HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

ĐỊNH NGHĨA

Hệ tổng quát
$$\begin{cases} F_1(t,x_1,x_2,\ldots, x_n, x_1',x_2',\ldots,x_n') = 0 \\ \ldots. \\ F_n(t,x_1,x_2,\ldots, x_n, x_1',x_2',\ldots,x_n') = 0 \end{cases}$$

Hệ chính tắc
$$\begin{cases} x_1' = f_1(t,x_1,x_2,\ldots, x_n) \\ \ldots. \\ x_n' = f_n(t,x_1,x_2,\ldots, x_n) \end{cases}$$

t : biến

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: ẩn hàm

BÀI TOÁN CAUCHY

Tìm nghiệm hệ

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{cases}$$

Thỏa điều kiện $\begin{cases} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$

Hệ n ptvp cấp 1 tương đương 1 ptvp cấp n nên hệ nghiệm có n hằng số tự do.

PHƯƠNG PHÁP KHỬ

B_1: xây dựng một ptvp cấp n theo 1 hàm chọn trước.

B_2: giải ptvp cấp n vừa tìm được và rút về hệ với (n – 1) hàm

Vd:

$$\begin{cases} x' = x'(t) = 2y + e^t & \textbf{(1)} \\ y' = y'(t) = -x + 3y - e^t & \textbf{(2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' = -x' + 3y' - e^t \\ x' = 2y + e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' = -2y - e^t + 3y' - e^t \quad \textbf{(3)} \\ x' = 2y + e^t \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow y'' - 3y' + 2y = -2e^t$$ **Tt cấp 2 hệ số hằng**

$$\Leftrightarrow y = C_1e^t + C_2e^{2t} + 2te^t$$

$$(2) \Rightarrow x = -y' + 3y - e^t$$

$$= -C_1e^t - 2C_2e^{2t}$$

$$-2(t+1)e^t + 3(C_1e^t + C_2e^{2t} + 2te^t) - e^t$$

$$= 2C_1e^t + C_2e^{2t} + (4t-3)e^t$$

$$\begin{cases} x = 2C_1e^t + C_2e^{2t} + (4t-3)e^t \\ y = C_1e^t + C_2e^{2t} + 2te^t \end{cases}$$

Cách khử cho hệ 2 pt (tuyến tính)

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + f_1(t) & (1) \\ y' = a_2 x + b_2 y + f_2(t) & (2) \end{cases}$$

1. Lấy đạo hàm pt (1) theo t được (3)
2. Thay y’ từ pt (2) vào (3) được (4)
3. Rút y từ (1) thay vào (4)
4. Pt kết quả là pt cấp 2 theo ẩn hàm x và biến t

Nếu xuất phát từ pt (2), ta có pt cấp 2 theo y

HỆ PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 1 HỆ SỐ HẰNG

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

(Hệ ẩn hàm)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : \textit{ma trận vuông cấp n}$$

Ví dụ

$$1/\begin{cases} x' = x'(t) = 2y + e^{t} \\ y' = y'(t) = -x + 3y - e^{t} \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

$$2/\begin{cases} x' = x + y + 2z + t + \sin t \\ y' = 2x + 4y + z + t^2 \\ z' = 3y - 2z + e^t - \ln t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t + \sin t \\ t^2 \\ e^t - \ln t \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

PP TRỊ RIÊNG GIẢI HỆ KHÔNG THUẦN NHẤT

$\boxed{X' = AX + F(t)}$

A chéo hóa được

$(\Leftrightarrow \exists\, P: P^{-1}AP = D \text{ (chéo)})$

$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X + F(t)$

Đặt $Y = P^{-1}X$:

$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}F(t)$

$\boxed{\Leftrightarrow Y' = DY + G(t)}$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots\dots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots\dots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'_1(t) = \lambda_1 y_1(t) + g_1(t) \\ y'_2(t) = \lambda_2 y_2(t) + g_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n(t) = \lambda_n y_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

Hệ n ptvp tuyến tính cấp 1

$\downarrow$ giải

$\boxed{X = PY} \longleftarrow Y$

$$\boxed{(1)\quad \begin{cases} x_1' = 2x_2 + e^t \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 - e^t \end{cases}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Chéo hóa A

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Y = P^{-1}X \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$$

$$(1) \Leftrightarrow \ Y' = DY + P^{-1}F(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + 2e^t \\ y_2' = 2y_2 - 3e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2te^t + C_1e^t \\ y_2 = 3e^t + C_2e^{2t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2te^t + C_1e^t \\ y_2 = 3e^t + C_2e^{2t} \end{cases}$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^t + C_1e^t \\ 3e^t + C_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2C_1e^t + C_2e^{2t} + 4te^t + 3e^t \\ C_1e^t + C_2e^{2t} + 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}$$

Vậy nghiệm hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x_1(t) = 2C_1e^t + C_2e^{2t} + 4te^t + 3e^t \\ x_2(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + 2te^t + 3e^t \end{cases}$$

PPTRỊ RIÊNG TÌM NGHIỆM HỆ THUẦN NHẤT

$\boxed{X'(t) = AX(t)}$ $\boxed{\Leftrightarrow Y' = DY}$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdots\cdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = PY = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} P_k$$ (P_k là cột thứ k của P)

$$\boxed{X_k = e^{\lambda_k t} P_k,\ k = 1,..,n \ :}$$

hệ nghiệm đltt của hệ thuần nhất

Định lý: Hệ X' = AX(t), ma trận A có n giá trị riêng thực λ_1, λ_2 … λ_n (kể cả trị riêng bội), và n vector riêng P_1, P_2, … , P_n độc lập tuyến tính

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất:

$$\boxed{X(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)^T = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} P_k}$$

Vd:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} X$$

$$\left|A - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$(A-\lambda_1 I)P=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=0$$

Chọn vector riêng: $P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_2 I)P=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=0$$

Chọn VTR: $P_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$X_1 = e^{\lambda_1 t}P_1, X_2 = e^{\lambda_1 t}P_2, \quad X_3 = e^{\lambda_2 t}P_3 = e^{6t}P_2$$

$$\Rightarrow X = \sum_{k=1}^{3} C_k X_k = C_1 e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{0t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \\ -C_1 + C_3 e^{6t} \\ -C_2 + 2C_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

Cấu trúc nghiệm hệ tt không thuần nhất

$$\boxed{X = X_0 + X_r}$$

X_0 : nghiệm tổng quát hệ pt thuần nhất

$X'(t) = AX(t)$ (1)

X_r : nghiệm riêng hệ pt không thuần nhất

Cấu trúc nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất

$X_0 = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$

$\{ X_k , k = 1, .., n \}$: hệ nghiệm độc lập tuyến tính của (1)

PP biến thiên hằng số tìm X_r

$$\boxed{X_r = C_1(t)X_1 + \ldots + C_n(t)X_n}$$

C_i tìm từ hệ pt: $\boxed{C'_1(t)X_1 + \ldots + C'_n(t)X_n = F(t)}$

Ví dụ

$$(1)\quad \boxed{\begin{cases} x_1' = 2x_2 + e^t \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 - e^t \end{cases}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Hệ thuần nhất:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Trị riêng và VTR của A:

$$\lambda_1 = 1, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Các nghiệm đltt của hệ thuần nhất

$$X_1 = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tìm X_r bằng pp biến thiên hằng số:

Trong X_0 xem C_1 và C_2 là các hàm cố theo t

Tìm C_1 và C_2 từ hệ:

$C'_1(t)X_1 + \ldots + C'_n(t)X_n = F(t)$

$$\Leftrightarrow C'_1 e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C'_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 2e^{t} + C'_2 e^{2t} = e^{t} \\ C'_1 e^{t} + C'_2 e^{2t} = -e^{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 = 2 \\ C'_2 = -3e^{-t} \end{cases}$$

Chọn: $\begin{cases} C_1(t) = 2t \\ C_2(t) = 3e^{-t} \end{cases}$

$$X_0 = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1e^{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1(t) = 2t \\ C_2(t) = 3e^{-t} \end{cases} \Rightarrow X_r = C_1(t)X_1 + C_2(t)X_2$$

$$= 2te^{t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 3e^{-t}e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4te^{t} + 3e^{t} \\ 2te^{t} + 3e^{t} \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát: $X = X_0 + X_r$

Ví dụ

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1 + 4x_2 + t \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 3t \end{pmatrix}$$

Chéo hóa A

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Đặt : $Y = P^{-1}X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}F = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - \frac{t}{3} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

Hệ viết lại theo y_1, y_2

$$Y' = DY + P^{-1}F$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 5y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - \frac{t}{3} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + \dfrac{2}{3}e^t - \dfrac{t}{3} \\ y_2' = 5y_2 + \dfrac{1}{3}e^t + \dfrac{t}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{t}{6} + \dfrac{1}{12} + C_1e^{2t} \\ y_2 = -\dfrac{1}{12}e^t - \dfrac{t}{15} + \dfrac{1}{75} + C_2e^{5t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = PY \qquad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$