PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

BÀI TOÁN DẪN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Vận tốc nguội lạnh của một vật trong không khí tỷ lệ với hiệu giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ không khí. Tìm quy luật giảm nhiệt của vật nếu nhiệt độ của không khí là 20^0C và nhiệt độ ban đầu của vật là 100^0C.

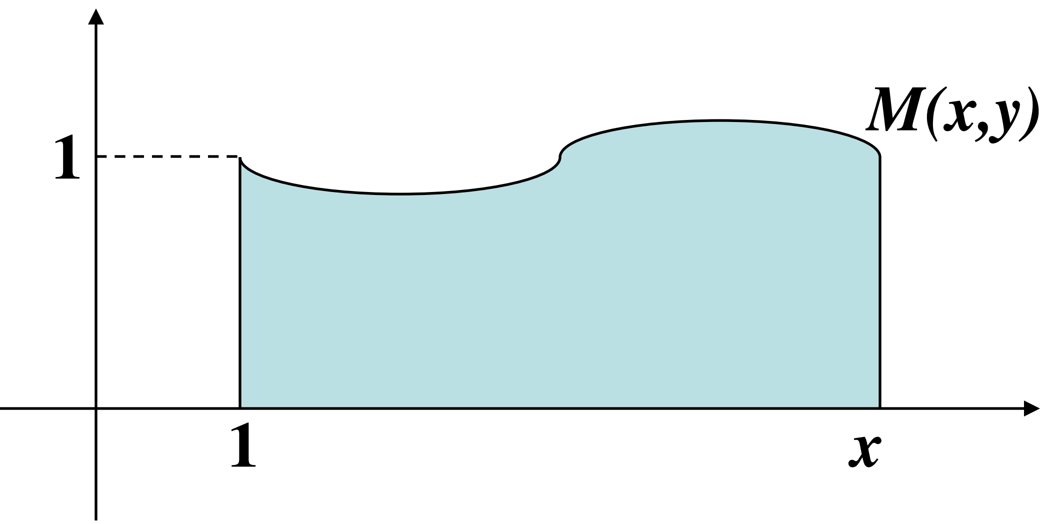
Quy luật giảm nhiệt ⇔ sự thay đổi nhiệt độ theo thời gian

Gọi nhiệt độ của vật là hàm số T theo biến thời gian t

$$\frac{dT}{dt} = k\left[T(t) - 20\right], T(0) = 100^0C \quad \Rightarrow \textbf{PTVP}$$

BÀI TOÁN DẪN VỀ PTVP

Tìm pt đường cong đi qua điểm (1, 1) nếu với đoạn [1, x] bất kỳ, diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong này bằng tích 2 lần tọa độ điểm M(x,y) thuộc đường cong (x>0, y>0)



$$\int_1^x y(t)\,dt = 2xy(x)$$

Đạo hàm 2 vế

$$y(x) = 2y(x) + 2xy'(x)$$

Lưu ý: $y(1) = 1$

$$\Leftrightarrow 2xy'(x) + y(x) = 0$$

MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

1. PTVP là phương trình mà hàm phải tìm nằm dưới dấu đạo hàm hoặc vi phân..
2. Cấp của ptvp là cấp cao nhất của đạo hàm của ẩn hàm.
3. Nếu ẩn hàm là hàm 1 biến $\Rightarrow$ PTVP thường.

   Nếu ẩn hàm là hàm nhiều biến $\Rightarrow$ PTVP đạo hàm riêng.
4. Hệ PTVP là hệ gồm nhiều PTVP và nhiều ẩn hàm.

NGHIỆM CỦA PTVP

Xét ptvp thường cấp n: $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0$ (1)

1. Hàm số $y = \varphi(x,c_1,\ldots,c_n)$ thỏa mãn (1) với c_i là các hằng số gọi là nghiệm tổng quát của (1).

   Nếu cho c_i các giá trị cụ thể ta được nghiệm riêng của (1).

2. Hàm $\phi(x,c_1,\ldots,c_n, y) = 0$ thỏa mãn (1) gọi là tích phân tổng quát của (1) (y được tìm ở dạng ẩn)

   Nếu cho c_i các giá trị cụ thể ta được tích phân riêng của (1).

NGHIỆM CỦA PTVP

3. Đồ thị của hàm nghiệm gọi là đường cong tích phân.
4. Hàm $y = y(x)$ thỏa (1) nhưng không phải là nghiệm riêng được gọi là nghiệm kỳ dị của (1).

Bài toán Cauchy cho ptvp cấp 1

Xét ptvp cấp 1: $F(x, y, y') = 0$ (1)

Hoặc $y' = f(x, y)$ (2)

(2) Gọi là pt đã giải ra được đối với đạo hàm.

Bài toán tìm hàm y thỏa (1) hoặc (2) với điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0$$

Gọi là bài toán Cauchy.

MỘT SỐ DẠNG PTVP CẤP 1

- Phương trình tách biến
- Phương trình đẳng cấp
- Phương trình tuyến tính cấp 1
- Phương trình vi phân toàn phần
- Phương trình Bernoulli.

PHƯƠNG TRÌNH TÁCH BiẾN

Phương trình có thể tách y và x về 2 vế khác nhau gọi là phương trình tách biến.

$$\boxed{f(y)\,dy = g(x)\,dx}$$

Phương pháp giải: tích phân 2 vế

Các dạng có thể gặp:

1. $f(y)\,y' = g(x)$
2. $y' = f(y)g(x)$
3. $f_1(y)g_1(x)\,y' = f_2(y)g_2(x)$

Ví dụ

$$3y^2y' = 2x \quad (1)$$
$$y(0) = 1 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3y^2dy = 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \int 3y^2dy = \int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow y^3 = x^2 + C \quad (3)$$ (tích phân tổng quát)

Thay x = 0, y = 1 vào TPTQ $\Rightarrow$ C = 1

Vậy nghiệm của (1) và (2) là: $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Hoặc tích phân riêng là: $y^3 = x^2 + 1$

$$\boxed{xy' = y \quad (1)}$$

1. y = 0 là 1 nghiệm của pt

2. y $\neq$ 0: chia 2 vế cho xy (không xét TH x = 0)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|c_1|, \qquad c_1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow |y| = |c_1 x|$$

$$\Leftrightarrow y = Cx, \qquad C \neq 0$$

y = 0 là trường hợp C = 0 trong nghiệm tổng quát

$$\boxed{y' = 3x^2y,\ \ y(0) = 2}$$

Hàm y = 0 không thỏa đk ban đầu nên không xét

$$y' = 3x^2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = x^3 + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x^3+c} = e^c e^{x^3}$$

$$\Leftrightarrow y = Ce^{x^3}, \qquad \boldsymbol{C} \neq 0$$

x = 0, y = 2 $\Rightarrow$ C = 2 $\Rightarrow$ nghiệm $\boxed{y = 2e^{x^3}}$

Ví dụ

$\boxed{y' - xy^2 = 2xy}$ $\Leftrightarrow$ y' = xy² + 2xy = xy(y + 2) (1)

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{y(y+2)} = x\,dx \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y+2} = Ce^{x^2}$$

DẠNG ĐƯA VỀ TÁCH BiẾN

$y' = f(ax + by + c)$

Đặt $u = ax + by + c$

Vd: $y' = (4x + y - 1)^2$

$$u = 4x + y - 1 \Rightarrow u' = 4 + y'$$

Pt trở thành

$$u' - 4 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2 + 4} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} = x + c$$

$$\Leftrightarrow \arctan\frac{4x + y - 1}{2} = 2x + C$$

DẠNG ĐƯA VỀ TÁCH BIẾN

Vd: $y' = \dfrac{3y - 3x - 1}{2y - 2x}$

Đổi biến: $u = y - x$

Pt trở thành:

$$u' + 1 = \frac{3u - 1}{2u} \Rightarrow u' = \frac{u - 1}{2u}$$

$$\Rightarrow \frac{u\,du}{u - 1} = \frac{dx}{2}$$

$$\Rightarrow u + \ln|u - 1| = \frac{x}{2} + C$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Đổi biến: $u = \dfrac{y}{x}$ Hay: y = ux

Vd: $xyy' = x^2 - xy + y^2 \Rightarrow y' = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

Pt trở thành: $u'x + u = \dfrac{1}{u} - 1 + u$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1-u}{u}$$

$$\Rightarrow u + \ln|u-1| = -\ln|x| + C$$

PT ĐƯA VỀ ĐẲNG CẤP

$$\boxed{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0}$$

đưa về tách biến

Bước 1: giải hệ pt

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Với cặp nghiệm (x_0, y_0), đặt :

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Pt trở thành: $Y' = g\left(\frac{X}{Y}\right)$

Bước 2: giải pt đẳng cấp và trả về x, y

Ví dụ

Giải pt: $(2x - 4y + 6) + y'(x + y - 3) = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y - 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Đổi biến: x = X + 1, y = Y + 2, pt trở thành

$$Y' = \frac{-2(X+1) + 4(Y+2) - 6}{X + 1 + Y + 2 - 3} \Leftrightarrow Y' = \frac{-2X + 4Y}{X + Y}$$

$$Y' = \frac{-2X + 4Y}{X + Y} \Rightarrow Y' = \frac{-2 + 4\frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

Đổi biến: Y = UX $\Rightarrow$ Y' = U'X + U

$$U'X + U = \frac{-2 + 4U}{1 + U} \Rightarrow U'X = \frac{-U^2 + 3U - 2}{1 + U}$$

$$\Rightarrow \frac{(U + 1)dU}{U^2 - 3U + 2} = \frac{-dX}{X}$$

$$\frac{(U+1)\,dU}{U^2-3U+2}=\frac{-dX}{X}$$

$$\Rightarrow -\ln(U-1)^2+\ln\left|U-2\right|^3=-\ln|X|+c$$

$$\Rightarrow \frac{(U-2)^3}{(U-1)^2}=\frac{C}{X}$$

$$\Rightarrow (Y-2X)^3=C(Y-X)^2$$

(trả về x, y)

PT VI PHÂN TOÀN PHẦN

Dạng: $\begin{cases} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \\ P'_y = Q'_x \end{cases}$

Tích phân tổng quát: $U(x,y) = C$

Với U(x,y) cho bởi: $\boxed{(x_0, y_0) \text{ là điểm mà P, Q xác định}}$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

hay

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt$$

Ví dụ

Giải pt: $\underbrace{(3x+2y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(2x-9y)}_{Q(x,y)}dy = 0$

$$P'_y = 2 = Q'_x$$

Chọn : $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$$

$$= \int_0^x (3t+0)dt + \int_0^y (2x-9t)dt$$

$$U(x,y) = \int_0^x (3t + 0)\,dt + \int_0^y (2x - 9t)\,dt$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{9}{2}y^2$$

Vậy tích phân tổng quát là

$$U(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{9}{2}y^2 = C$$

Ví dụ

Giải pt: $$\underbrace{\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)}_{Q(x,y)} dy = 0$$

$$P'_y = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = Q'_x$$

Chọn : $(x_0, y_0) = (0,1)$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dt$$

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

Tích phân tổng quát:

$$U(x,y) = \int_0^x P(t,y)dt + \int_1^y Q(0,t)dt = C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \left(t + e^{t/y}\right)dt + \int_1^y 1.dt = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + y\left(e^{x/y} - 1\right) + y - 1 = C$$

PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 1

(1) $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$

Toàn bộ pt chỉ chứa hàm bậc 1 theo y và y'.

(2) $y' + p(x)y = 0$: pt thuần nhất

Cấu trúc nghiệm tổng quát của (1): $\boxed{y = y_0 + y_r}$

- y_0 là nghiệm tổng quát của (2)
- y_r là 1 nghiệm riêng của (1)

Bước 1: tìm nghiệm tổng quát của pt thuần nhất.

y’ + p(x)y = 0

(dạng tách biến)

$$\boxed{y_0 = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

Một nghiệm riêng của

(1) :

Bước 2: tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất

$$y_0 = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Biến thiên hằng số: trong y_0 coi C =C(x)

Thay y_0 vào y' + p(x)y = 0 (1) để xác định C(x).

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)y_0 = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Chọn $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

$$y_r = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Công thức nghiệm ptvp tuyến tính cấp 1

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Vd: $1/\ xy' - y = x^3$

$\Leftrightarrow\ y' - \frac{1}{x}y = x^2$ p(x) = -1/x , q(x) = x^2

$$\Leftrightarrow\ y = e^{-\int \frac{-1}{x}dx}\left(\int x^2 e^{\int \frac{-1}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= x\left(\int x^2 \frac{1}{x}dx + C\right) = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$2/\ y' - 2xy = 1 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \ y = e^{-\int -2x\,dx}\left(\int (1-2x^2)e^{\int -2x\,dx}dx + C\right)$$

$$= e^{x^2}\left(\int (1-2x^2)e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$= e^{x^2}\left(xe^{-x^2} + C\right) = x + Ce^{x^2}$$

$$3/\ y+\int_0^x y(t)\cos(t)\,dt=\frac{1}{2}\sin^2 x+1$$ Đạo hàm 2 vế

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'+y\cos x=\sin x\cos x \\ y(0)=1 \end{cases}$$ (Đk ban đầu tại cận dưới tp)

$$\Leftrightarrow\ y=e^{-\int\cos x\,dx}\left(\int\sin x\cos x\,e^{\int\cos x\,dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\sin x}\left(\int\sin x\cos x\,e^{\sin x}dx+C\right)$$

$$= e^{-\sin x}\left(\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx + C\right)$$

$$= e^{-\sin x}\left(\sin x e^{\sin x} - \int \cos x e^{\sin x} dx + C\right)$$

$$= e^{-\sin x}\left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right)$$

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$$

$y(0)=1 \Rightarrow C = 2$

Nghiệm bài toán: $y = \sin x - 1 + 2 e^{-\sin x}$

$4/\ y'(x+y)=y+1$ (1),

Lưu ý: y’ =1/x’ (đạo hàm hàm ngược)

Pt viết lại: $x'(y+1)=x+y$ (2)

Xem x là hàm theo y

$$x' - \frac{x}{y+1} = \frac{y}{y+1}$$

$$x' - \frac{x}{y+1} = \frac{y}{y+1}$$

$$\Rightarrow \; x = e^{-\int -\frac{1}{y+1}dy}\left(\int \frac{y}{y+1}.e^{\int -\frac{1}{y+1}dy} dy + C \right)$$

$$\Rightarrow \; x = (y+1)(\ln|y+1| - \frac{1}{y+1} + C)$$

PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \text{ và } \alpha \neq 1$$

Phương pháp giải:

Chia 2 vế cho y^{α} và đổi biến $u = y^{1-\alpha}$

Pt trở thành:

$$\boxed{u' + (1 - \alpha)p(x)u = (1 - \alpha)q(x)}$$

(Tuyến tính)

Vd: $1/x\,y' + y = x^2 y^2 \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x} = x y^2$

Chia hai vế cho y²: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} = x$

Đặt $u = y^{1-2} = y^{-1}$

Pt trở thành: $-u' + \frac{u}{x} = x \Leftrightarrow u' - \frac{u}{x} = -x$

$$\Leftrightarrow u = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -x e^{\int -\frac{dx}{x}} dx + C\right) = -x^2 + Cx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = -x^2 + Cx \Leftrightarrow y = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

$$2/\ y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}$$

Nhân 2 vế với y² (chia cho y⁻²), pt trở thành:

$$y^2 y' + \frac{1}{x}y^3 = \frac{1}{x}$$ Đổi biến: u = y³

$$\frac{1}{3}u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow u' + 3\frac{u}{x} = 3\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow u = 1 + Cx^{-3} \Leftrightarrow y^3 = 1 + Cx^{-3}$$

$$3/\ (x + x^3 \sin y) y' = 2y$$

$$\Leftrightarrow\ 2yx' = x + x^3 \sin y$$

$$\Rightarrow\ x' - \frac{x}{2y} = \frac{\sin y}{2y} x^3 \quad \Rightarrow\ \frac{x'}{x^3} - \frac{1}{2yx^2} = \frac{\sin y}{2y}$$

Đổi biến: $u = x^{-2}$, pt trở thành:

$$u' + \frac{u}{y} = -\frac{\sin y}{y} \Leftrightarrow\ u = y^{-1}(\cos y + C)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x^2} = \frac{\cos y + C}{y}$$