TÍCH PHÂN SUY RỘNG

(phần 2)

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

Điểm kỳ dị:

Cho f(x) xác định trên [a, b] \ {x_0}. Nếu

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$$

ta nói x_0 là điểm kỳ dị của f trên [a, b]

Tích phân suy rộng loại 2 là $\int_a^b f(x)dx$

với f có ít nhất 1 điểm kỳ dị trên [a, b]

Định nghĩa.

Cho f(x) khả tích trên [a, b – ε], với mọi ε>0 đủ nhỏ, kỳ dị tại b

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}$$

Nếu f kỳ dị tại a $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$

Nếu giới hạn hữu hạn: $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ

Ngược lại: phân kỳ.

Nếu f kỳ dị tại a và b

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

Nếu f kỳ dị tại $x_0 \in (a, b)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx}$$

(vế trái hội tụ $\Leftrightarrow$ các tp vế phải đều hội tụ)

Công thức Newton-Leibnitz

Cho f(x) khả tích trên [a, b – ε], với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, kỳ dị tại b, F(x) là nguyên hàm của f(x).

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Với

$$F(b) = \lim_{x \to b^-} F(x)$$

Lưu ý: các pp đổi biến số và tp từng phần vẫn dùng như tp xác định.

Ví dụ

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx}$$

kỳ dị tại x = 0

$$= \int_0^1 \ln x . d \ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_0^1 = -\infty$$

Vậy tp trên phân kỳ.

Ví dụ

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx}$$

f kỳ dị tại x = 0

$$= 2\sqrt{x}.\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$= 0 - 4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4$$

Ví dụ

$$\boxed{I = \int_{-1/2}^{-1/4} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}}$$

f kỳ dị tại x = –1/2.

$$t^2 = 2x + 1 \Rightarrow 2t\,dt = 2dx$$

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t\,dt}{\frac{t^2-1}{2}t} = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right|$$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho f(x), g(x) không âm và khả tích trên [a, b - ε], ∀ε>0, kỳ dị tại b

Nếu $f(x) \leq kg(x), \quad \forall x, a \leq x < b$

$$\begin{cases} \int_a^b g(x)dx \text{ hội tụ thì } \int_a^b f(x)dx \text{ hội tụ} \\ \int_a^b f(x)dx \text{ phân kỳ thì } \int_a^b g(x)dx \text{ phân kỳ} \end{cases}$$

TÍCH PHÂN HÀM KHÔNG ÂM

Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho f(x), g(x) như tiêu chuẩn so sánh 1

Đặt $k = \lim_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (giới hạn tại điểm kỳ dị)

- $0 \neq k \neq \infty$ $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ Cùng hội tụ hoặc phân kỳ
- $k = 0$ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ
- $k = \infty$ $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

Tích phân cơ bản

$$I_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

Hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$

kỳ dị tại b

kỳ dị tại a

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\ln\varepsilon + \ln(b-a) \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] \end{cases}$$

Sự hội tụ tuyệt đối
(hàm có dấu tùy ý)

Cho f(x) khả tích trên [a, b - ε], ∀ ε≥ 0, nếu $\int_a^b |f|$ hội tụ thì $\int_a^b f$ hội tụ. Khi đó ta nói $\int_a^b f$ hội tụ tuyệt đối.

- Sự hội tụ tuyệt đối là sự hội tụ của tích phân |f|
- Hội tụ tuyệt đối $\Rightarrow$ hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx$

f kỳ dị tại x = 0

$$0 \le f(X) = \frac{\sqrt{x}}{\sin x} \square \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{(x-0)^{1/2}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sin x} \xrightarrow{x \to 0^+} 1$$

$\Rightarrow$ I cùng bản chất với $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x-0)^{1/2}}$

nên hội tụ.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

f(x) ≥ 0, kỳ dị tại π/2 và 0, tách I thành 2 tp

$$I = \underbrace{\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos x}}}_{I_2}$$

Xét I_1: f kỳ dị tại x = 0

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad khi \quad x \to 0^+$$

Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x \cos x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 1$$

$\Rightarrow$ I_1 cùng bản chất với $\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(x)dx$ nên hội tụ.

Xét I_2: f kỳ dị tại $x = \pi/2$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}},$$

$$\sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \quad khi \quad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

Chọn $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$

Chọn $g(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{1}}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{\pi}{2} - x}{\sqrt{\sin x \cos x}} \xrightarrow{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} 1$$

$\Rightarrow$ I_2 cùng bản chất với $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ nên pkỳ

I_1 hội tụ, I_2 phân kỳ $\Rightarrow$ I hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ: $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$

Tổng quát *I* không phải là tích phân suy rộng loại 1.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = I_1 + I_2$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1 \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ I_2 \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ phân kỳ với mọi } \alpha$$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2} + 1 \;\sqrt{x}}{e^x - 1}\, dx}$$

f kỳ dị tại x = 0, tách *I* thành 2 tích phân:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{3/2} + 1 \;\sqrt{x}}{e^x - 1}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2} + 1 \;\sqrt{x}}{e^x - 1}\, dx}_{I_2}$$

(do x = 0 quyết định) (do x = +∞ quyết định)

- $$f(x)=\frac{x^{3/2}+1\ \sqrt{x}}{e^{x}-1}\sim\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}},\ \text{khi } x\to 0^{+}$$

I_1 cùng bản chất với $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ nên hội tụ

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}+1\ x^{2}\sqrt{x}}{e^{x}-1}=0\,(=k)$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ

Vậy I hội tụ.