PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

BÀI TOÁN CAUCHY

Tìm nghiệm của phương trình

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

hoặc: $$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

thỏa điều kiện ban đầu : $$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Lưu ý: nghiệm tổng quát của ptvp cấp 2 có 2 hằng số tự do, cần 2 điều kiện để tìm 2 hằng số này.

Ví dụ

Tìm nghiệm bài toán: $\begin{cases} y'' = x^2 & (1) \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow y' = \frac{x^3}{3} + C_1 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \qquad (4)$$

(2), (3) $\Rightarrow$ $C_1 = -2$

(2), (4) $\Rightarrow$ $C_2 = 1$

Vậy nghiệm bài toán là: $$y = \frac{x^4}{12} - 2x + 1$$

MỘT SỐ PTVP CẤP 2 GIẢM CẤP ĐƯỢC

LOẠI 1: pt không chứa y : $F(x, y', y'') = 0$

Cách làm: đặt $p = y'$ → đưa về ptvp cấp 1 theo p, x

LOẠI 2: pt không chứa x: $F(y,y',y'') = 0$

Cách làm: đặt $p = y'$ → đưa về pt cấp 1 theo hàm p và biến y

LOẠI 3: F thỏa $F(x,ty,ty',ty'') = t^n F(x,y,y',y'')$

Cách làm: đặt $y' = yz$ → đưa về pt theo x, z

Ví dụ

$\boxed{1/\ y''=2\sqrt{y'}}$ Pt không chứa y, đặt $y'=p$

Pt trở thành: $p'=2\sqrt{p} \quad (p'=p'(x))$

Với p ≠ 0 $\dfrac{dp}{2\sqrt{p}}=dx \Leftrightarrow \sqrt{p}=x+C_1$

$$\Leftrightarrow y'=(x+C_1)^2$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}(x+C_1)^3+C_2$$

p = 0 ⇔ y’ = 0 ⇔ y = C

$$\boxed{2/\ (1+y^2)\,yy''=(y^2-1)(y')^2}$$

Pt không chứa x

Đặt y’ = p (xem y là biến)

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\times\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\times p=p'\times p,\quad (p'=p'(y))$$

Pt trở thành: $(1+y^2)\,yp'p=(y^2-1)p^2$

$$\Rightarrow\ \frac{dp}{p}=\frac{y^2-1}{y(1+y^2)}dy=\left(\frac{2y}{1+y^2}-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$\Rightarrow\ py=C_1(1+y^2)$$

$$\Rightarrow\quad py = C_1(1+y^2)$$

$$\Rightarrow\quad y'y = C_1(1+y^2)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ydy}{1+y^2} = C_1 dx$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C_1 x + C_2$$

$$x^2yy'' - (y - xy')^2 = 0$$

$$x^2\, ty\, ty'' - (ty - x\, ty')^2 = t^2[x^2yy'' - (y - xy')^2]$$

Đặt $y' = yz \Rightarrow y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$

Pt trở thành:

$$x^2 y(yz^2 + yz') = (y - xyz)^2$$

$$\Rightarrow x^2(z^2 + z') = (1 - xz)^2$$

$$\Rightarrow x^2 z' + 2xz = 1$$ (Tuyến tính)

$$x^2 z' + 2xz = 1$$

$$\Rightarrow \; z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \; \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \; y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}$$

PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

p(x), q(x), f(x) liên tục

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Phương trình thuần nhất

Cấu trúc nghiệm pt không thuần nhất: $\boxed{y = y_0 + y_r}$

- y_0 là nghiệm tổng quát của pt thuần nhất,
- y_r là 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Nếu y_1 và y_2 lần lượt là các nghiệm của pt

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y_1 + y_2$ là nghiệm của pt

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Giải phương trình thuần nhất

Nếu y_1 và y_2 là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của pt thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

nghiệm tổng quát của pt này là $\boxed{y_0 = C_1y_1 + C_2y_2}$

Nếu biết trước 1 nghiệm $y_1 \neq 0$, y_2 được tìm như sau

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx}$$

Ví dụ

Giải pt: $x^2y'' - xy' + y = 0$, biết pt có 1 nghiệm $y_1 = x$

$p(x) = -1/x$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{-dx}{x}}}{x^2} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \ln|x|$$

$y_0 = C_1x + C_2x\ln|x|$

Giải pt: $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ (1)

biết phương trình có 2 nghiệm $y = x^2$ và $y = x + x^2$

Lưu ý: pt đã cho là pt không thuần nhất

$y_{TQ1} = y_0 + y_r = C_1 y_1$ -

$y_{TQ2} = y_0 + y_r = C_{1'} y_1$ +

$\Rightarrow (x + x^2) - x^2 = (C_{1'}$ -

x là 1 nghiệm của pt

$y = x^2$ và $y = x + x^2$ là 2 nghiệm của (1)

$\Rightarrow$ $y_1 = (x + x^2) - x^2$ là nghiệm của pt thuần nhất

$\Rightarrow y_1 = x$ $\Rightarrow$ $$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow y_2 = x\int \frac{e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

$$= x\left(-\arctan x - \frac{1}{x}\right) = -x\arctan x - 1$$

$y_0 = C_1x + C_2(x\arctan x + 1)$ (NTQ của pt thuần nhất)

Nghiệm TQ của (1)

$y = C_1x + C_2(x\arctan x + 1) + x^2$

PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 2 HỆ SỐ HẰNG

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

(a, b là hằng số)

Bước 1: Giải pt thuần nhất : $y'' + ay' + by = 0$

Bước 2: tìm 1 nghiệm riêng của pt không thuần nhất

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Cách xác định nghiệm tổng quát của pt thuần nhất

Giải phương trình đặc trưng: $\boxed{k^2 + ak + b = 0}$

- k_1, k_2 là nghiệm thực phân biệt:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$$

- k là nghiệm kép: $y_1 = e^{kx}, \; y_2 = xe^{kx}$

- $k = \alpha \pm i\beta$ (phức): $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Ví dụ

1. y" – 3y' – 4y = 0,

Ptđt: $k^2 - 3k - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow k = -1, k = 4$

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{4x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

2. y" – 2y' + y = 0,

Ptđt: $k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 1$ (kép)

$$y_1 = e^{x}, y_2 = xe^{x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x}$$

3. y" – 2y' + 5y = 0,

Ptđt: $k^2 - 2k + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 1 \pm 2i$

$$y_1 = e^{1x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{1x}\sin 2x$$

$$\Rightarrow y_0 = C_1 e^{x}\cos 2x + C_2 e^{x}\sin 2x$$

Tìm nghiệm riêng y_r của pt $y'' + ay' + by = f(x)$

Biến thiên bằng số

Trong y_0, xem $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, giải hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$y_r = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

Ví dụ

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$$

Pt thuần nhất : $y'' + 3y' + 2y = 0$ $(k^2 + 3k + 2 = 0)$

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-2x} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Xem C_1 và C_2 là các hàm theo x, giải hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(-2e^{-2x}) = \sin(e^x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow C_1'(x) = e^x \sin(e^x), C_2'(x) = -e^{2x}\sin(e^x)$$

Chọn: $C_1(x) = -\cos(e^x)$, $C_2(x) = e^x\cos(e^x) – \sin(e^x)$

$$y_r = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

$$y_r = -e^{-x}\cos(e^x) + e^{-2x}[e^x\cos(e^x) – \sin(e^x)]$$

$$= -e^{-2x}\sin(e^x)$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \qquad y_r = -e^{-2x}\sin(e^x)$$

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-2x}\sin(e^x)$$

PP hệ số bất định tìm y_r

Áp dụng nếu: $\boxed{f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]}$

P_m, Q_n là các đa thức bậc m, n.

- Xác định các hằng số α, β và s = max(m, n)

Lưu ý : vắng $e^{\alpha x}$: xem $\alpha = 0$

vắng cos, sin: xem $\beta = 0$

s là bậc của đa thức trong f (x)

- Định dạng y_r

- Nếu $\alpha + i\beta$ không là nghiệm pt đặc trưng

$$y_r = e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$$

- Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội p của pt đặc trưng (p = 1, 2)

$$y_r = x^p e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$$

Các đa thức R_s, T_s được xác định khi thay y_r vào pt không thuần nhất.

VÍ DỤ

(1) $$\boxed{y'' + y = \underbrace{x^2 + x}_{f(x)}}$$

Ptđt: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$\alpha = 0, \beta = 0, s = 2$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0$: không là nghiệm ptđt

$\Rightarrow y_r = Ax^2 + Bx + C$

$\Rightarrow y'_r = 2Ax + B,\ y_r'' = 2A$

Thay y_r vào (1):

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x, \quad \forall x$$

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x, \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow A = 1, B = 1, 2A + C = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1, B = 1, C = -2$$

$$y_r = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow y = y_0 + y_r$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2$$

(2) $\underbrace{\boxed{y'' + y' = x - 2}}_{f(x)}$ Ptđt: $k^2+k=0 \Leftrightarrow k = 0, k = -1$

$$y_0 = C_1e^{0x} + C_2e^{-x}$$

$\alpha = 0, \beta = 0, s = 1$

$\alpha + i\beta = 0$: là nghiệm đơn của ptđt (p =1)

$\Rightarrow y_r = x^1 (Ax + B) = Ax^2 + Bx$

$\Rightarrow y'_r = 2Ax + B, y_r'' = 2A$

Thay y_r vào (2):

$$2A + 2Ax + B = x - 2 , \quad \forall x$$

$2A + 2Ax + B = x - 2, \quad \forall x$

$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -3$

$$y_r = \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

Nghiệm TQ của (2):

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

(3) $\boxed{y'' - y = x\sin x}$ Ptđt: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

$f(x) = x\sin x \quad \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1$

$\Rightarrow \alpha + i\beta = i$: không là nghiệm ptđt

$$y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

$$y'_r = (Cx + A + D)\cos x - (Ax + B - C)\sin x$$

$$y_r'' = -(Ax + B - 2C)\cos x - (Cx + 2A + D)\sin x$$

Thay y_r vào (3):

(– 2Ax – 2B + 2C) cosx + (– 2Cx – 2A + 2D)sinx = xsinx

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2Ax - 2B + 2C = 0 \\ -2Cx - 2A + 2D = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0,\ B = C \\ C = -1/2,\ A = D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0,\ B = -1/2 \\ C = -1/2,\ D = 0 \end{cases} \qquad y_r = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$$

Nghiệm TQ (3):

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$$

(4) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + \sin x}$

Ptđt: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -2$ (bội p =2)

$f(x) = e^{-2x} + \sin x$ không có dạng đặc biệt

$f_1(x) = e^{-2x}$ $\alpha_1 = -2, \beta_1 = 0, s_1 = 0$

$$\boxed{y_{r1} = x^2 A e^{-2x}}$$

Thay y_{r1} vào pt: $y'' + 4y' + 4y = f_1(x) = e^{-2x}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow y_{r1} = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

$f_2(x) = \sin x$ (k = -2) $\alpha_2 = , \beta_2 = 1, s_2 = 0$

$$\boxed{y_{r2} = B\cos x + C\sin x}$$

Thay y_{r2} vào pt: $y'' + 4y' + 4y = f_2(x) = \sin x$

$\Rightarrow B = -4/7$, $C = -3/7$

$$\Rightarrow y_{r2} = \frac{-4}{7}\cos x - \frac{3}{7}\sin x$$

$\boxed{y_r = y_{r1} + y_{r2}}$ (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

PHƯƠNG TRÌNH EURLER

$(ax + b)^2y'' + p(ax + b)y' + qy = f(x)$ (a, b, p, q là hằng số)

Đổi biến : $t = \ln|ax + b| \Leftrightarrow ax + b = \pm e^t$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{a}{ax+b} = \frac{dy}{dt}\left(\pm ae^{-t}\right)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\pm ae^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\left(\pm a e^{-t}\right), \qquad y'' = a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Thay vào pt ban đầu:

$$e^{2t} a^2 e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + p\left(\pm e^{t}\right)\left(\pm a e^{-t}\right)\frac{dy}{dt} + qy =$$

$$\boxed{a^2 \frac{d^2y}{dt^2} + (ap - a^2)\frac{dy}{dt} + qy = F(t)}$$

Tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ

$(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' - 12y = 0$, trên miền $2x+1 > 0$

Đặt : $2x + 1 = e^t$ hay $t = \ln(2x + 1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{2}{2x+1} = 2\frac{dy}{dt}e^{-t} = 2y'_t e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(2e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= 4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = 4e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

$$y' = 2y'_t e^{-t}, \quad y'' = 4e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

$(2x + 1)^2 y'' – 2(2x + 1)y' – 12y = 0,$ $2x + 1 = e^t$

Pt trở thành:

$$e^{2t} 4e^{-2t}(y''_t - y'_t) - 2e^t 2e^{-t} y'_t - 12y = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y''_t - 8y'_t - 12y = 0 \qquad \Leftrightarrow y''_t - 2y'_t - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \Leftrightarrow y = \frac{C_1}{2x+1} + C_2(2x+1)^3$$

Giải pt: $x^2y'' - xy' - y = \ln x.\sin(\ln x)$ $(x > 0)$

Đặt: $t = \ln x$ hay $x = e^t$

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = y'_t e^{-t},$$

$$y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

Thay vào pt:

$$e^{2t}e^{-2t}(y''_t - y'_t) - e^t e^{-t} y'_t - y = t\sin t$$

$$e^{2t}e^{-2t}(y''_t - y'_t) - e^{t}e^{-t}y'_t - y = t\sin t$$

$$\Leftrightarrow y''_t - y = t\sin t$$

$$\Leftrightarrow y = C_1e^{t} + C_2e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\sin t$$

$$\Leftrightarrow y = C_1x + \frac{C_2}{x} - \frac{1}{2}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\ln x\sin(\ln x)$$