KHẢO SÁT HÀM SỐ

HÀM SỐ $y = f(x)$

1. Khảo sát sự biến thiên, cực trị.
2. Khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn.
3. Khảo sát tiệm cận.
4. Vẽ đồ thị.

SỰ BiẾN THIÊN

f(x) tăng (giảm) trong (a,b)

$\Leftrightarrow \ \forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)\ (f(x_1) \ge f(x_2))$

Bỏ dấu " = " : tăng (tăng chặt)

f khả vi trong (a,b):

- *f tăng trong (a,b)* $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0,\ \forall x \in (a,b)$
- *f tăng chặt trong (a,b)* $\Leftrightarrow f'(x) > 0,\ \forall x \in (a,b)$

(Giảm được thay bởi $\le$ và <.)

CỰC TRỊ

x_0 là điểm cực đại của f

$\Leftrightarrow \exists(a,b) \ni x_0$: $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (a,b)$

Tương tự
cho cực tiểu

Điều kiện cần: ***f ñaït cöïc trò taïi x_0 , neáu f coù ñaïo haøm taïi x_0 thì f'(x_0) = 0.***
(ñieåm cöïc trò laø ñieåm tôùi haïn).

Điều kiện đủ: ***f lieân tuïc taïi x_0 , khaû vi trong laân caän x_0 (khoâng caàn kvi taïi x_0), neáu khi ñi qua x_0***

- ***f' ñoåi daáu töø (+) sang (-) thì f ñaït cöïc ñaïi taïi x_0.***

TÌM CỰC TRỊ NHỜ ĐẠO HÀM CẤP CAO

$f'(x_0) = 0$: $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{f đạt cực tiểu chặt } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{f đạt cực đại chặt tại } x_0. \end{cases}$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Nếu n chẵn thì f đạt cực trị tại x_0:

$f^{(n)}(x_0) > 0$: CT

$f^{(n)}(x_0) < 0$: CĐ

Nếu n lẻ thì f không đạt cực trị tại x_0

Ví dụ

Tìm cực trị: $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$

$$= \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$

(Với x $\neq$ -1 và x $\neq$ 2)

f’ cùng dấu tử số : $g(x) = x(x-2)$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$$

Bảng xét dấu $\qquad g(x) = x(x-2)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$f' cũng đổi dấu khi đi qua 0 và 2

Kết luận: $\begin{cases} \text{f đạt cực đại tại } x_0 = 0 \\ \text{f đạt cực tiểu tại } x_1 = 2 \end{cases}$

Khoâng caàn xaùc ñònh f'(-1), f'(2)

(chæ caàn f lieân tuïc taïi 2)

Tìm cực trị: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Miền xác định: $-\infty < x \leq 0$, $2 < x < +\infty$

$$y' = \frac{\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}} = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

Kết luận: đi qua x = 3, y’ đổi dấu từ (-) sang (+) nên y đạt cực tiểu tại x = 3.

Tìm cực trị $f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, f(0) = 0$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$ (x ≠ 0)

f' không đổi dấu trên toàn bộ MXĐ nên không có cực trị.

TiỆM CẬN y = f(x)

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\infty \longrightarrow$$ Tiệm cận đứng $x = x_0$

$$\lim_{x\to(\pm)\infty} f(x)=a \longrightarrow$$ Tiệm cận ngang y = a

$$\lim_{x\to(\pm)\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to(\pm)\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\ \lim_{x\to(\pm)\infty}[f(x)-ax]=b$$

$\longrightarrow$ Tiệm cận xiên y = ax + b

Nếu viết được f(x) = ax + b + α(x), α(x) là VCB khi $x\to\infty$ thì TCX là y = ax + b

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} + 2x - 1$

Miền xác định: $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$

$\underline{x \to -1^+}$: $f(x) \to +\infty$: TCĐ x = -1

$\underline{x \to +\infty}$: $f(x) \to +\infty$: có thể có TCX

$$\alpha(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$f(x) = 2x - 1 + \alpha(x)$$ $\Rightarrow$ TCX : y =2x – 1

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Miền xác định: $-\infty < x \leq 0,\ 2 < x < +\infty$

$x \to 2^+$: $f(x) \to +\infty$: TCĐ $x = 2$

$x \to \pm\infty$: $f(x) \to +\infty$: có thể có TCX

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm 1$$

{a = 1, $x \to +\infty$}, {a = -1, $x \to -\infty$}

$\boxed{x \to +\infty}$ (a = 1)

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \frac{1}{2} \frac{2}{x-2} = 1$$

TCX $y = x + 1$

$\boxed{x \to -\infty}$ (a = -1)

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{x-2} \right) = -1$$

TCX y = – x – 1

Có thể tìm tiệm cận xiên bằng khai triển Taylor

$\boxed{x \to +\infty}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = x\sqrt{\frac{x}{x-2}} = x\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x-2} + 0\left(\frac{1}{x-2}\right)\right]$$

$$= x + \frac{x}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= x + \frac{x}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= x + 1 + \frac{2}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= x + 1 + \alpha(x),$$

$$vôùi\ \alpha(x) = \frac{2}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ TCX: y = x+1

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

MXĐ: R\\{1}

$x \to 1^-$: $\frac{x}{x-1} \to -\infty$

$f(x) \to +\infty \longrightarrow$ không có tiệm cận đứng

$x \to 1^+$: $\frac{x}{x-1} \to +\infty$

$f(x) \to +\infty \longrightarrow$ **TCĐ x = 1**

$x \to \pm\infty$: f(x) $\to \pm\infty$: có thể có TCX.

$$\boxed{f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{x}{x-1}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} e$$

$$f(x) - ex = (x-1)e^{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)} - ex$$

$$= ex\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) - e^{\frac{x}{x-1}} \to e - e = 0$$

$\boxed{\text{TCX: } y = ex}$

Vẽ đồ thị

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

MXĐ: -∞ < x ≤ 0, 2 < x < + ∞

$$y = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

Tiệm cận: $x \to 2^+$: f(x) → +∞ : TCĐ x = 2

$x \to +\infty$: TCX y = x + 1

$x \to -\infty$: TCX y = -x - 1

Baûng bieán thieân

$$y' = (x-3)\sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

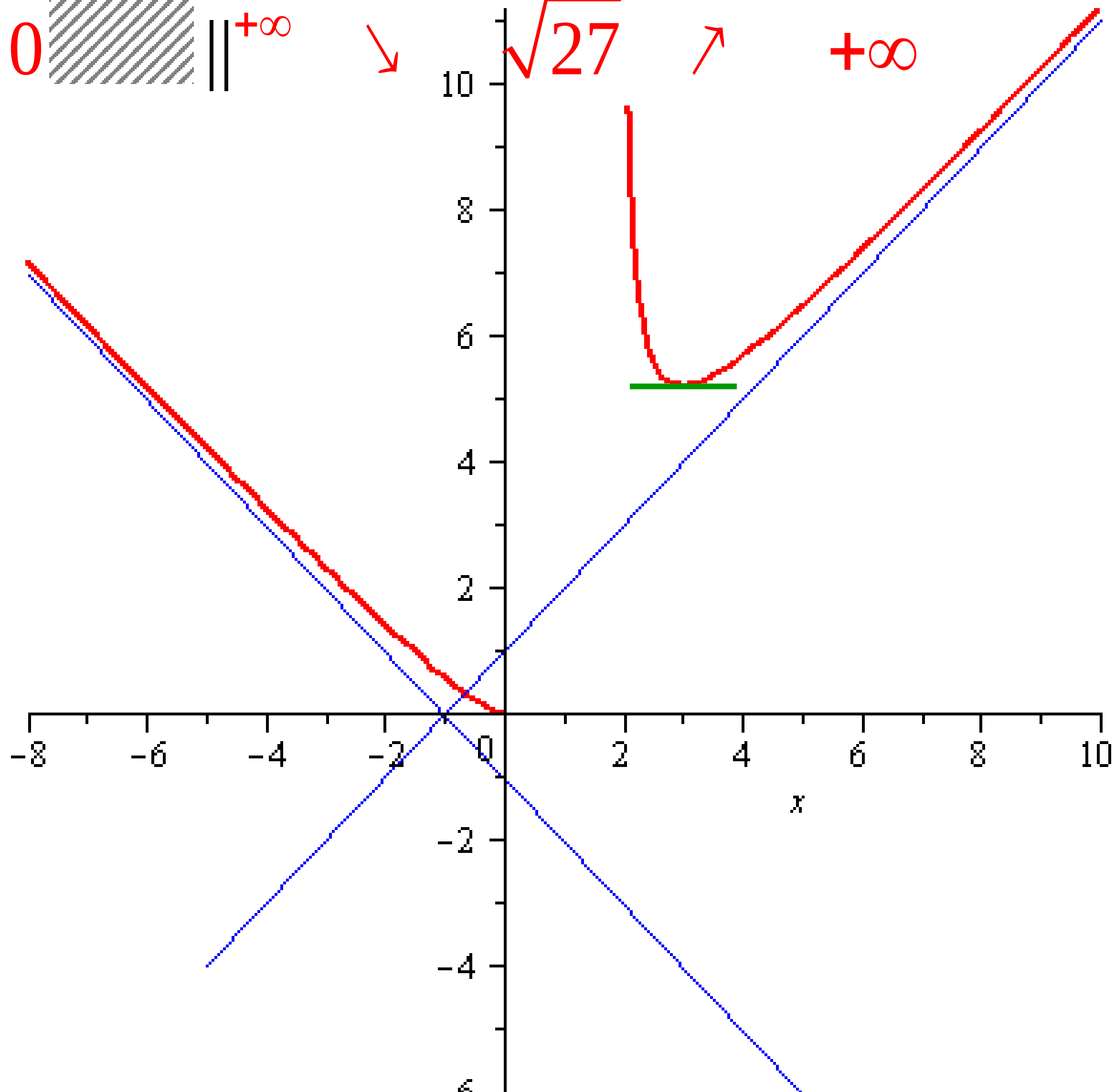
x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

TCX
y=-x-1

TCĐ
x=2

TCX
y=x+1

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0		$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0		$\|\|^{+\infty}$	↘	$\sqrt{27}$	↗	$+\infty$



Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

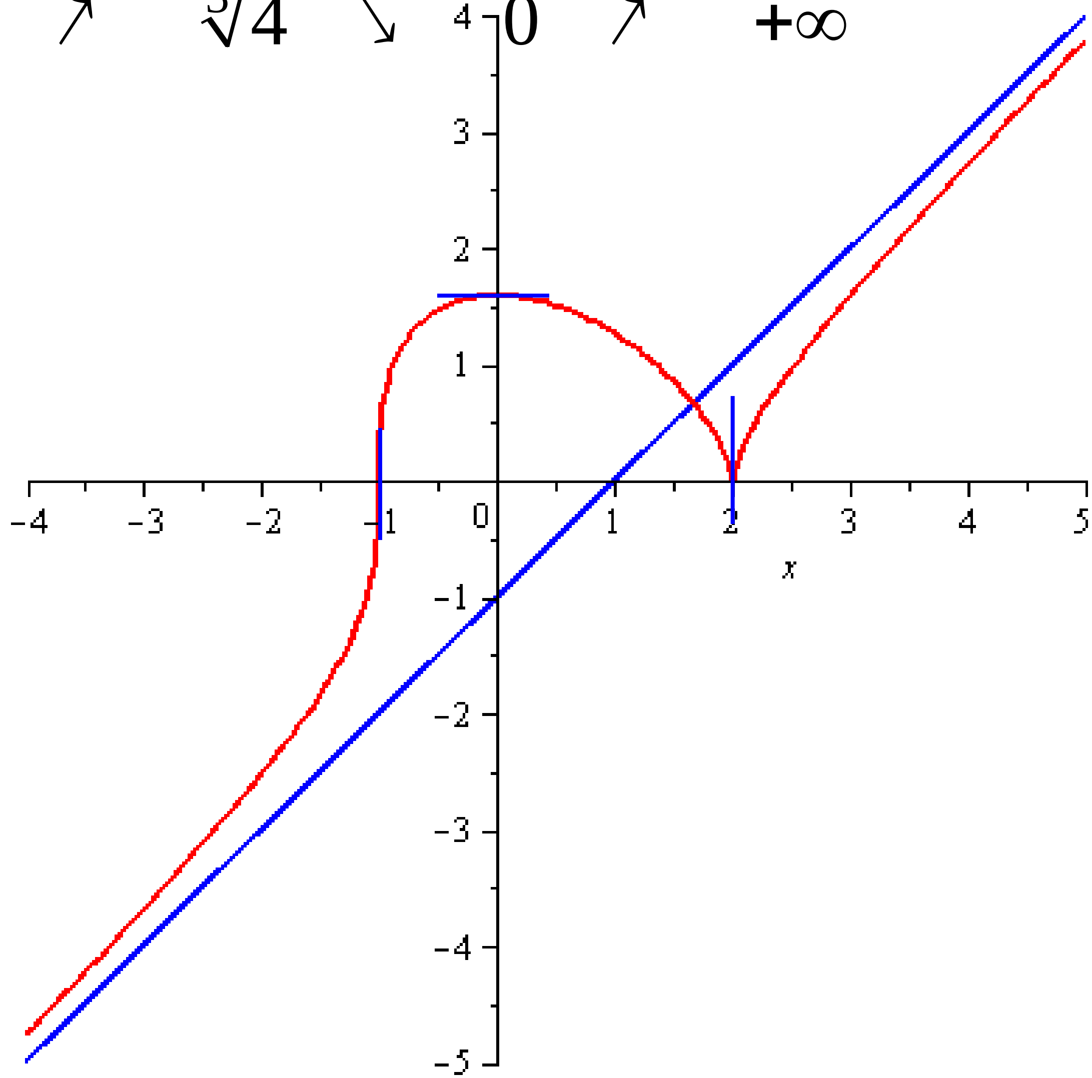
$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{\left[(x+1)(x-2)^2\right]^2}}$$

TCX : y = x-1, x→ ± ∞

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

TCX y=x-1	TT//oy	TT//ox	TT//oy	TCX y=x-1

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- NHỎ NHẤT

Loại 1: tìm gtln, gtnn trên toàn miền xác đỊnh

$\Rightarrow$ khảo sát hàm số

Loại 2: tìm gtln, gtnn trên [a, b]

B1: Tìm các điểm tới hạn trong (a, b)

B2: so sánh giá trị của f tại các điểm tới hạn và f(a), f(b) để rút ra min, max.

VÍ DỤ

1/ Tìm gtln, gtnn $f(x) = x^x$

MXĐ: (0, +∞). f'(x) = x^x (lnx + 1)

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	$e^{-1/e}$	↗	$+\infty$

Kết luận: gtln không có, gtnn là f(1/e) = $e^{-1/e}$

2/ Tìm gtln, gtnn trên [0, 2]: $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1} = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

(1 điểm tới hạn)

f(0) = 0, f(1) = arctan(1/2), f(2) = arctan (2/5)

$\Rightarrow$ f_{max} = f(1) =arctan (1/2), f_{min} = f(0) = 0

3/ Tìm gtln, gtnn trên [-3, 2]: $f(x) = |x|(x+2)$

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2), -3 \le x \le 0 \\ x(x+2), 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2, -3 < x < 0 \\ 2x+2, 0 < x < 2 \end{cases}$$

Điểm phân chia biểu thức được xem là 1 điểm tới hạn khi tìm min, max, *không cần tính đạo hàm*

f'(x) = 0 ⇔ x = -1 ∈ (-3, 2)

So sánh f(-3), f(-1), f(0), f(2) để tìm min, max

KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM THAM SỐ

$$x = x(t), y = y(t)$$

Tìm MXĐ và liên tục của x(t), y(t)

- Xét tính tuần hoàn, đối xứng (khác y = f(x))
- Tính x’(t), y’(t) và lập bảng biến thiên.
- Tìm tiệm cận(nếu có)
- Vẽ đồ thị.

CỰC TRỊ HÀM THAM SỐ

$x = x(t),\ y = y(t)$

- Bước 1: tính $x'(t)$, $y'(t)$ ⇒ các giá trị đặc biệt
- Bước 2 : lập bảng biến thiên

t		t_0		t_1		t_2		t_3	
$x'(t)$									
$x(t)$	↗	x_0	↗	x_1	↘	x_2	↘	x_3	↘
$y'(t)$									
$y(t)$		y_0		y_1		y_2		y_3	
$y'(x)$	+	|	-	|	+	|	+	|	-
		CĐ		K		K		CT	

Đi qua x_j
đổi dấu th
cực trị (th
x_j . Giá tr
là y_j

Tìm cực trị $x = te^{t},\ y = te^{-t}$

$$x'(t) = (1+t)e^{t} \to t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \to t_1 = 1$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x(t)$		$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	e	$\nearrow$	
$y'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$y(t)$		$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	
$y'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

y đạt cực đại tại x = e (t=1), $y_{cđ} = 1/e$

Tìm cực trị $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$

$$x' = 2 - 2t \rightarrow t_0 = 1$$

$$y' = 4t - 3t^2 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 4/3$$

t	$-\infty$		0		1		$4/3$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x(t)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$8/9$	$\searrow$	
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$y(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$32/27$	$\searrow$	
$y'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

CT **CĐ**

TiỆM CẬN HÀM THAM SỐ x = x(t), y = y(t)

- Bước 1: tìm tìm tất cả các giá trị t_0 sao cho
  $x(t) \to \infty$ hay $y(t) \to \infty$ (t_0 có thể là ∞)

- Bước 2: xác định loại TC

Khi $t \to t_0$

$x(t) \to a$, $y(t) \to \infty$: TC đứng x = a

$x(t) \to \infty$, $y(t) \to a$: TC ngang y = a

$x(t) \to \infty$, $y(t) \to \infty$, $\begin{cases} \dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \\ y(y) - ax(t) \to b \end{cases}$: TC xiên y = ax + b

Tìm tiệm cận hs $x = te^{t}, y = te^{-t}$

<u>Bước 1:</u>

$$\begin{cases} x(t) \to \infty \text{ khi } t \to +\infty \\ y(t) \to \infty \text{ khi } t \to -\infty \end{cases}$$

<u>Bước 2:</u>

- $t \to +\infty$, $x(t) \to +\infty$, $y(t) \to 0$: TCN : $y = 0$
- $t \to -\infty$, $x(t) \to 0$, $y(t) \to -\infty$: TCĐ : $x = 0$

Tìm tiệm cận hs $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1}, y(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$

$$\begin{cases} x(t) \to \infty \text{ khi } t \to \pm\infty \text{ hay } t \to 1 \\ y(t) \to \infty \text{ khi } t \to \pm 1 \end{cases}$$

- $\underline{t \to \pm\infty}$: $x(t) \to \infty$, $y(t) \to 0$: TCN y = 0
- $\underline{t \to -1}$: $x(t) \to -1/2$, $y(t) \to \infty$: TCĐ x = -1/2

$$x(t)=\frac{t^2}{t-1},\ y(t)=\frac{t}{t^2-1}$$

❖ **<u>t → 1</u> : x(t) → ∞ , y(t) → ∞**

$$*\quad \lim_{t\to 1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 1}\frac{t}{t^2-1}\times\frac{t-1}{t^2}=\frac{1}{2}$$

$$*\quad \lim_{t\to 1}\left[y(t)-\frac{1}{2}x(t)\right]=\lim_{t\to 1}\left[\frac{t}{t^2-1}-\frac{t^2}{2(t-1)}\right]$$

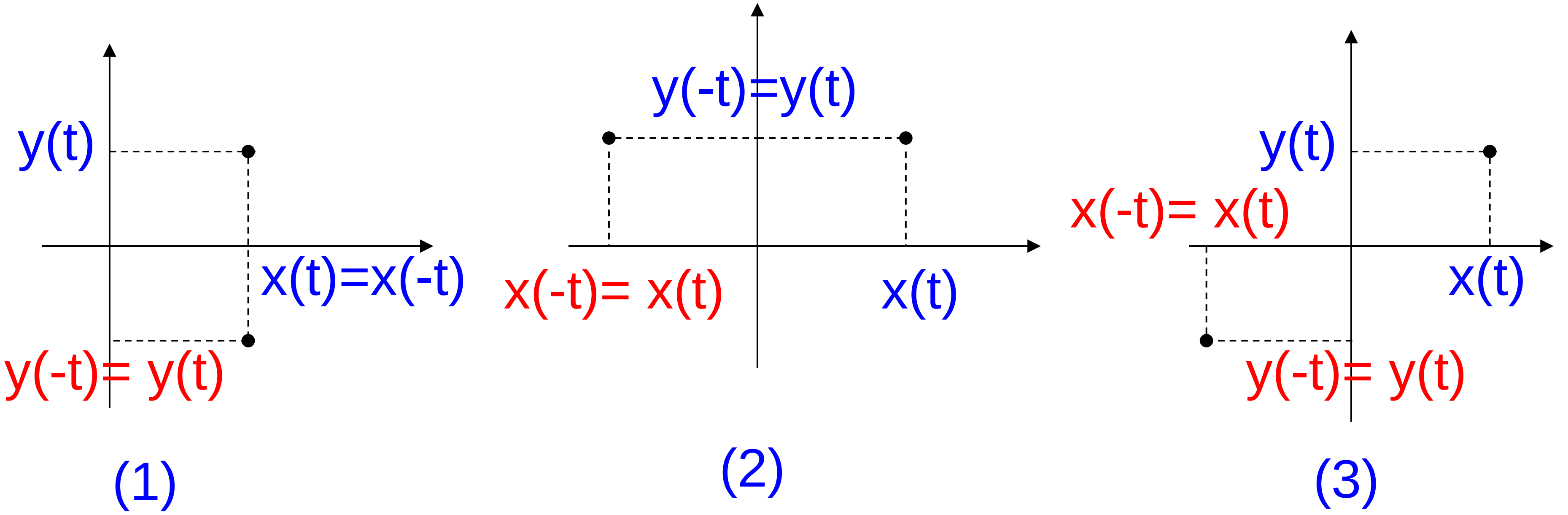
$$=\lim_{t\to 1}\frac{-t}{2(t^2-1)}\times(t^2+t-2)=\frac{-3}{4}$$

TCX $\boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}$

VỀ TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG ĐƯỜNG CONG THAM SỐ

1. x(t) chẵn, y(t) lẻ: đt đối xứng qua ox
2. x(t) lẻ, y(t) chẵn: đt đối xứng qua oy
3. x(t) lẻ, y(t) lẻ: đt đối xứng qua gốc tđ

Chỉ ks phần $t \geq 0$



VỀ TÍNH TUẦN HOÀN TRONG ĐC THAM SỐ

1.x(t) TH chu kyø T_1, y(t) TH chu kyø T_2

⇒ Chæ khaûo saùt vaø veõ trong 1 chu kyø T =bscnn(T_1,T_2)

2. x(t + T) = x(t) + A, y(t) TH chu kyø T

⇒ Ñc y = y(x) TH vôùi chu kyø A

⇒ Chæ khaûo saùt trong 1 chu kyø T(veõ laäp laïi theo tính TH cuûa haøm soá y = f(x))

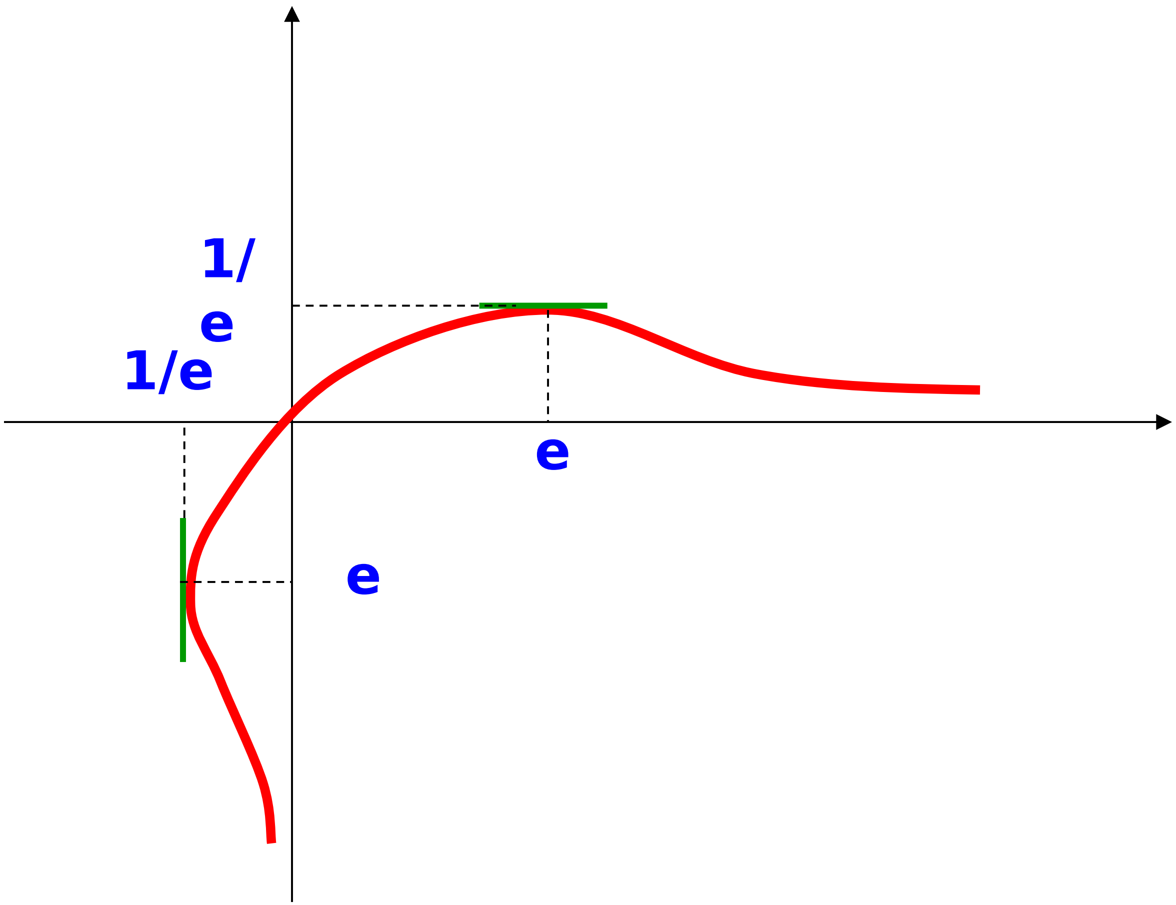
Vẽ dồ thị hs $x = te^{t}, \; y = te^{-t}$

$$x'(t) = (1+t)e^{t} \rightarrow t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \rightarrow t_1 = 1$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0
$y'(x)$		$+$	∞	$-$	0	$+$	
	TCĐ x=0		TTÑ (// oy)		TTN (// ox)		TCN y=0

Veõ ñoà thò hs:

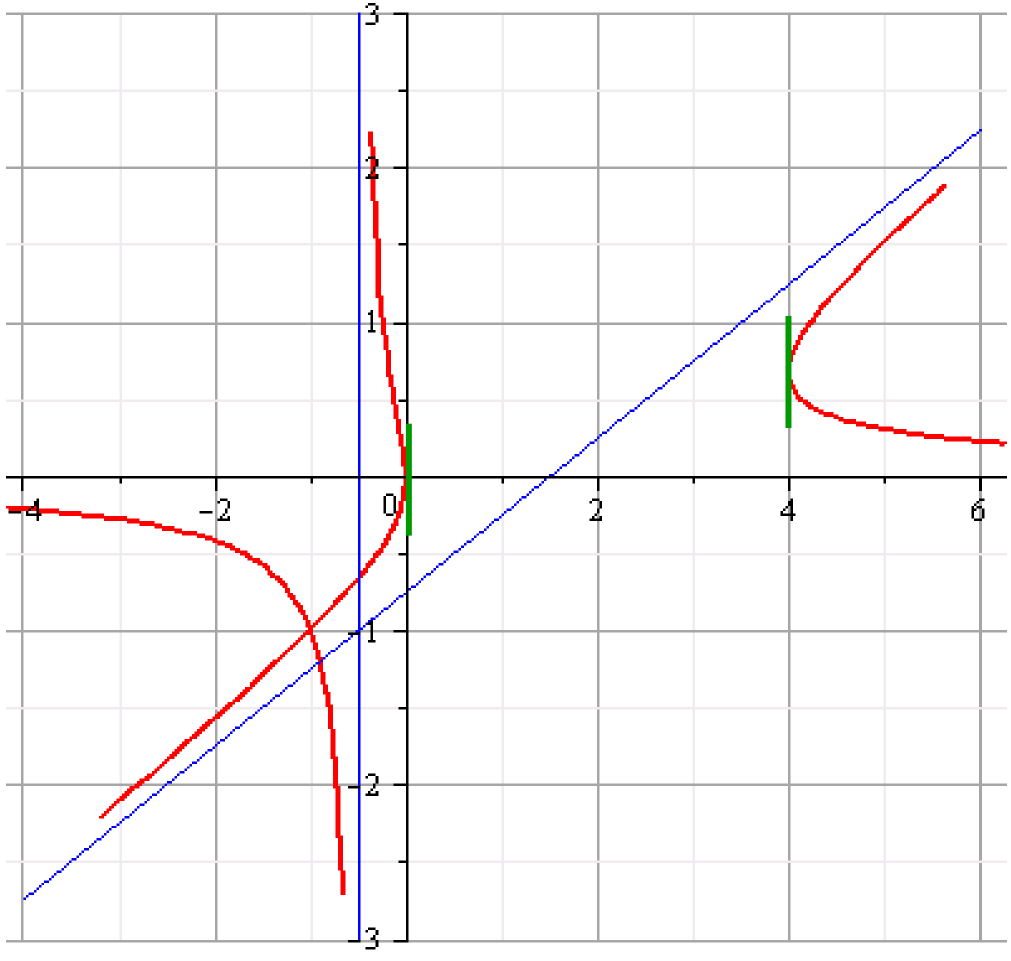


Veõ ñoà thò hs:

$$x(t)=\frac{t^2}{t-1},\ y(t)=\frac{t}{t^2-1}$$

$$x'(t)=\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}\ \Rightarrow\ t=0,\ t=2;\ y'(t)=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}<0\ ,\ \forall t\neq\pm 1$$

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		+	∣	+	0	-	‖	-	0	+	
$x(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		-	‖	-	∣	-	‖	-	∣	-	
$y(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$y'(x)$	**TCN y=0**	-	**TCÑ x=-1/2**	-	∞ **TTÑ**	+	**TCX y=1/2x-3/4**	+	∞ **TTÑ**	-	**TCN y=0**



3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
2
4
6

Veõ ñoà thò

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \ a > 0$$
$$(x^{2/3} + y^{2/3} = a^2)$$

- x(t), y(t) xác định liên tục trên R.
- x(t), y(t) tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ khảo sát và vẽ trong 1 chu kỳ (t∈[π, π])
- x(t) chẵn, y(t) lẻ ⇒ đt đối xứng qua ox ⇒ chỉ khảo sát nửa chu kỳ (t∈[0, π])(nửa chu kỳ còn lại vẽ đối xứng qua ox).

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \le 0,\ \forall t \in [0, \pi]$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \ \Rightarrow \ t = \frac{\pi}{2}$$

Baûng bieán thieân

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t \le 0, \forall t \in [0,\pi]$$

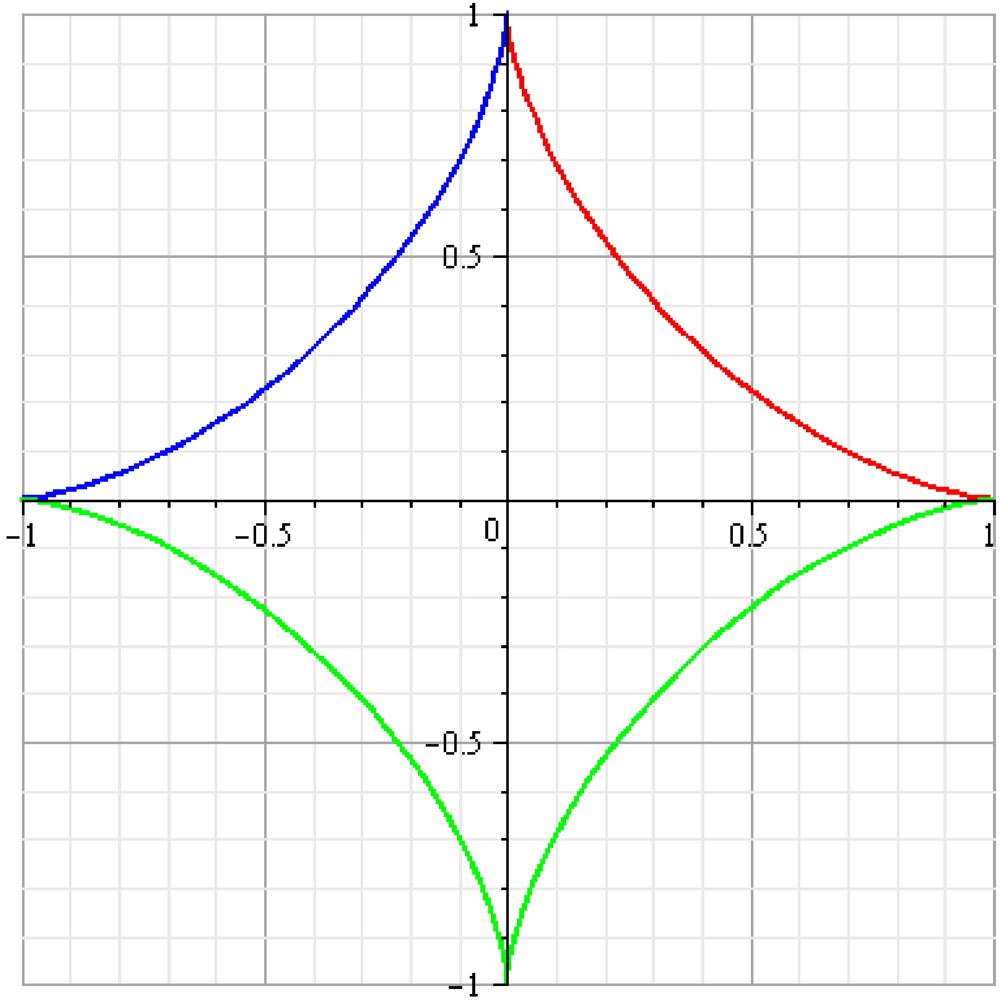
$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$y'(x)$	0	$-$	∞	$+$	0
	TTN		TTÑ		TTN

x(π-t)= -x(t), y(π-t)= y(t) ⇒ đx qua Oy

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	↘	0	↘	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	↗	a	↘	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN **TTÑ** **TTN**



Veõ ñoà thò Cycloid: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \ a > 0$

- **x(t), y(t) xaùc ñònh lieân tuïc treân R.**
- **y(t) tuaàn hoaøn vôùi chu kyø 2π**

x(t+2 π) = x(t) +2πa ⇒ y =y(x) tuaàn hoaøn vôùi chu kyø 2πa ⇒ khaûo saùt 1chu kyø (t∈[π, π]) vaø veõ y tuaàn hoaøn theo x vôùi chu kyø 2πa.

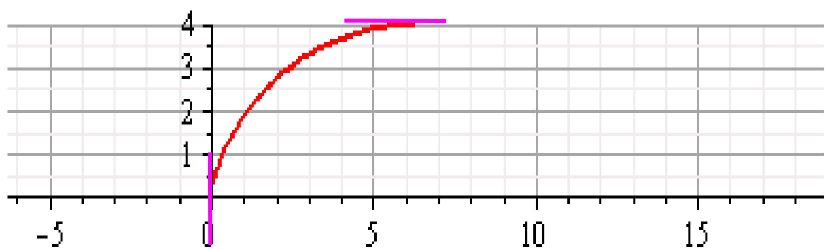
- **x(t) leû, y(t) chaün ⇒ ñöôøng cong ñoái xöùng qua oy ⇒ chæ khaûo saùt nöûa chu kyø (t∈[0, π])(nöûa chu kyø coøn laïi veõ ñoái xöùng qua oy).**

Cycloid: x = 2(t – sint), y = 2(1-cost)

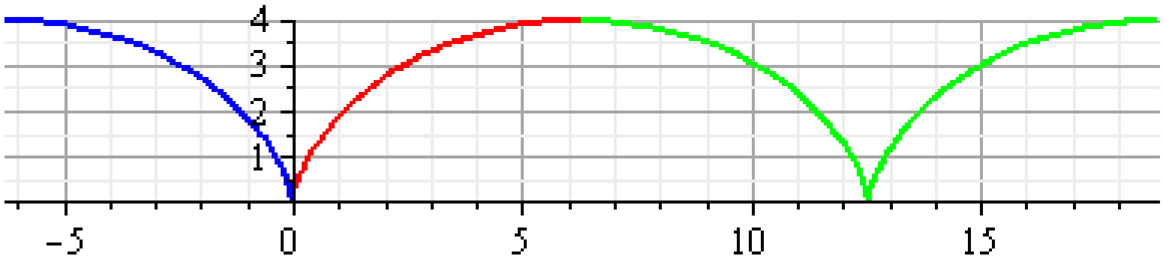
(y tuaàn hoaøn chu kyø 4π theo x)

x'(t) = 2(1-cost) ≥ 0, y'(t) = 2sint ≥ 0, ∀t∈[0, π]

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	$\vert$
$x(t)$	0	$\nearrow$	2π
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	4
$y'(x)$	∞	$+$	0
	TTÑ		TTN



Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$



$t \in [-\pi, 3\pi]$