TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Tích phân suy rộng loại 1

(cận vô hạn)

Cho f(x) khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

gọi là tích phân suy rộng loại 1 của f trên [a, +∞)

Nếu giới hạn tồn tại hữu hạn ta nói tích phân hội tụ, ngược lại ta nói tích phân phân kỳ.

Giới hạn trên còn được gọi là giá trị của tpsr.

Nhận dạng tpsr loại 1

Nếu f(x) liên tục trên [a, +∞) hoặc chỉ có hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 trên [a, +∞) thì

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 1

VD: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ $\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ là tpsr loại 1

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sin x}dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+2x-3}dx$

không là tpsr loại 1

ĐỊNH NGHĨA

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Lưu ý: tích phân vế trái hội tụ khi và chỉ khi các tp vế phải hội tụ.

(chỉ cần 1 tp vế phải phân kỳ là tp vế trái phân kỳ, không cần biết tp còn lại)

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ và tính giá trị nếu tính phân hội tụ

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}}$$

$$\varphi(b) = \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^b = \arctan b$$

$$\xrightarrow{b \to +\infty} \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \cos x\,dx}$$

$$\varphi(b) = \int_0^b \cos x\,dx = \sin b$$

Không có gh khi b $\to +\infty$

$\Rightarrow$ Phân kỳ

$$\boxed{I = \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$\varphi(b) = \int_e^b \frac{\ln x}{x} = \int_1^{\ln b} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln^2 b - 1\right]$$

$$\xrightarrow{b \to +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow$ Phân kỳ

Tính chất của tích phân suy rộng

1. f khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a. Khi đó $\forall$ α > a

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{và} \quad \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ (cùng bản chất)

Tính chất của tích phân suy rộng

2. f khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a. Khi đó $\forall$ $\alpha \neq 0$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{và} \quad \int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ (cùng bản chất)

Tính chất của tích phân suy rộng

3. f, g khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a.

* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f+g)\,dx$ hội tụ

* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f+g)\,dx$ phân kỳ

Công thức Newton-Leibnitz

f khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a, F là nguyên hàm của f trên [a, +∞), khi đó

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)}$$

trong đó $\boxed{F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x)}$

Lưu ý: các phương pháp tính tích phân xác định vẫn sử dụng được cho tp suy rộng.

Ví dụ

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+x+1)}dx = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

cuu duong than cong . com

$$= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 2\frac{(x+1/2)}{\sqrt{3}}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln \; x^2 + x + 1 \; + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan 2\frac{(x + 1/2)}{\sqrt{3}} \right]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan 2\frac{(x + 1/2)}{\sqrt{3}} \right]_1^{+\infty}$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}.\arctan(+\infty) - \left(\ln \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln 3$$

Ví dụ

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan t} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ví dụ

$$\int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

$$= \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty} = 1$$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Cho f(x) không âm và khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a. Khi đó

$$\varphi(b) = \int_a^b f(x)dx$$ là hàm tăng theo biến b.

$\Rightarrow$ φ(b) hội tụ khi và chỉ khi φ(b) bị chặn trên.

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho f(x), g(x) không âm và khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a

Nếu $f(x) \leq kg(x), \quad \forall x \geq \alpha \geq a$

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho f(x), g(x) không âm và khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a

Đặt $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

- $0 \neq k \neq \infty$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ Cùng hội tụ hoặc phân kỳ
- k = 0 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ
- k = ∞ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh tiêu chuẩn so sánh 1

$f(x) \le kg(x) \Leftrightarrow \varphi_f(b) \le k\varphi_g(b)$

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \varphi_g(b)$ bị chặn trên

$\Rightarrow \varphi_f(b)$ bị chặn trên

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Chứng minh tiêu chuẩn so sánh 1

$$f(x) \le kg(x) \Leftrightarrow \varphi_f(b) \le k\varphi_g(b)$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \varphi_f(b)$ không bị chặn trên

$\Rightarrow \varphi_g(b)$ không bị chặn trên

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Chứng minh tiêu chuẩn so sánh 2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0, \infty$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \frac{K}{2}, \forall x > \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{K}{2} g(x) < f(x) < \frac{3K}{2} g(x), \forall x > \alpha$$

$\Rightarrow$ Kết luận như tiêu chuẩn so sánh 1

Chứng minh tiêu chuẩn so sánh 2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < 1, \forall x > \alpha$$

$$\Rightarrow f(x) < g(x), \forall x > \alpha$$

$\Rightarrow$ Kết luận như tiêu chuẩn so sánh 1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Lưu ý: tiêu chuẩn so sánh 2 dùng được cho hàm âm

Tích phân cơ bản

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{với} \quad a > 0$$

Hội tụ $\Leftrightarrow \alpha > 1$

(Nghĩa là: $\alpha > 1$ thì tp hội tụ, $\alpha \le 1$ thì tp phân kỳ)

Chứng minh:

$$\varphi(b) = \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln b - \ln a, \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}\left(\dfrac{1}{b^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right), \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Nguyên tắc khảo sát sự hội tụ

1. Kiểm tra loại tpsr (tính liên tục của hàm f(x) lấy tp).
2. Nếu hàm f(x) liên tục, cố gắng so sánh với tp cơ bản (thường dùng tiêu chuẩn so sánh 2, bằng phép thay tương đương VCB và VCL).
3. Nếu f có vài điểm gián đoạn loại 1, hoặc thay đổi dấu trên 1 đoạn nhỏ, ngắt bỏ đoạn có chứa các điểm gián đoạn hoặc thay đổi dấu, trên đoạn còn lại làm giống bước 2.
4. Nếu f(x) đổi dấu xét $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+3x+2}dx$

Hàm dưới dấu tp liên tục trên [1, +∞), đây là tpsr loại 1.

$$0 \le f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x+2}, \forall x \in [1, +\infty)$$

Cách 1: $f(x) < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên *I* hội tụ

Cách 2:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3+3x+2} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \textbf{\textit{khi}}\ x \to +\infty$$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^3+3x+2} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^3-x^2}{x^3+3x+2} \xrightarrow{x \to +\infty} 1$$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ cùng bản chất với $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_0^{+\infty} \frac{x - 1}{x^3 + 3x + 2} dx$

Hàm dưới dấu tp liên tục trên [0, +∞), đây là tpsr loại 1

Lưu ý: 1. Hàm dưới dấu tích phân thay đổi dấu.

2. Không thể so sánh I với $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

3. I cùng bản chất với $J = \int_1^{+\infty} \frac{x - 1}{x^3 + 3x + 2} dx$

$\Rightarrow$ I hội tụ

Tính chất của tích phân suy rộng

1. f khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a. Khi đó $\forall$ α > a

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{và} \quad \int_\alpha^{+\infty} f(x)\,dx$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ (cùng bản chất)

$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)dx}$$

Tiêu chuẩn so sánh 2 dùng được cho hàm âm.

$$x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) < 0, \forall x \in [1, +\infty)$$

$$f(x) = x\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) \sim x\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x}$$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) \xrightarrow{x \to +\infty} -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) \xrightarrow{x \to +\infty} -\frac{1}{2}$$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng bản chất với $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

Vậy *I* phân kỳ.

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \right) dx$$

Khai triển Maclaurin cho f theo u = 1/x trong lân cận ∞

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}.\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \sim \frac{1}{6}.\frac{1}{x^3}$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{x^3}, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{1}{6}$

I cùng bản chất với $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$: hội tụ

Tìm tất cả các giá trị của α để tp sau hội tụ.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2x + 3}{(4 + x^{\alpha})\sqrt[3]{x^4 + 1}}\,dx$$

1. f(x) liên tục trên [0, +∞), *I* là tpsr loại 1

2. Ngắt bỏ đoạn [0, 1], *I* cùng bản chất với

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2x + 3}{(4 + x^{\alpha})\sqrt[3]{x^4 + 1}}\,dx$$

3. f(x) > 0 trên [1, +∞), sử dụng tiêu chuẩn so sánh.

$$f(x) = \frac{2x+3}{4 + x^{\alpha}\sqrt[3]{x^4+1}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^{\frac{4}{3}+\alpha}} = 2\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}+\alpha}}, \alpha > 0 & (1) \\ \dfrac{2x}{4x^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \alpha < 0 & (2) \\ \dfrac{2x}{5x^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \alpha = 0 & (3) \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

(1) $f(x) \sim 2\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}+\alpha}}, \alpha > 0$

I hội tụ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{2}{3}$

(2) $f(x) \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \alpha < 0$ $\Rightarrow$ I phân kỳ

(3) $f(x) \sim \dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \alpha = 0$ $\Rightarrow$ I phân kỳ

$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} x^2 . e^{-x} dx}$$ (không thay tương đương được)

Xét $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 . e^{-x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{x^{2+\alpha}}{e^x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0, \forall \alpha$$

$\alpha \le 1$ $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ phân kỳ. Không có kết luận cho I

$\alpha > 1$ $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ hội tụ $\Rightarrow$ I hội tụ

$\alpha > 1$ $\quad \int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow$ I hội tụ

Vậy chỉ cần chọn α = 2, ta kết luận được I hội tụ.

Tức là

Trong bài làm chỉ viết như bên cạnh

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2.e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^4}{e^x} \to 0 (= k)$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ $\Rightarrow$ I hội tụ

$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx}$$

(không thay tương đương được)

Xét $g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{\ln x}{x^2}}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \text{nếu } 2-\alpha > 0 \quad (1) \\ +\infty & \text{nếu } 2-\alpha \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lưu ý: phải chọn α sao cho có thể kết luận I hội tụ hay phân kỳ.

(1) $\alpha < 2$: k = 0

(a) $\alpha > 1 : \int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

(b) $\alpha \le 1 : \int_1^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

$\Rightarrow$ không có kết luận cho I

(2) $\alpha \ge 2$: k = ∞ và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ

$\Rightarrow$ không có kết luận cho I

(1) (a) $\begin{cases} \alpha < 2 \\ \alpha > 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ k = 0 và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

chọn α = 3/2

Trong bài làm chỉ viết như bên cạnh

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \frac{\ln x}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Sự hội tụ tuyệt đối
(hàm có dấu tùy ý)

Cho f(x) khả tích trên [a, b], $\forall$ b $\geq$ a, nếu $\int_a^{+\infty} |f|$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f$ hội tụ. Khi đó ta nói $\int_a^{+\infty} f$ hội tụ tuyệt đối.

- Sự hội tụ tuyệt đối là sự hội tụ của tích phân |f|
- Hội tụ tuyệt đối $\Rightarrow$ hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_1^{+\infty} x.e^{-x^2}\cos x.dx$

$f(x) = x.e^{-x^2}\cos x$ thay đổi dấu trên [1, +∞)

Xét $I_1 = \int_1^{+\infty} |f(x)|dx = \int_1^{+\infty} \left|x.e^{-x^2}\cos x\right|dx$

$|f(x)| \le x.e^{-x^2}$

$$\left|f(x)\right| \leq x.e^{-x^2}$$ (Các hàm không âm)

$$\frac{x.e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^3}{e^{x^2}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} x.e^{-x^2} dx$ hội tụ

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$ hội tụ

$\Rightarrow$ *I* hội tụ tuyệt đối

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Hàm lấy tích phân thay đổi dấu trên [1, +∞)

$$I_1 = \int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$$

$|f(x)| \le \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ $\quad \Rightarrow I_1$ hội tụ

$\Rightarrow$ *I* hội tụ tuyệt đối

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

Hàm lấy tích phân thay đổi dấu trên [1, +∞)

$$I_1 = \int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| dx$$

$|f(x)| \le \frac{1}{x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ

$\Rightarrow$ Không có kết luận cho I_1

Dùng tích phân từng phần cho I $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \cos x\, dx, v = \sin x \end{cases}$$

$$I = -\left.\frac{\cos x}{x^2}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2}$$

$$= \underbrace{\sin 1}_{\text{const}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2}}_{\text{hội tụ tuyệt đối}} \Rightarrow I \text{ hội tụ}$$

Tích phân cần nhớ

$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^{\alpha}} dx \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^{\alpha}} dx}$$

Với mọi $\alpha > 0$, I và J luôn luôn hội tụ

Phương pháp khảo sát:

1. Nếu $\alpha > 1$: dùng sự hội tụ tuyệt đối (chặn bỏ cos, sin)

2. Nếu $0<\alpha \le 1$: dùng tp từng phần với $u=1/x^{\alpha}$

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

Điểm kỳ dị:

Cho f(x) xác định trên [a, b] \ {x_0}. Nếu

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$$

ta nói x_0 là điểm kỳ dị của f trên [a, b]

Tích phân suy rộng loại 2 là $\int_a^b f(x)dx$

với f có ít nhất 1 điểm kỳ dị trên [a, b]

Định nghĩa.

Cho f(x) khả tích trên [a, b – ε], với mọi ε>0 đủ nhỏ, kỳ dị tại b

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Nếu f kỳ dị tại a $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Nếu giới hạn hữu hạn: $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

Ngược lại: phân kỳ.

Nếu f kỳ dị tại a và b

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Nếu f kỳ dị tại $x_0 \in (a, b)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx}$$

(vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ các tp vế phải đều hội tụ)

Công thức Newton-Leibnitz

Cho f(x) khả tích trên [a, b – ε], với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, kỳ dị tại b, F(x) là nguyên hàm của f(x).

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Với

$$F(b) = \lim_{x \to b^-} F(x)$$

Lưu ý: các pp đổi biến số và tp từng phần vẫn dùng như tp xác định.

Ví dụ

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx}$$

kỳ dị tại x = 0

$$= \int_0^1 \ln x . d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_0^1 = -\infty$$

Vậy tp trên phân kỳ.

Ví dụ

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx}$$

f kỳ dị tại x = 0

$$= 2\sqrt{x}.\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$= 0 - 4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4$$

Ví dụ

$$I = \int_{-1/2}^{-1/4} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$$

f kỳ dị tại x = –1/2.

$$t^2 = 2x + 1 \Rightarrow 2t\,dt = 2dx$$

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t\,dt}{\frac{t^2-1}{2}\,t} = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho f(x), g(x) không âm và khả tích trên [a, b - ε], ∀ε>0, kỳ dị tại b

Nếu $f(x) \leq kg(x), \quad \forall x, a \leq x < b$

$\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

$\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho f(x), g(x) như tiêu chuẩn so sánh 1

Đặt $k = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ (giới hạn tại điểm kỳ dị)

- $0 \neq k \neq \infty$ $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ Cùng hội tụ hoặc phân kỳ
- $k = 0$ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ
- $k = \infty$ $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân cơ bản

$$I_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$

kỳ dị tại b

kỳ dị tại a

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\ln\varepsilon + \ln(b-a) \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] \end{cases}$$

Sự hội tụ tuyệt đối
(hàm có dấu tùy ý)

Cho f(x) khả tích trên [a, b - ε], ∀ ε≥ 0, nếu $\int_a^b |f|$ hội tụ thì $\int_a^b f$ hội tụ. Khi đó ta nói $\int_a^b f$ hội tụ tuyệt đối.

- Sự hội tụ tuyệt đối là sự hội tụ của tích phân |f|

- Hội tụ tuyệt đối ⇒ hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$

f kỳ dị tại x = 0

$$0 \le f(X) = \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$$

cuu duong than cong . com

Chọn $g(x) = \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{(x-0)^{1/2}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sin x} \xrightarrow{x \to 0^+} 1$$

$\Rightarrow$ I cùng bản chất với $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$

nên hội tụ.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

f(x) ≥ 0, kỳ dị tại π/2 và 0, tách I thành 2 tp

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}}_{I_2}$$

Xét I_1: f kỳ dị tại x = 0

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad khi \ x \to 0^+$$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x \cos x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 1$$

$\Rightarrow$ I_1 cùng bản chất với $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(x)dx$ nên hội tụ.

cuu duong than cong . com

Xét I_2: f kỳ dị tại x = π/2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}},$$

$$\sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \quad khi \quad x \to \frac{\pi^-}{2}$$

Chọn $$g(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{1}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{\pi}{2} - x}{\sqrt{\sin x \cos x}} \xrightarrow{x \to \frac{\pi}{2}^-} 1$$

$\Rightarrow$ I_2 cùng bản chất với $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$ nên pkỳ

I_1 hội tụ, I_2 phân kỳ $\Rightarrow$ I hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Tổng quát *I* không phải là tích phân suy rộng loại 1.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = I_1 + I_2$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ I_2 \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{I phân kỳ với mọi } \alpha$$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}+1\ \sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx}$$

f kỳ dị tại x = 0, tách *I* thành 2 tích phân:

$$I = \underbrace{\int_1^2 \frac{x^{3/2}+1\ \sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{x^{3/2}+1\ \sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx}_{I_2}$$

(do x = 0 quyết định) (do x = +∞ quyết định)

$$f(x) = \frac{x^{3/2}+1\ \sqrt{x}}{e^{x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},\ \text{khi } x \to 0^{+}$$

I_1 cùng bản chất với $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ nên hội tụ

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}+1\ x^{2}\sqrt{x}}{e^{x}-1} = 0\,(=k)$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{2}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ

$$1/\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$2/\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x-\ln x}$$

$$3/\ \int_0^1 \frac{3\cos 5x+2}{e^{\sqrt{x}}-1}dx$$

$$4/\ \int_0^{+\infty} x\left(1-\cos\frac{2}{x^2}\right)dx$$