

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

BÀI TOÁN CAUCHY

Tìm nghiệm của phương trình

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

hoặc: $y'' = f(x, y, y')$ (2)

thỏa điều kiện ban đầu :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array} \right.$$

Lưu ý: nghiệm tổng quát của ptvp cấp 2 có 2 hằng số tự do, cần 2 điều kiện để tìm 2 hằng số này.

Ví dụ

Tìm nghiệm bài toán:
$$\begin{cases} y'' = x^2 & (1) \\ y(0) = 1, y'(0) = -2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y' = \frac{x^3}{3} + C_1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \quad (4)$$

$$(2), (3) \Rightarrow C_1 = -2$$

$$(2), (4) \Rightarrow C_2 = 1$$

Vậy nghiệm bài toán là:
$$y = \frac{x^4}{12} - 2x + 1$$

MỘT SỐ PTVP CẤP 2 GIẢM CẤP ĐƯỢC

LOẠI 1: pt không chứa y : $F(x, y', y'') = 0$

Cách làm: đặt $p = y' \rightarrow$ đưa về ptvp cấp 1 theo p, x

LOẠI 2: pt không chứa x : $F(y, y', y'') = 0$

Cách làm: đặt $p = y' \rightarrow$ đưa về pt cấp 1 theo
hàm p và biến y

LOẠI 3: F thỏa $F(x, ty, ty', ty'') = t^n F(x, y, y', y'')$

Cách làm: đặt $y' = yz \rightarrow$ đưa về pt theo x, z

Ví dụ

$$1 / y'' = 2\sqrt{y'}$$

Pt không chứa y , đặt $y' = p$

Pt trở thành: $p' = 2\sqrt{p}$ ($p' = p'(x)$)

$$\begin{aligned} \text{Với } p \neq 0 \quad \frac{dp}{2\sqrt{p}} = dx &\Leftrightarrow \sqrt{p} = x + C_1 \\ &\Leftrightarrow y' = (x + C_1)^2 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2 \end{aligned}$$

$$p = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = C$$

$$2 / (1 + y^2) y y'' = (y^2 - 1)(y')^2$$

Pt không chứa x

Đặt $y' = p$ (xem y là biến)

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \times p = p' \times p, \quad (p' = p'(y))$$

Pt trở thành: $(1 + y^2) y p' p = (y^2 - 1) p^2$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{y^2 - 1}{y(1 + y^2)} dy = \left(\frac{2y}{1 + y^2} - \frac{1}{y} \right) dy$$

$$\Rightarrow p y = C_1 (1 + y^2)$$

$$\Rightarrow p y = C_1 (1 + y^2)$$

$$\Rightarrow y' y = C_1 (1 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{y dy}{1 + y^2} = C_1 dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = C_1 x + C_2$$

$$x^2 y y'' - (y - x y')^2 = 0$$

$$x^2 t y t y'' - (t y - x t y')^2 = t^2 [x^2 y y'' - (y - x y')^2]$$

$$\text{Đặt } y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$$

Pt trở thành:

$$x^2 y (y z^2 + y z') = (y - x y z)^2$$

$$\Rightarrow x^2 (z^2 + z') = (1 - x z)^2$$

$$\Rightarrow x^2 z' + 2 x z = 1 \quad (\text{Tuyến tính})$$

$$x^2 z' + 2xz = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1) \quad p(x), q(x), f(x) \text{ liên tục}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{Phương trình thuần nhất}$$

Cấu trúc nghiệm pt không thuần nhất:

$$y = y_0 + y_r$$

- y_0 là nghiệm **tổng quát** của pt thuần nhất,
- y_r là 1 nghiệm **riêng** của pt không thuần nhất

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Nếu y_1 và y_2 lần lượt là các nghiệm của pt

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y_1 + y_2$ là nghiệm của pt

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Giải phương trình thuần nhất

Nếu y_1 và y_2 là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của pt thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ngiệm tổng quát của pt này là

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Nếu biết trước 1 nghiệm $y_1 \neq 0$, y_2 được tìm như sau

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Ví dụ

Giải pt: $x^2y'' - xy' + y = 0$, biết pt có 1 nghiệm $y_1 = x$

$$p(x) = -1/x$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-dx}{x}}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln |x|$$

$$y_0 = C_1x + C_2x \ln|x|$$

$$\text{Giải pt: } (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2 \quad (1)$$

biết phương trình có 2 nghiệm $y = x^2$ và $y = x + x^2$

Lưu ý: pt đã cho là pt không thuần nhất

$y = x^2$ và $y = x + x^2$ là 2 nghiệm của (1)

$\Rightarrow y_1 = (x + x^2) - x^2$ là nghiệm của pt thuần nhất

$$\Rightarrow y_1 = x \quad \Rightarrow \quad y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_2 &= x \int \frac{e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \\ &= x \left(-\arctan x - \frac{1}{x} \right) = -x \arctan x - 1 \end{aligned}$$

$$y_0 = C_1 x + C_2(x \arctan x + 1) \quad (\text{NTQ của pt thuần nhất})$$

Nghiệm TQ của (1)

$$y = C_1 x + C_2(x \arctan x + 1) + x^2$$

PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 2 HỆ SỐ HẰNG

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

(a, b là hằng số)

Bước 1: Giải pt thuần nhất : $y'' + ay' + by = 0$

Bước 2: tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Cách xác định nghiệm tổng quát của pt thuần nhất

Giải phương trình đặc trưng:

$$k^2 + ak + b = 0$$

❖ k_1, k_2 là nghiệm thực phân biệt:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$

❖ k là nghiệm kép: $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$

❖ $k = \alpha \pm i\beta$ (phức): $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Ví dụ

$$1. y'' - 3y' - 4y = 0,$$

$$\text{Ptđt: } k^2 - 3k - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow k = -1, k = 4$$

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{4x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

$$2. y'' - 2y' + y = 0,$$

$$\text{Ptđt: } k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 1 \text{ (kép)}$$

$$y_1 = e^x, y_2 = x e^x \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$3. y'' - 2y' + 5y = 0,$$

$$\text{Ptđt: } k^2 - 2k + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 1 \pm 2i$$

$$y_1 = e^{1x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{1x} \sin 2x$$

$$\Rightarrow y_0 = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$$

Tìm nghiệm riêng y_r của pt $y'' + ay' + by = f(x)$

Biến thiên bằng số

Trong y_0 , xem $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, giải hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$y_r = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

Ví dụ

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$$

Pt thuần nhất : $y'' + 3y' + 2y = 0$ ($k^2 + 3k + 2 = 0$)

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Xem C_1 và C_2 là các hàm theo x , giải hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(-2e^{-2x}) = \sin(e^x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow C_1'(x) = e^x \sin(e^x), C_2'(x) = -e^{2x} \sin(e^x)$$

Chọn: $C_1(x) = -\cos(e^x)$, $C_2(x) = e^x \cos(e^x) - \sin(e^x)$

$$y_r = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

$$\begin{aligned} y_r &= -e^{-x} \cos(e^x) + e^{-2x} [e^x \cos(e^x) - \sin(e^x)] \\ &= -e^{-2x} \sin(e^x) \end{aligned}$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \quad y_r = -e^{-2x} \sin(e^x)$$

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-2x} \sin(e^x)$$

PP hệ số bất định tìm y_r

Áp dụng nếu: $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$

P_m, Q_n là các đa thức bậc m, n .

- Xác định các hằng số α, β và $s = \max(m, n)$

Lưu ý : $\left\{ \begin{array}{l} \text{vắng } e^{\alpha x}: \text{ xem } \alpha = 0 \\ \text{vắng } \cos, \sin: \text{ xem } \beta = 0 \\ s \text{ là bậc của đa thức trong } f(x) \end{array} \right.$

- Định dạng y_r

- Nếu $\alpha+i\beta$ không là nghiệm pt đặc trưng

$$y_r = e^{\alpha x} [R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$$

- Nếu $\alpha+i\beta$ là nghiệm bội p của pt đặc trưng
($p = 1, 2$)

$$y_r = x^p e^{\alpha x} [R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$$

Các đa thức R_s, T_s được xác định khi thay y_r vào pt không thuần nhất.

VÍ DỤ

$$(1) \quad \boxed{y'' + y = x^2 + x}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x)}$

$$\text{Ptđt: } k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, s = 2$$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0$: không là nghiệm ptđt

$$\Rightarrow y_r = Ax^2 + Bx + C$$

$$\Rightarrow y'_r = 2Ax + B, y''_r = 2A$$

Thay y_r vào (1):

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x, \quad \forall x$$

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow A = 1, B = 1, 2A + C = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1, B = 1, C = -2$$

$$y_r = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow y = y_0 + y_r$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2$$

(2) $y'' + y' = x - 2$ Ptđt: $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -1$

$f(x)$

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x}$

$$\alpha = 0, \beta = 0, s = 1$$

$\alpha + i\beta = 0$: là nghiệm **đơn** của ptđt ($p = 1$)

$$\Rightarrow y_r = x^1 (Ax + B) = Ax^2 + Bx$$

$$\Rightarrow y'_r = 2Ax + B, y''_r = 2A$$

Thay y_r vào (2):

$$2A + 2Ax + B = x - 2, \quad \forall x$$

$$2A + 2Ax + B = x - 2, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -3$$

$$y_r = \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

Nghiệm TQ của (2):

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

(3) $y'' - y = x \sin x$ Ptđt: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$f(x) = x \sin x \quad \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, s = 1$$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = i$: không là nghiệm ptđt

$$y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

$$y'_r = (Cx + A + D)\cos x - (Ax + B - C)\sin x$$

$$y''_r = -(Ax + B - 2C)\cos x - (Cx + 2A + D)\sin x$$

Thay y_r vào (3):

$$(-2Ax - 2B + 2C) \cos x + (-2Cx - 2A + 2D) \sin x = x \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2Ax - 2B + 2C = 0 \\ -2Cx - 2A + 2D = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, B = C \\ C = -1/2, A = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, B = -1/2 \\ C = -1/2, D = 0 \end{cases} \quad y_r = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} x \sin x$$

Nghiệm TQ (3):

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} x \sin x$$

$$(4) \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + \sin x$$

$$\text{Ptđt: } k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2 \text{ (bội } p = 2)$$

$f(x) = e^{-2x} + \sin x$ không có dạng đặc biệt

$$f_1(x) = e^{-2x} \quad \alpha_1 = -2, \beta_1 = 0, s_1 = 0$$

$$y_{r1} = x^2 A e^{-2x}$$

Thay y_{r1} vào pt: $y'' + 4y' + 4y = f_1(x) = e^{-2x}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow y_{r1} = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$$

$$f_2(x) = \sin x \quad (k = -2) \quad \alpha_2 = , \beta_2 = 1, s_2 = 0$$

$$y_{r2} = B \cos x + C \sin x$$

$$\text{Thay } y_{r2} \text{ vào pt: } y'' + 4y' + 4y = f_2(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow B = -4/7, C = -3/7$$

$$\Rightarrow y_{r2} = \frac{-4}{7} \cos x - \frac{3}{7} \sin x$$

$$y_r = y_{r1} + y_{r2} \quad (\text{Nguyên lý chồng chất nghiệm})$$

PHƯƠNG TRÌNH EURLER

$$(ax + b)^2 y'' + p(ax + b)y' + qy = f(x)$$

(a, b, p, q
là hằng số)

$$\text{Đổi biến : } t = \ln|ax + b| \Leftrightarrow ax + b = \pm e^t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{a}{ax + b} = \frac{dy}{dt} \pm a e^{-t}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\pm a e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} \\ &= a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \pm a e^{-t}, \quad y'' = a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Thay vào pt ban đầu:

$$e^{2t} a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + p \pm e^t \pm a e^{-t} \frac{dy}{dt} + qy = F(t)$$

$$a^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (ap - a^2) \frac{dy}{dt} + qy = F(t)$$

Tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ

$$(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' - 12y = 0, \text{ trên miền } 2x+1 > 0$$

Đặt : $2x + 1 = e^t$ hay $t = \ln(2x + 1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{2}{2x+1} = 2 \frac{dy}{dt} e^{-t} = 2 y'_t e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(2 e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$= 4 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) = 4 e^{-2t} y''_t - y'_t$$

$$y' = 2y'_t e^{-t}, \quad y'' = 4e^{-2t} y''_t - y'_t$$

$$(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' - 12y = 0, \quad 2x + 1 = e^t$$

Pt trở thành:

$$e^{2t} 4e^{-2t} y''_t - y'_t - 2e^t 2e^{-t} y'_t - 12y = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y''_t - 8y'_t - 12y = 0 \quad \Leftrightarrow y''_t - 2y'_t - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \Leftrightarrow y = \frac{C_1}{2x + 1} + C_2 (2x + 1)^3$$

$$\text{Giải pt: } x^2 y'' + xy' - y = \ln x \cdot \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

Đặt: $t = \ln x$ hay $x = e^t$

$$y' = \frac{dy}{dx} e^{-t} = y'_t e^{-t},$$

$$y'' = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} y''_t - y'_t$$

Thay vào pt:

$$e^{2t} e^{-2t} y''_t - y'_t + e^t e^{-t} y'_t - y = t \sin t$$

$$e^{2t} e^{-2t} y_t'' - y_t' + e^t e^{-t} y_t' - y = t \sin t$$

$$\Leftrightarrow y_t'' - y = t \sin t$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} t \sin t$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 x + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{2} \cos(\ln x) - \frac{1}{2} \ln x \sin(\ln x)$$