KHAI TRIỂN TAYLOR

Công thức khai triển Taylor với phần dư Lagrange

f có đạo hàm cấp n+1 trong (a, b) chứa x_0:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n}$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \text{c nằm giữa x và } x_0$$

(khai triển Taylor đến cấp n trong lân cận x_0)

Công thức khai triển Taylor với phần dư Peano

f có đạo hàm cấp n tại x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Phần dư Peano.

$x_0 = 0$: khai triển Maclaurin.

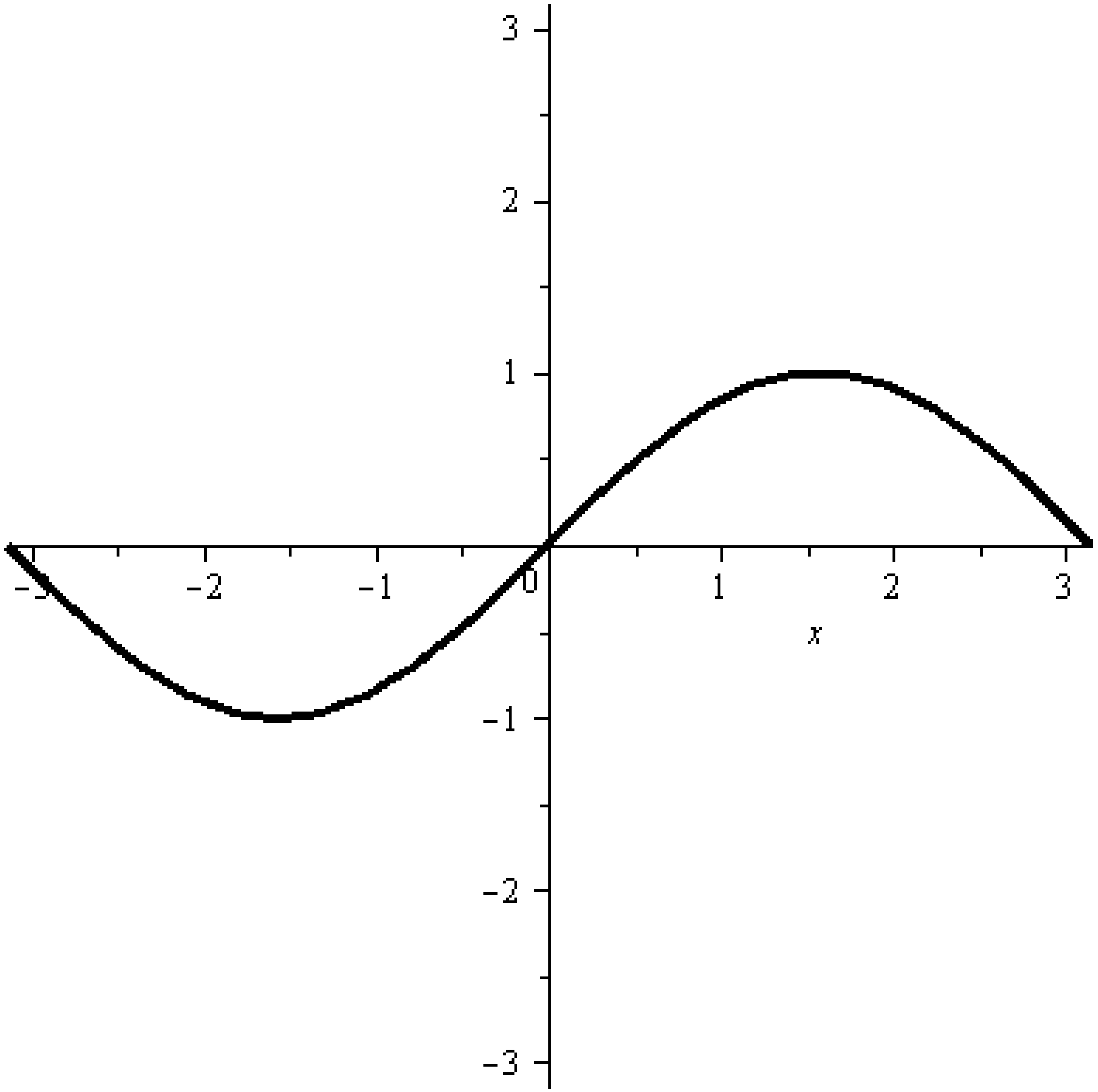
Ý nghĩa của khai triển Taylor

f(x): biểu thức phức tạp

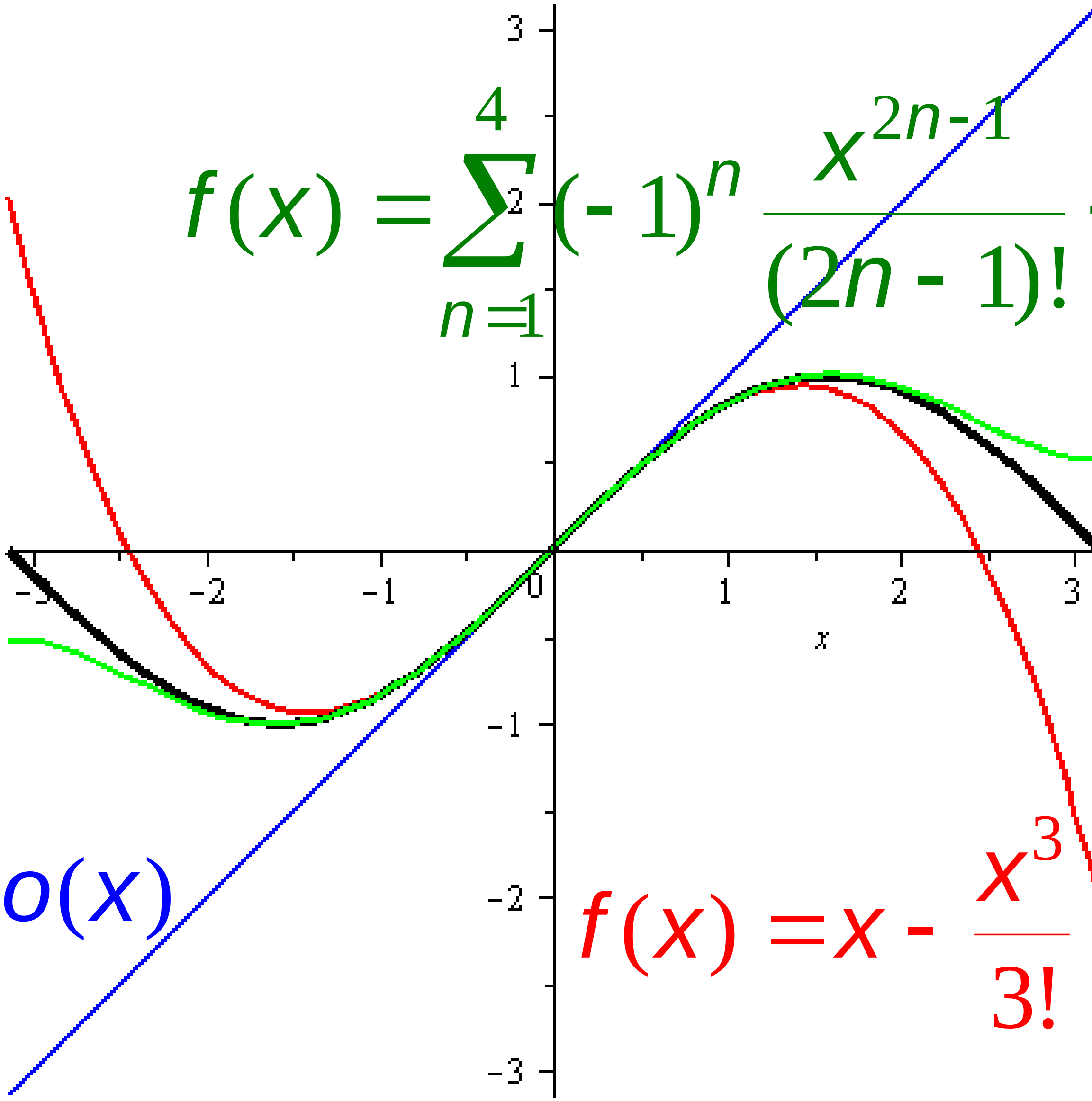
$\Rightarrow$ cần tìm 1 hàm số đơn giản hơn và gần bằng f(x) để thuận tiện trong tính toán.

Hàm đơn giản nhất là đa thức.

$f(x) = \sin x$



f(x) = sinx



$$f(x)=\sum_{n=1}^{4}(-1)^{n}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{7})$$

$$f(x)=x+o(x)$$

$$f(x)=x-\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})$$

Ví dụ 1.

Tìm khai triển Taylor đến cấp 3 trong lân cận x = 1 cho

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(khai triển f thành đa thức theo lũy thừa của (x – 1) đến $(x-1)^3$)

- Với phần dư Peano, chỉ cần tính đến đh cấp 3.
- Với phần dư Lagrange, phải tính đến đh cấp 4.

$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(1)=1 \qquad f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1)=2 \qquad \boxed{f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}}$$

$$f'''(x)=-\frac{6}{x^4} \Rightarrow f'''(1)=-6$$

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$$

$$=1-\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\underbrace{o\left((x-1)^3\right)}_{\text{Phần dư Peano}}$$

Nếu dùng phần dư Lagrange:

$$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + R_3$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 = \frac{1}{4!}\frac{24}{c^5}(x-1)^4 = \frac{(x-1)^4}{c^5}$$

Ví dụ 2

Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 cho f(x) = tan x

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \qquad f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$$

$$f'''(x) = 2(1 + \tan^2 x) + 6\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 + o\left((x - 0)^3\right)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ví dụ 3

Biết f(x) là đa thức bậc 3, với f(2) = 0, f'(2) = -1, f ''(2) = 4, f '''(2) = 12, tìm f(1), f '(1)

Vì f(x) là đa thức bậc 3 nên $f^{(4)}(x) = 0$

$\Rightarrow$ Khai triển Taylor của f đên cấp 3 không có phần dư.

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$=0-\frac{1}{1!}(x-2)+\frac{4}{2!}(x-2)^2+\frac{12}{3!}(x-2)^3$$

$$=-(x-2)+2(x-2)^2+2(x-2)^3$$

$$\Rightarrow f'(x)=-1+4(x-2)+6(x-2)^2$$

$$\Rightarrow f(1)=1, f'(1)=1$$

Bảng công thức kt Maclaurin cơ bản

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\left(hay + o\left(x^{2n}\right)\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\left(hay + o\left(x^{2n+1}\right)\right)$$

Khai triển Maclaurin của arctan và hyperbolic

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

Giống sinx, cosx nhưng không đan dấu

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o\left(x^{2n-1}\right)$$

Giống sinx, nhưng mẫu số không có giai thừa.

Lưu ý về thay tương đương cho sinh, cosh

$$\sinh x = x + \underbrace{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)}_{\text{bậc cao hơn x (khi x} \to 0\text{)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sinh x \sim x, \; \boldsymbol{khi} \; x \to 0}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}, \; \boldsymbol{khi} \; x \to 0}$$

Ví dụ áp dụng

1. Tìm khai triển Taylor đến cấp 3 trong lân cận x = 1 cho:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$x_0 = 1 \neq 0$, đặt biến phụ : $u = x - x_0 = x - 1$

$$f(x) = \frac{1}{1+u} \qquad = 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$$

Trả về biến cũ:

$$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

2. Tìm khai triển Taylor đến cấp 3 trong lân cận x = 1 cho:

$$f(x) = \ln(x+2)$$

u = x – 1

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$f(x) = \ln(3+u) \quad = \ln(1+2+u)$$

$$= 2 + u - \cancel{\frac{(2+u)^2}{2}} + \frac{(2+u)^3}{3} + o\left((2+u)^3\right)$$

Sai! (u + 2) $\neq$ 0 khi u = 0 (hay x = 1)

$$f(x) = \ln(3 + u)$$

$$\xrightarrow{x \to 1} 0$$

$$= \ln 3\left(1 + \frac{u}{3}\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{u}{3}\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{u}{3} - \frac{\left(\frac{u}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{u}{3}\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{u}{3}\right)^3\right)$$

$$= \ln 3 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{18}u^2 + \frac{1}{81}u^3 + o(u^3)$$

Nhớ trả về x

3. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 3 cho:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{-1}{5(x+1)} + \frac{6}{5(x-4)}$$

$$= \frac{-1}{5}\frac{1}{x+1} - \frac{6}{20}\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

<u>Lưu ý</u>: khi khai triển cho f+g, mỗi hàm phải khai triển đến bậc được yêu cầu.

$$f(x)=\frac{-1}{5}\frac{1}{x+1}-\frac{6}{20}\frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

$$=\frac{-1}{5}\left(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\right)$$

$$-\frac{6}{20}\left[1-\left(-\frac{x}{4}\right)+\left(-\frac{x}{4}\right)^2-\left(-\frac{x}{4}\right)^3+o\left(\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{-1}{2}+\frac{1}{8}x-\frac{7}{32}x^2+\frac{25}{128}x^3+o(x^3)$$

4. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 3 cho:

$$f(x) = e^x.\ln(1+x)$$

1. Khi tích các khai triển, chỉ giữ lại tất cả các lũy thừa từ bậc yêu cầu trở xuống và xếp thứ tự bậc từ thấp đến cao.
2. Tính bậc trong khai triển cấp n cho tích f.g:

Bậc thấp nhất trong khai triển của f là k

$\Rightarrow$g khai triển đến bậc (n – k)

Và ngược lại.

Bậc thấp nhất trong khai triển của e^x là x^0.

$\Rightarrow$ ln(1 + x) khai triển đến x^3 (vì $x^3.x^0 = x^3$)

Bậc thấp nhất trong khai triển của ln(1+x) là x^1

$\Rightarrow$ e^x khai triển đến x^2 (vì $x^2.x^1 = x^3$)

$$e^x \qquad\qquad \ln(1+x)$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

$$\begin{array}{c} \quad\quad 2 \quad\quad\quad 3 \\ f(x) = e^x \ln(1+x) \\ \quad (0) \quad\quad (1) \end{array}$$ khai triển cấp 3

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

5. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 3, cấp 4 cho:

$$f(x) = \sin x . \ln(1+x)$$

1. Khai triển cấp 4: 3 3

$$f(x) = \sin x . \ln(1+x)$$

(1) (1)

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^3)$$

2. Khai triển cấp 3:

$$f(x) = \underset{(1)}{\overset{2}{\sin x}} . \underset{(1)}{\overset{2}{\ln(1+x)}}$$

$$f(x) = \left(x + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

7. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 3 cho:

$$f(x) = e^{x - x^2}$$

Đặt $u(x) = x - x^2$ thì $u(0) = 0$

$\Rightarrow$ khai triển Maclaurin của f theo u.

Khi khai triển u theo x, giữ lại tất cả những lũy thừa từ x^3 trở xuống

$$f(x) = e^{x - x^2} = 1 + \left(x - x^2\right) + \frac{\left(x - x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - x^2\right)^3}{3!}$$

$$+ o\left(\left(x - x^2\right)^3\right)$$

$$\boxed{x - x^2 \sim x^1}$$

$$= 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Để tìm bậc khai triển của f theo u phải xác định bậc VCB của u theo x.

6. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 4 cho:

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos x - 1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2 \\ \text{Cần khai triển đến } x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{khai triển f đến } u^2$$

$$\ln(1 + \cos x - 1) = \cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o\left((\cos x - 1)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) - 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) - 1\right)^2 + o\left(x^4\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$$

7. Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 5 cho:

$$f(x) = \tan x$$

5 4

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x - 1}$$

(1) (0)

$$= \sin x \cdot \left[1 - (\cos x - 1) + (\cos x - 1)^2 + o\left((\cos x - 1)^2 \right) \right]$$

$$= \sin x \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 \right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 \right)^2 + o(x^4) \right]$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4) \right)$$

$$= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$$

Cách 2:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
\cline{2-2}
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\quad + \frac{2}{15}x^5 + o &
\end{array}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Bổ sung: tìm khai triển của f(x) = cosh x

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \right.$$

$$\left. + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \right] : 2$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

Bổ sung: tìm khai triển của f(x) = arctan x

$$f(x) = \arctan x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

Khai triển Maclaurin cho g(x) đến x^{2n}.

$$g(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = g(0) = 1$$

$$f''(0) = g'(0) = 0$$

$$f'''(0) = g''(0) = -1 \times 2!$$

$$f^{(2k)}(0) = g^{(2k-1)}(0) = 0$$

$$f^{(2k+1)}(0) = g^{(2k)}(0) = (-1)^k (2k)!$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \frac{f^{(2n+)}(0)}{(2n+)!}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o\left(x^{2n-1}\right)$$

Cách viết khai triển cho arctan là cách viết khai triển cho hàm ngược nói chung.

Các lưu ý khi viết khai triển Taylor tai x_0

1. Luôn luôn chuyển về khai triển Maclaurin

2. Áp dụng các công thức cơ bản trên biểu thức u(x) với điều kiện $u(x_0) = 0$.

3. Khai triển cho tổng hiệu: từng hàm phải khai triển đến bậc được yêu cầu.

4. Khai triển cho tích: lấy bậc yêu cầu trừ ra bậc thấp nhất trong kt mỗi hàm để biết được bậc kt của hàm còn lại.

5. Khai triển cho hàm hợp: tính bậc VCB cho u(x).

Áp dụng trong tính đạo hàm.

Bài toán: tìm đạo hàm cấp **n** của f tại x_0.

B1: Viết khai triển taylor theo $(x-x_0)$ đến cấp **n**

B2: Xác định hệ số của $(x-x_0)^n$ trong khai triển.

B3: Giả sử hệ số trong B2 là a

$$f^{(n)}(x_0) = a.n!$$

Ví dụ

1. Tìm đh cấp 3 tại x = 0, với f(x) = e^x.sinx

Khai triển Maclaurin đến cấp 3 của f là

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

Các số hạng chứa x^3 là: $-\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^3}{2!}$

⇒ Hệ số của x^3 là:

$$-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = \frac{1}{3} \cdot 3! = 2$$

2. Tìm đh cấp 3 tại x = 0, $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

Khai triển Maclaurin đến cấp 3 của f là

$$f(x) = x + x^2 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + \frac{(x + x^2)^3}{3} + o(x^3)$$

Các số hạng chứa x³ là: $-\frac{1}{2}\cdot 2x^3 \quad +\frac{1}{3}\cdot x^3$

⇒ Hệ số của x³ là: $-\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow f'''(0) = -\frac{2}{3}\cdot 3! = -4$$

3. Tìm đh cấp 12, 13 tại x = 0, $f(x) = \dfrac{1}{2 + x^3}$

Khai triển Maclaurin đến cấp 13 của f là

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{x^3}{2} \right) + \left(\frac{x^3}{2} \right)^2 - \left(\frac{x^3}{2} \right)^3 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^3}{2} \right)^4 - \left(\frac{x^3}{2} \right)^5 + o(\quad) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cdots + \frac{x^{12}}{16} + 0 + o\left(x^{13} \right) \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cdots + \frac{x^{12}}{16} + 0 + o\left(x^{13}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Hệ số của } x^{12} \text{ là: } & -\dfrac{2}{3} \\ \text{Hệ số của } x^{13} \text{ là: } & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(12)}(0) = \frac{1}{16} \cdot 12!\ ,\quad f^{(13)}(0) = 0 \cdot 13!$$

Áp dụng khai triển Taylor trong tính giới hạn

1. Thông thường chỉ áp dụng kt Tayor để tính gh nếu các pp khác (gh cơ bản, VCB, L'Hospital) tính quá dài hoặc không tính được.

2. Đa số các bài dùng Taylor rơi vào trường hợp thay VCB hoặc VCL qua tổng, hiệu gặp triệt tiêu.

   Do đó các biểu thức được khai triển đến khi hết triệt tiêu ở phần đa thức thì dừng, phần VCB bậc cao bỏ đi khi tính lim

Ví dụ

1. Tìm các hằng số a,p để VCB $\alpha(x) \sim ax^p$ khi $x \to 0$.

$$a/\ \alpha(x) = x - \sin x$$

$$= x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^3) \right)$$

$$= \frac{x^3}{3!} + 0(x^3)$$

$$\sim \frac{x^3}{3!} \qquad \Rightarrow a = \frac{1}{6}, p = 3$$

$$b / \alpha(x) = 2x - e^{x} + e^{-x}$$

$$= 2x - 2\sinh x$$

$$= 2x - 2\left(x + \frac{x^{3}}{3!} + o(x^{3}) \right) \sim 2x^{3}$$

$$c/\alpha(x) = \sin x - x\cos x$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \sim \frac{x^3}{3}$$

2. Tính giới hạn:

$$a/\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\frac{1}{5}.5x+\frac{1}{2!}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)(5x)^2+o(x^2)-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{-x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{-x^2}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$b/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\tan x}}{x^{3}+3x^{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\tan x}\frac{e^{x-\tan x}-1}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0} 1\frac{x-\tan x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x-\dfrac{x^{3}}{3}+o(x^{3})}{x^{3}}\quad=-\frac{1}{3}$$