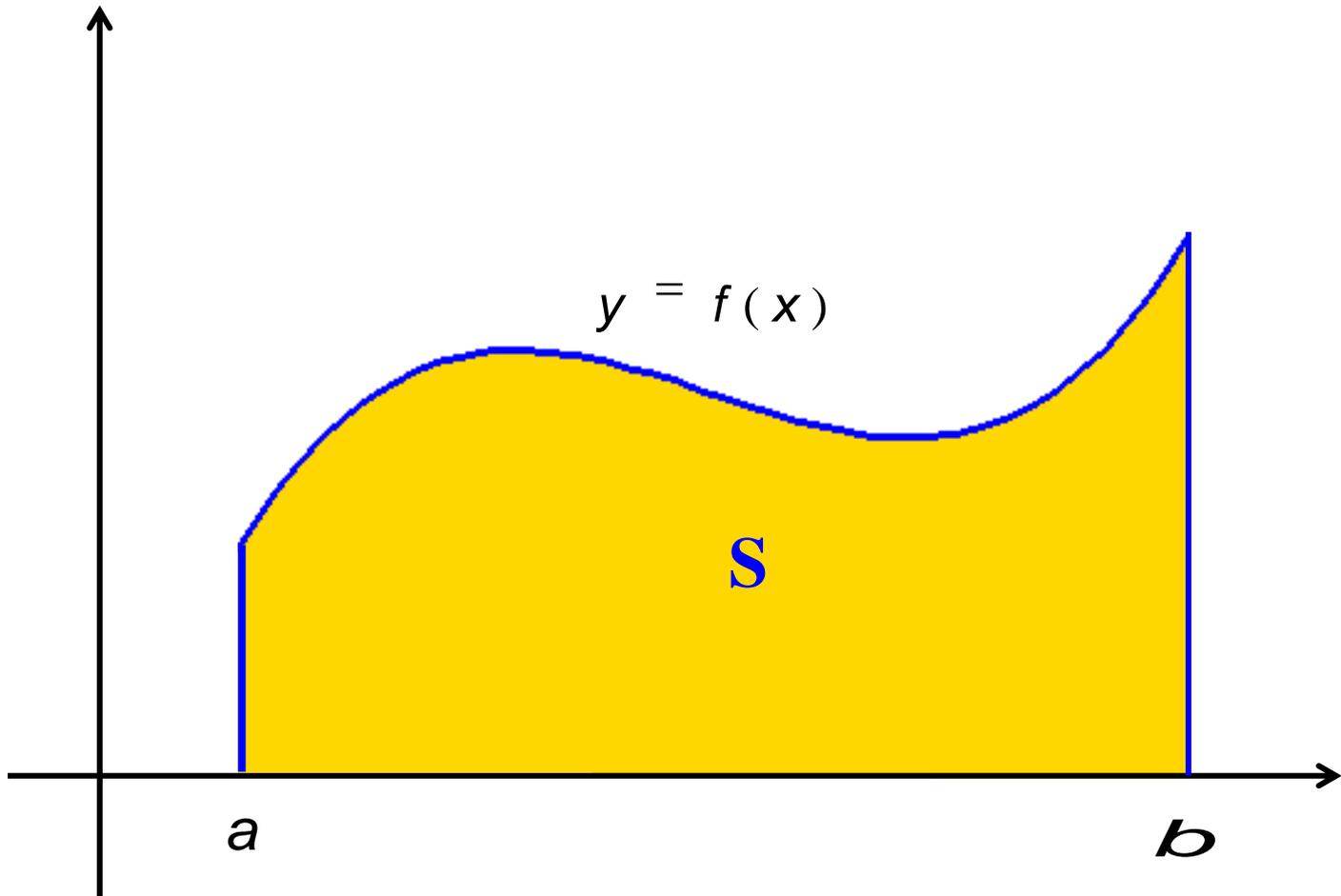
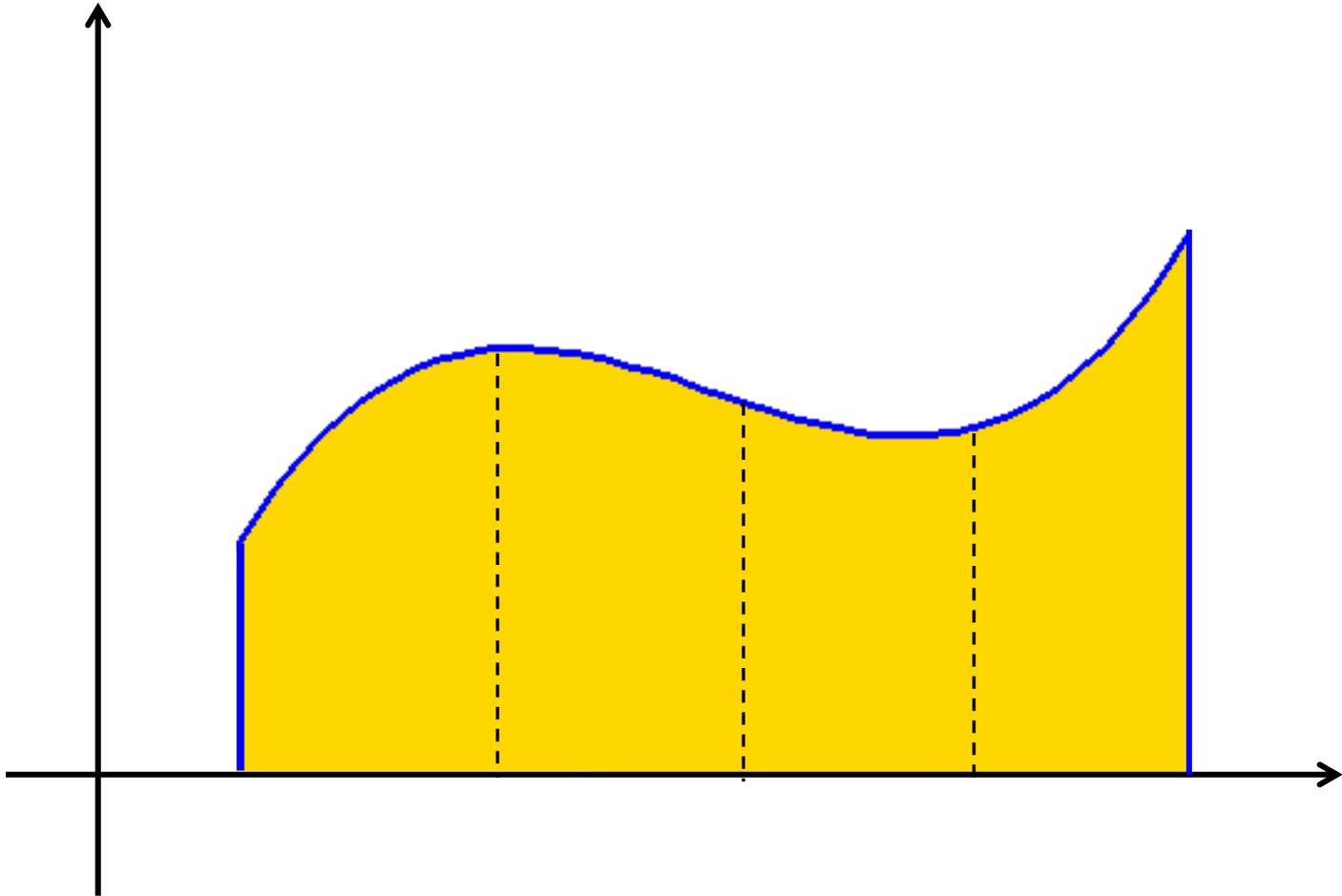


# TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

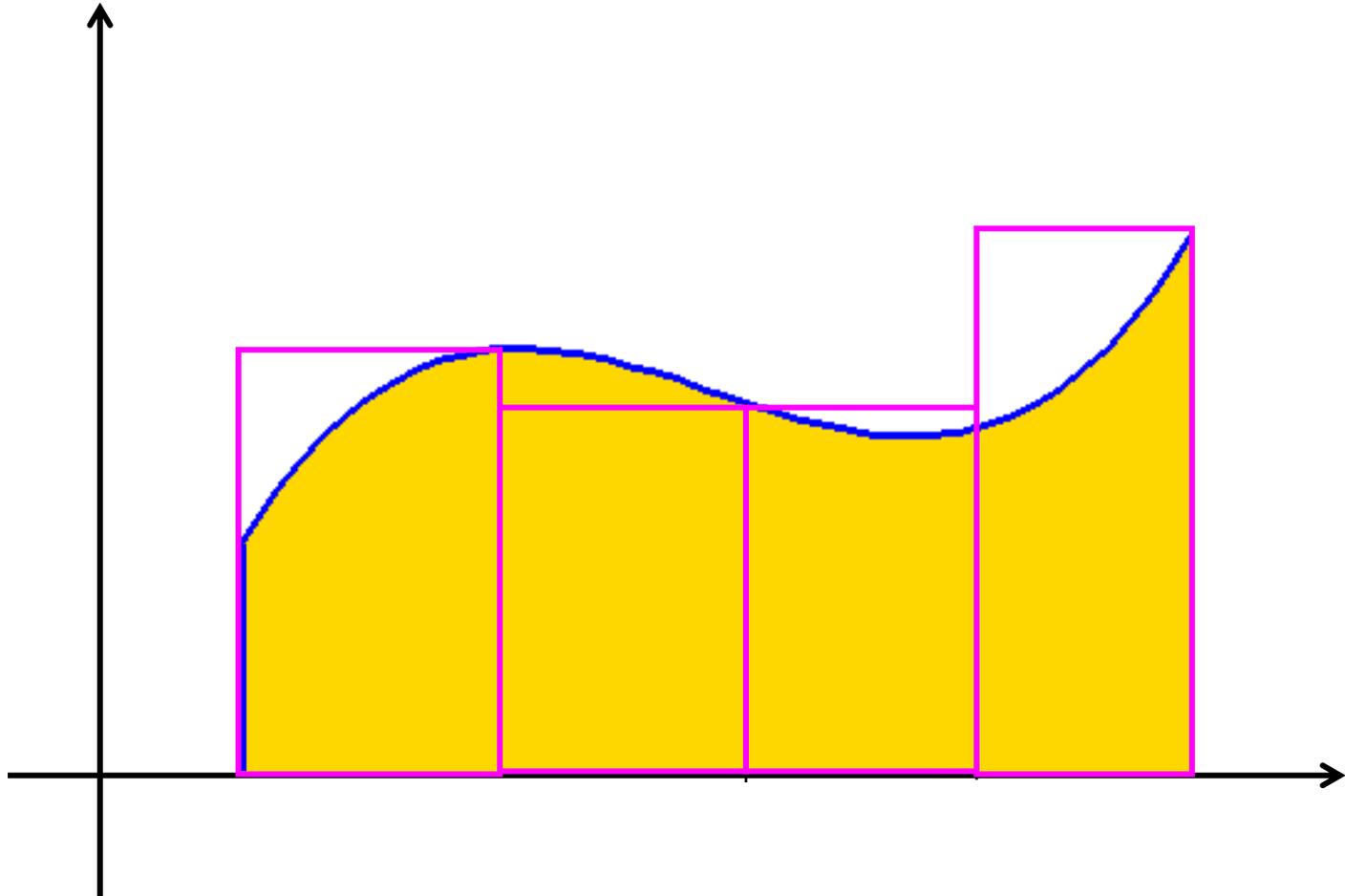
# Bài toán diện tích



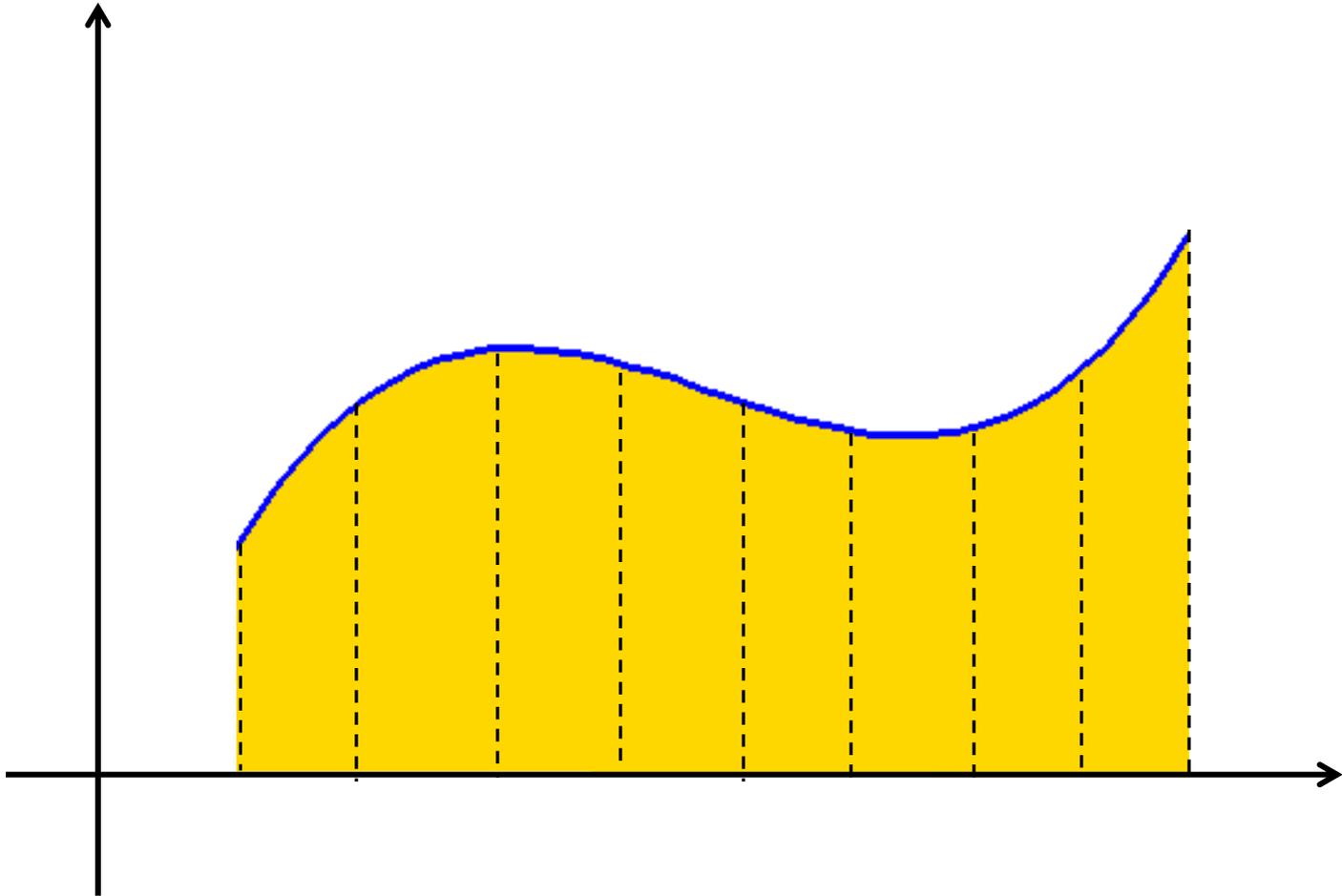
# Chia S thành nhiều diện tích con



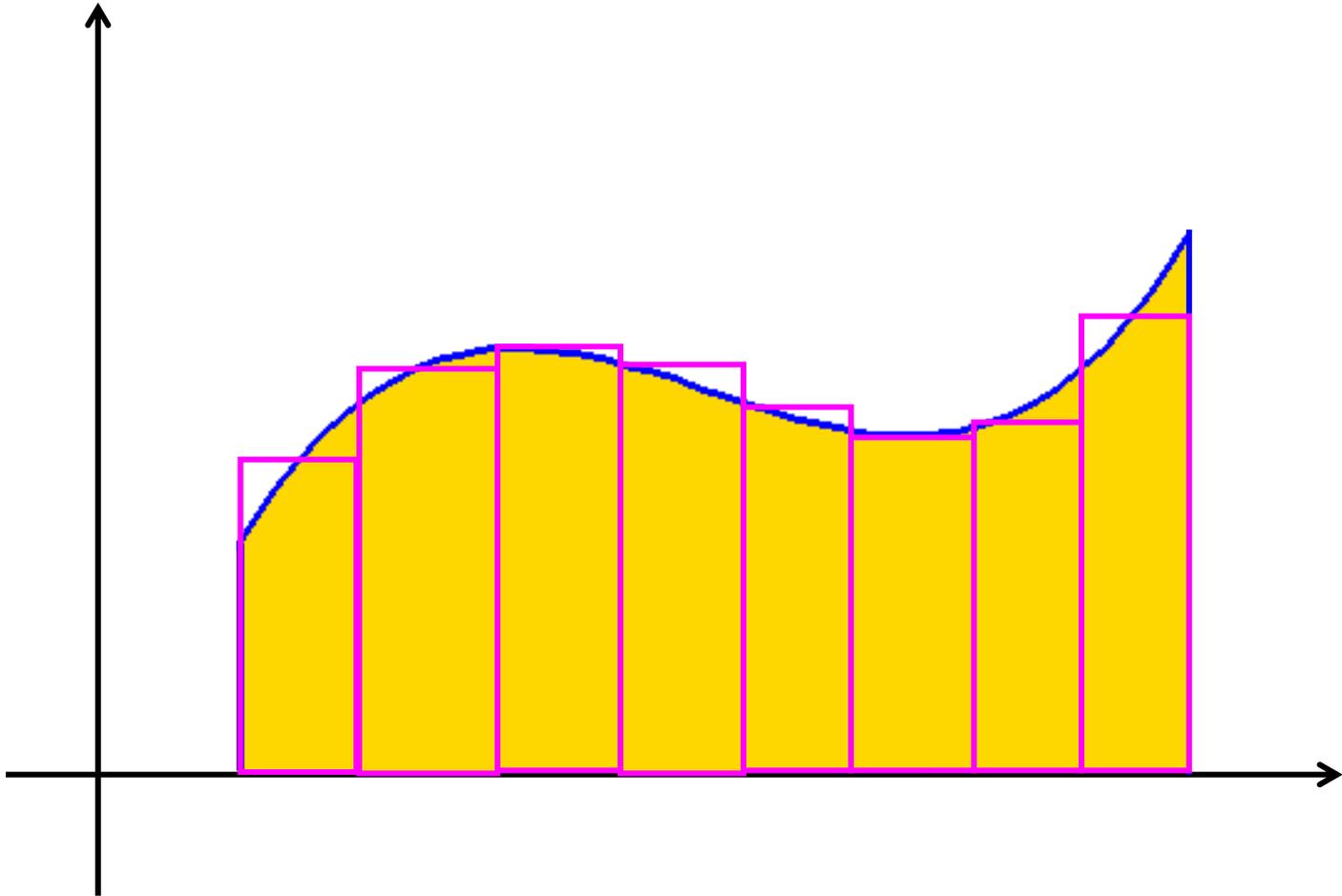
# Xấp xỉ các diện tích con bằng diện tích các hình chữ nhật con



# Chia S càng nhỏ



# Tổng diện tích xấp xỉ càng gần $S$



# ĐỊNH NGHĨA

Phân hoạch  $P$  của  $[a, b]$  là tập hợp các điểm chia của  $[a, b]$  thỏa mãn  $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$

$d = \max\{(x_{i+1} - x_i) / i = 0, \dots, n-1\}$ : đường kính phân hoạch

Xét hàm số  $f(x)$  xác định trên  $[a, b]$ ,  $P$  là 1 phân hoạch của  $[a, b]$ .

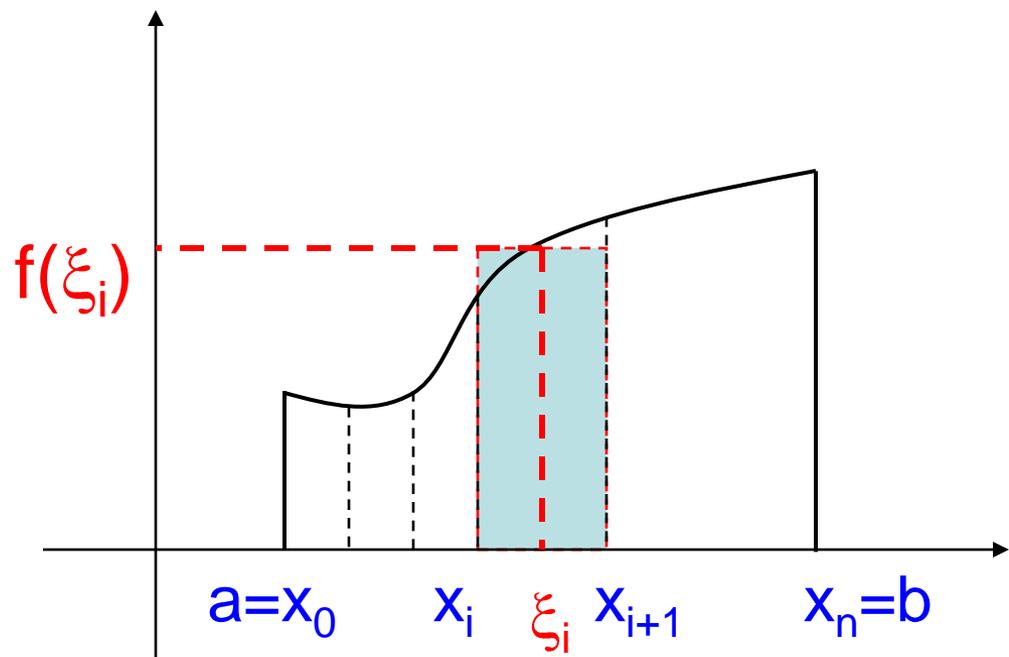
Trên  $[x_i, x_{i+1}]$  chọn  $\xi_i$  tùy ý, đặt

$$S(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Tổng tích phân ứng với phân hoạch  $P$

$$S(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

**f khả tích**  $\Leftrightarrow$  tồn tại  
giới hạn hữu hạn của  
 $S(P, f)$  khi  $d \rightarrow 0$   
(không phụ thuộc  $P$ )

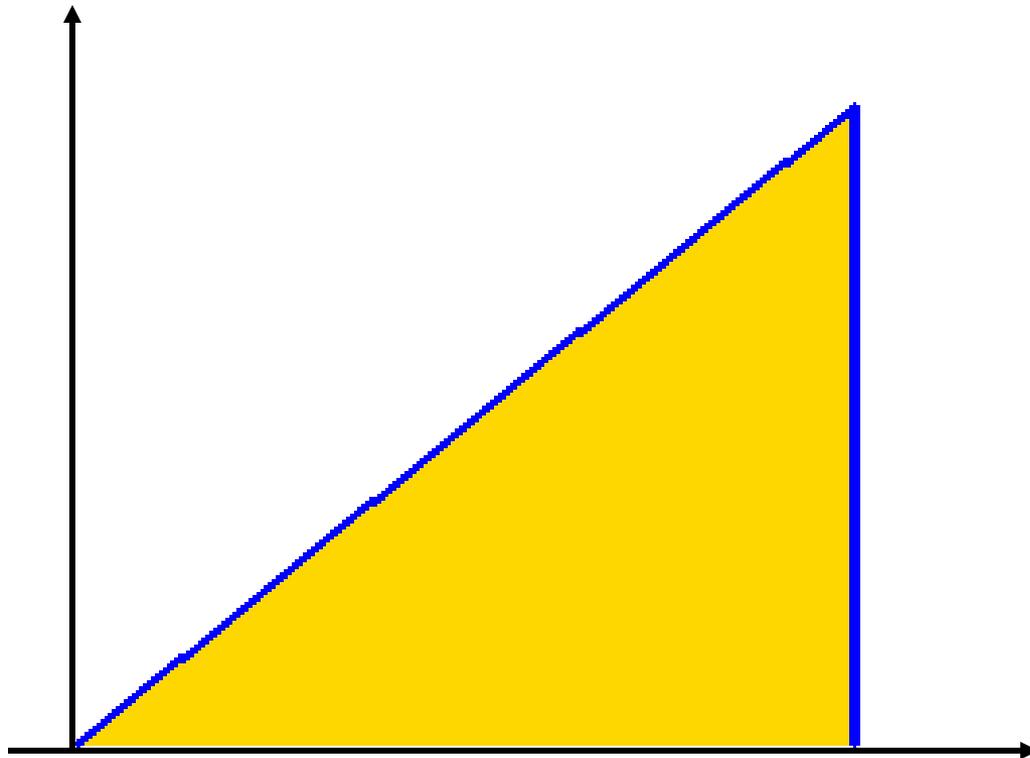


$$\lim_{d \rightarrow 0} S(P, f) = \int_a^b f(x) dx$$

## Ví dụ về tổng tích phân

Cho  $f(x) = x$  trên  $[0, 1]$ , phân hoạch đều  $[0, 1]$  thành  $n$  đoạn bằng nhau bởi các điểm  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ .

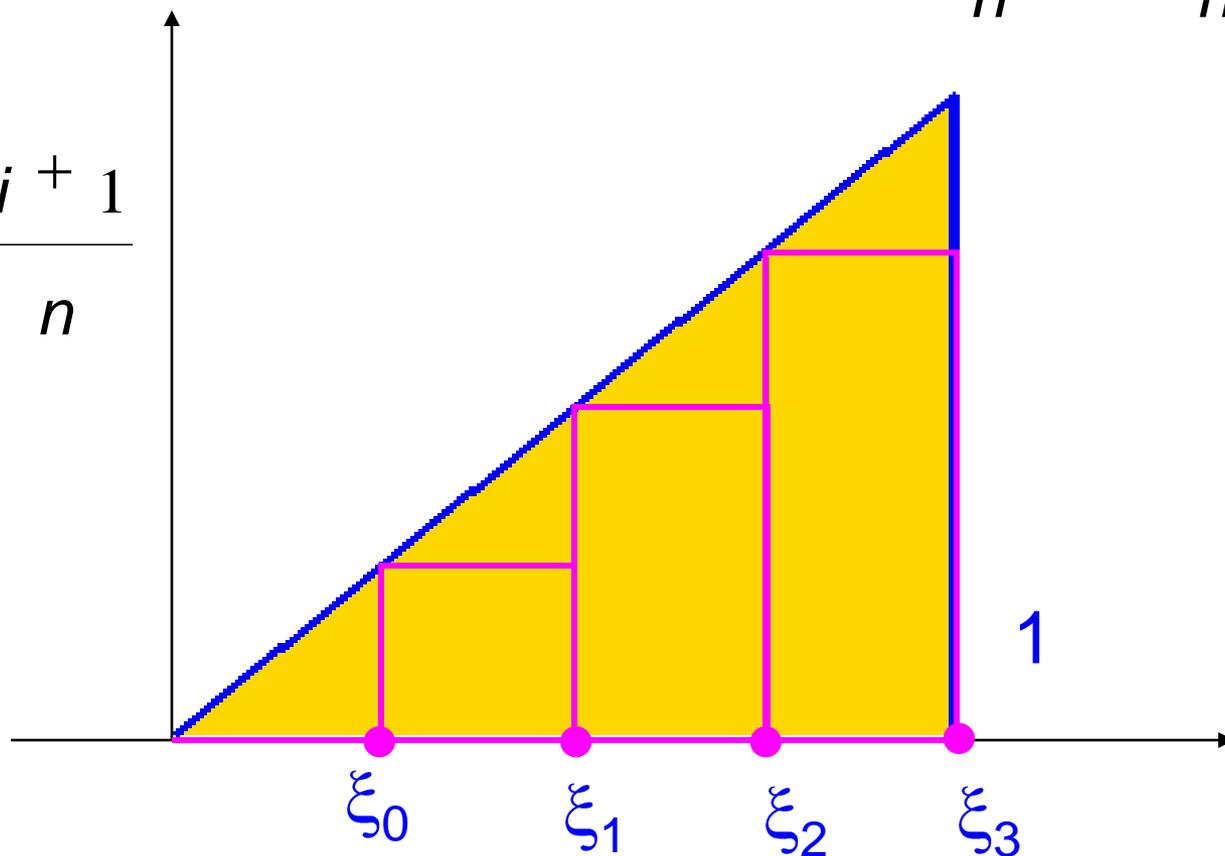
Tìm tổng tích phân nếu:  $\xi_i = x_{i+1}$



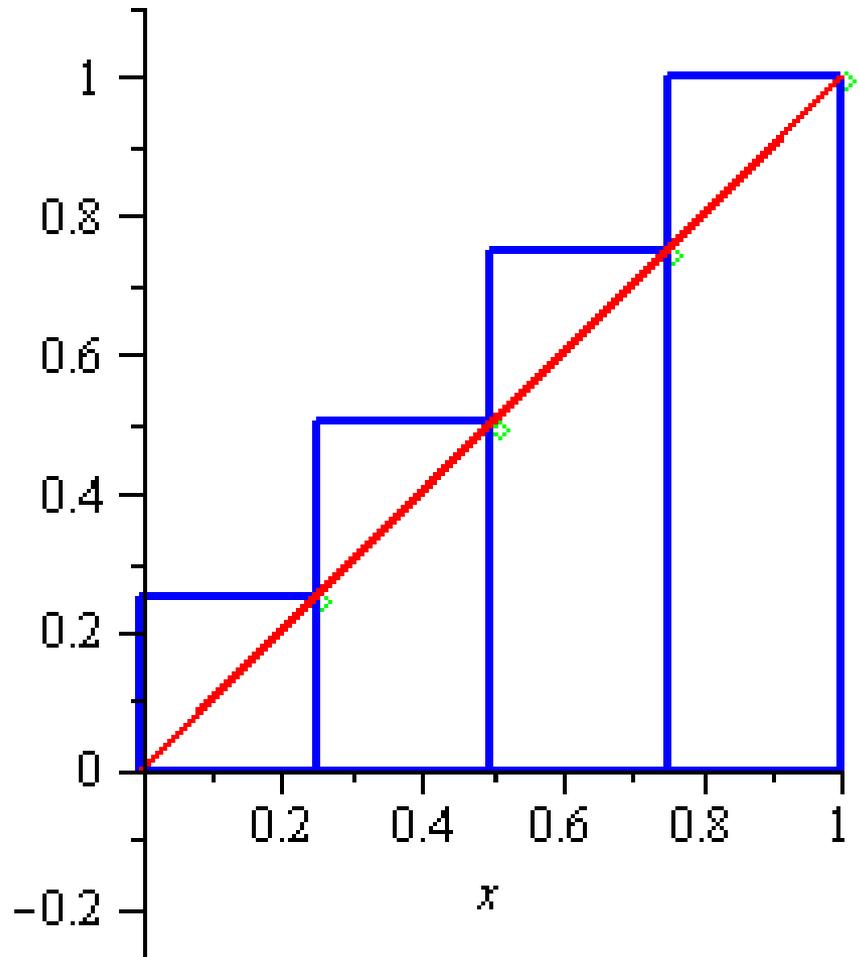
$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n} \Rightarrow d = \frac{1}{n},$$

$$\xi_i = x_{i+1} = 0 + (i+1) \frac{1}{n} = \frac{(i+1)}{n},$$

$$f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i+1}{n}$$

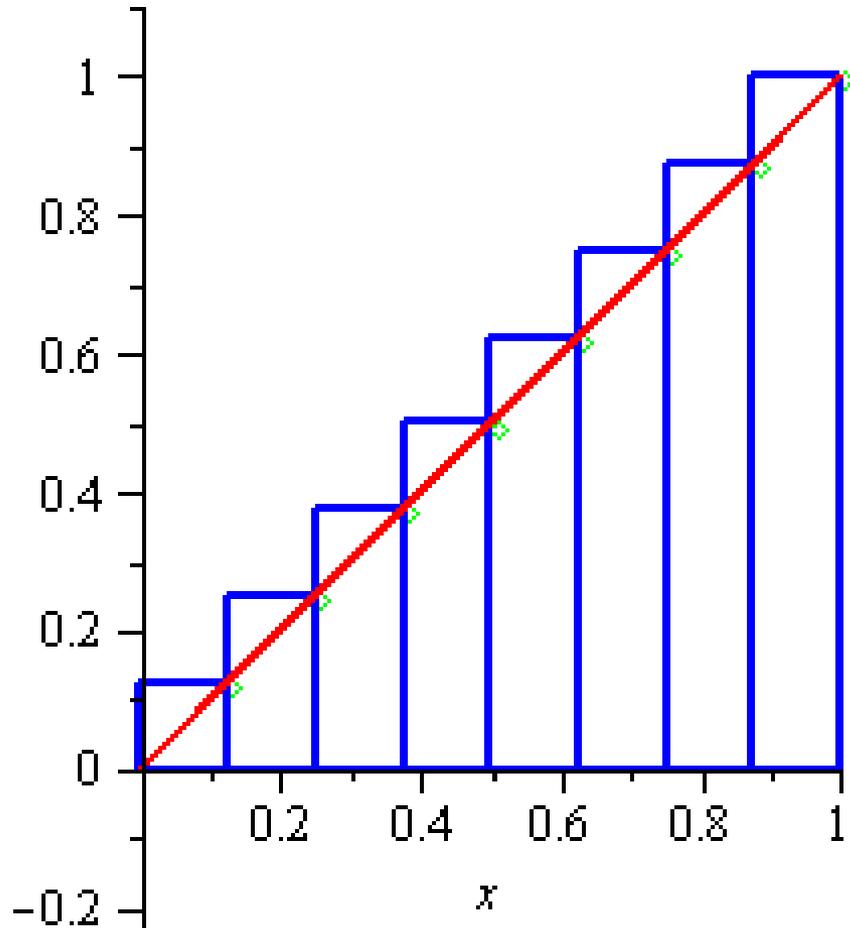


An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = x$   
on the Interval  $[0, 1]$   
Using a Right-endpoint Riemann Sum  
Area: .6250000000



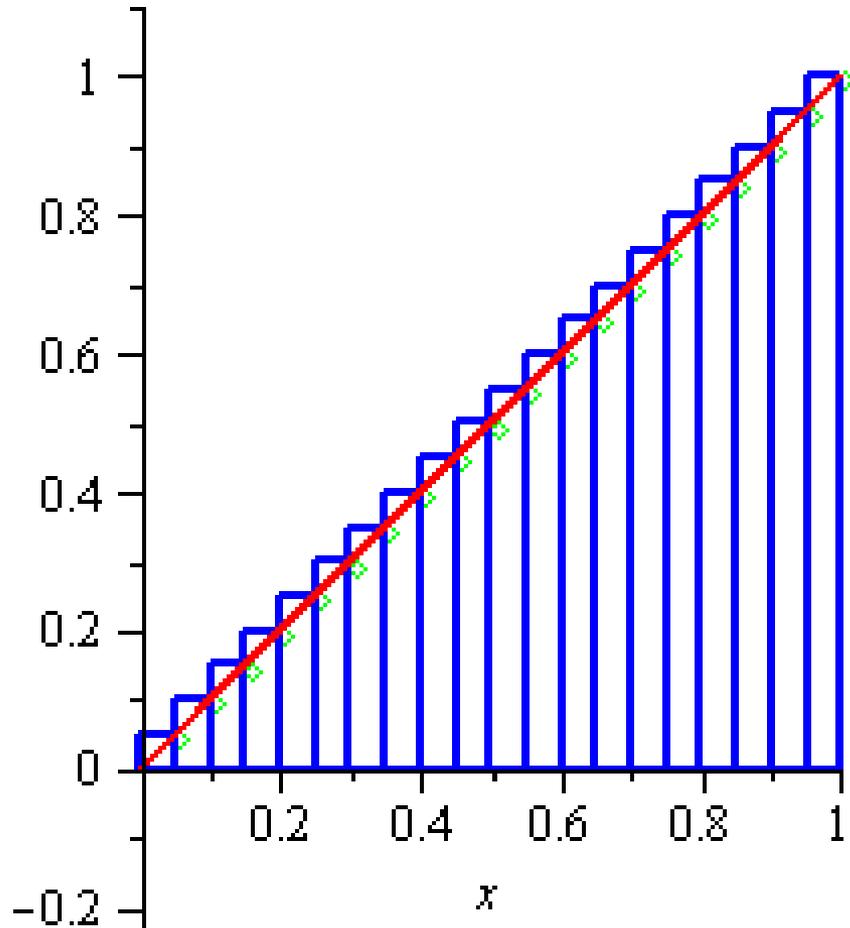
An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = x$   
on the Interval  $[0, 1]$

Using a Right-endpoint Riemann Sum  
Area: .5625000000



An Approximation of the Integral of  
 $f(x) = x$   
on the Interval  $[0, 1]$

Using a Right-endpoint Riemann Sum  
Area: .5250000000



$$S(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)}{n} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{1}{n^2} [1 + \dots + n]$$

$$= \frac{(n+1)n}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$d \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

# Điều kiện để $f$ khả tích trên $[a, b]$

Hàm  $f$  liên tục trên  $[a, b]$  ngoại trừ 1 số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 thì khả tích trên  $[a, b]$ .

( Khi đó  $\int_a^b f(x) dx$  là tích phân xác định.)

Ví dụ:  $\int_{-1}^2 \frac{\sin x}{x} dx$  là tpxđ vì  $x = 0$  là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 x \ln x dx$  là tpxđ vì  $x = 0$  là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 \ln x dx$  **không** là tpxđ vì  $x = 0$  là điểm gđ loại 2.

# Tính chất hàm khả tích

1.  $f$  khả tích trên  $[a, b]$  thì  $f$  bị chặn trên  $[a, b]$
2.  $f$  khả tích trên  $[a, b]$  thì  $|f|$  khả tích trên  $[a, b]$
3.  $f$  khả tích trên  $[a, b]$ ,  $m$  và  $M$  lần lượt là gtnn và gtlđ của  $f$  trên  $[a, b]$ , khi đó

$$* \quad m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$* \quad f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

# Tính chất hàm khả tích

---

$$4. \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^a f(x)dx = 0 \quad 6. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$7. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

# Tính chất hàm khả tích

---

$$8. \int_a^b dx = b - a$$

$$10. f(x) \text{ tuần hoàn với chu kỳ } T: \int_a^b f(x) dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx$$

$$11. f \text{ lẻ trên } [-a, a]: \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$f \text{ chẵn trên } [-a, a] \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

# Định lý giá trị trung bình

f liên tục trên  $[a,b]$ , khi đó tồn tại  $c \in [a,b]$  sao cho

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

Áp dụng: tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2} dx$

hàm  $e^{t^2}$  liên tục trên  $[0, x]$ , theo định lý, tồn tại  $c \in [0, x]$  sao cho

$$\int_0^x e^{t^2} dx = (x - 0) e^{c^2} > x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

# Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân

\* Nếu  $f$  khả tích trên  $[a,b]$  thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{liên tục trên } [a,b]$$

\* Nếu  $f$  liên tục trên  $[a,b]$  thì  $F$  khả vi trên  $[a,b]$  và

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{Đạo hàm theo cận trên}$$

Hệ quả:  $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$   $f$  liên tục,  $\varphi$  và  $\psi$  khả vi

$$F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

# Ví dụ

1/ Tính đạo hàm của  $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \ln(1+t^2) dt$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(1+(x^2+1)) - 2x \cdot \ln(1+x^4)$$

2/ Tìm cực trị của  $f(x)$  trong  $(0, 1)$

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2+t+1} dt$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1} \quad \text{đổi dấu khi đi qua } x = 1/2 \in (0, 1)$$

### 3/ Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$$

Theo vd phần định lý giá trị trung bình

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2} dx = +\infty$$

Vậy gh trên có dạng VĐ 0/0, áp dụng qtắc L'H

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 2x \int_0^x e^{t^2} dt \right)'}{e^{x^2}'}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 2x \int_0^x e^{t^2} dt \right)'}{e^{x^2}'} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt + 2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt + xe^{x^2} \right)'}{xe^{x^2}'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt + x e^{x^2} \right)'}{x e^{x^2}'} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} = 1
\end{aligned}$$

# Công thức Newton-Leibnitz

$f$  liên tục trên  $[a, b]$ ,  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

# Phương pháp đổi biến số

- Nếu  $f$  liên tục trên  $[a, b]$
- $x = u(t)$  thỏa  $u(t)$  và  $u'(t)$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$
- $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt$$

# PP tích phân từng phần

Nếu  $u(x)$ ,  $v(x)$  cùng các đạo hàm liên tục trên  $[a, b]$

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$$

## Ví dụ

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 9} \right| \Big|_3^4$$
$$= \ln 9 - \ln(3 + 3\sqrt{2}) = \ln \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$$

## Ví dụ

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \quad \sqrt{x} = t$$

$$I = \int_0^2 \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt$$

$$= 2 \left[ t - \ln(1 + t) \right]_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

# Một tích phân cần nhớ

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x dx \end{cases}$$

$$I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\begin{cases} I_{2n} = \frac{(2n-1)!! \pi}{(2n)!! \cdot 2} \\ I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{cases}$$