

KHẢO SÁT HÀM SỐ

HÀM SỐ $y = f(x)$

1. Khảo sát sự biến thiên, cực trị.
2. Khảo sát tính lồi lõm, điểm uốn.
3. Khảo sát tiệm cận.
4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
5. Vẽ đồ thị.

SỰ BIẾN THIÊN

$f(x)$ tăng (giảm) trong (a,b)

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

Bỏ dấu “ = “ : tăng (tăng chặt)

f khả vi trong (a,b) :

• *f tăng trong $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$*

• *f tăng chặt trong $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$*

(Giảm được thay bởi \leq và $<.$)

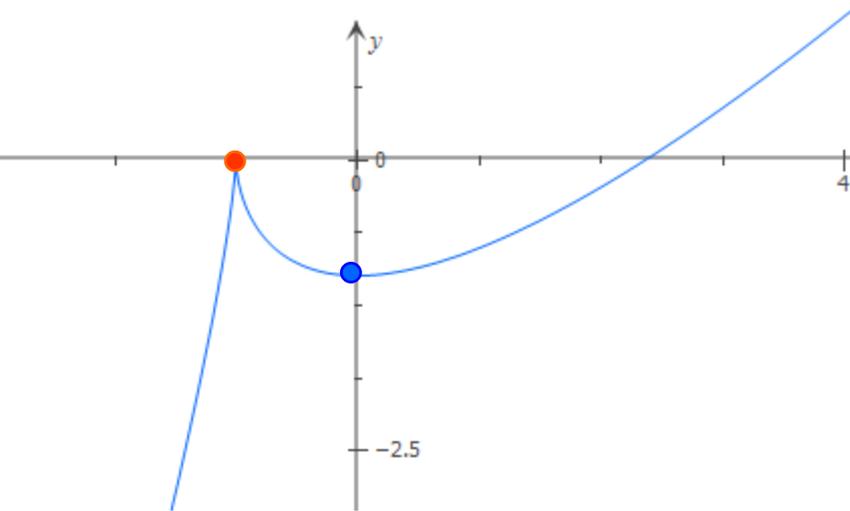
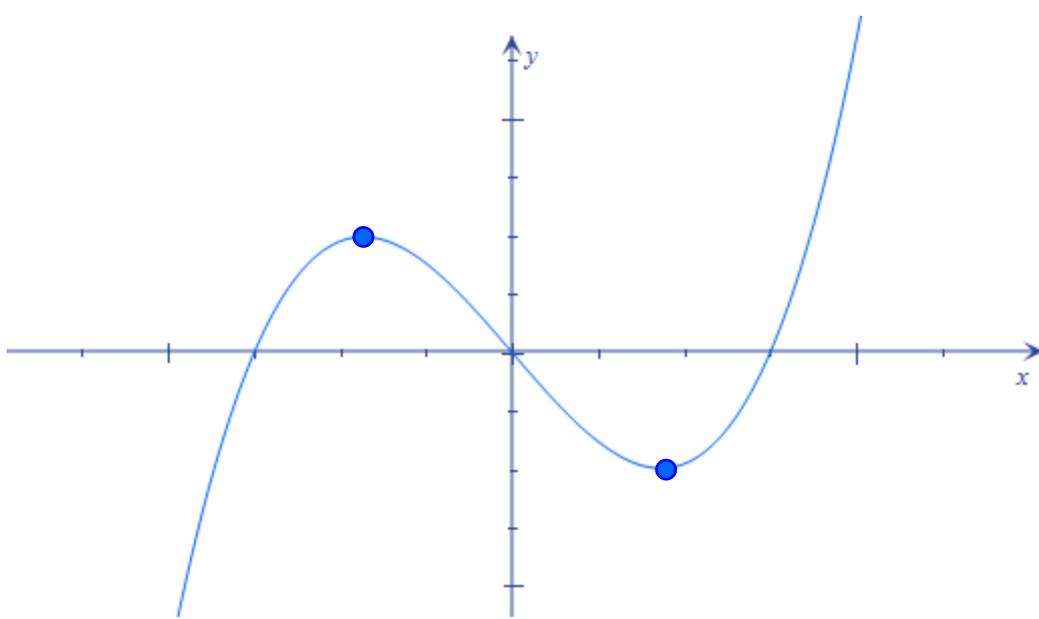
CỰC TRỊ

x_0 là điểm cực đại của f

$$\Leftrightarrow \exists a, b \ni x_0 : f(x) \leq f(x_0), \forall x \in a, b$$

Tương tự cho cực tiểu.

Điều kiện cần: f đạt cực trị tại x_0 , nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$. (điểm cực trị là điểm tới hạn).



- Điểm cực là điểm dừng:

$$f'(x_0) = 0$$

- Điểm cực là điểm không có đạo hàm.

CỰC TRỊ

Điều kiện đủ: f liên tục tại x_0 , khả vi trong lân cận x_0 (không cần khả vi tại x_0), nếu khi đi qua x_0

- f' đổi dấu từ (+) sang (-) thì f đạt cực đại tại x_0 .
- f' đổi dấu từ (-) sang (+) thì f đạt cực tiểu tại x_0 .

TÌM CỰC TRỊ NHỜ ĐẠO HÀM CẤP CAO

$$f'(x_0) = 0: \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ đạt cực tiểu chặt } x_0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ đạt cực đại chặt tại } x_0. \end{cases}$$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Nếu n chẵn thì f đạt cực trị tại x_0 : $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 : \text{CT} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 : \text{CĐ} \end{cases}$

Nếu n lẻ thì f không đạt cực trị tại x_0 .

Ví dụ

$$\text{Tìm cực trị: } f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x-2)^2 + 2(x+1)(x-2)}{3\sqrt[3]{[(x+1)(x-2)^2]^2}}$$
$$= \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{[(x+1)(x-2)^2]^2}} \quad (\text{Với } x \neq -1 \text{ và } x \neq 2)$$

$$f' \text{ cùng dấu tử số: } g(x) = x(x-2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\parallel	$+$	$-$	$+$

\Rightarrow f liên tục tại $0, 2$ và f' đổi dấu khi đi qua 0 và 2 nên f đạt cực trị tại đây.

Kết luận: $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ đạt cực đại tại } x_0 = 0 \\ f \text{ đạt cực tiểu tại } x_1 = 2 \end{array} \right.$

Tìm cực trị: $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

Miền xác định: $0, +\infty$

$$f'(x) = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}$$

$f''(1) = 2 > 0$ **Cực tiểu**

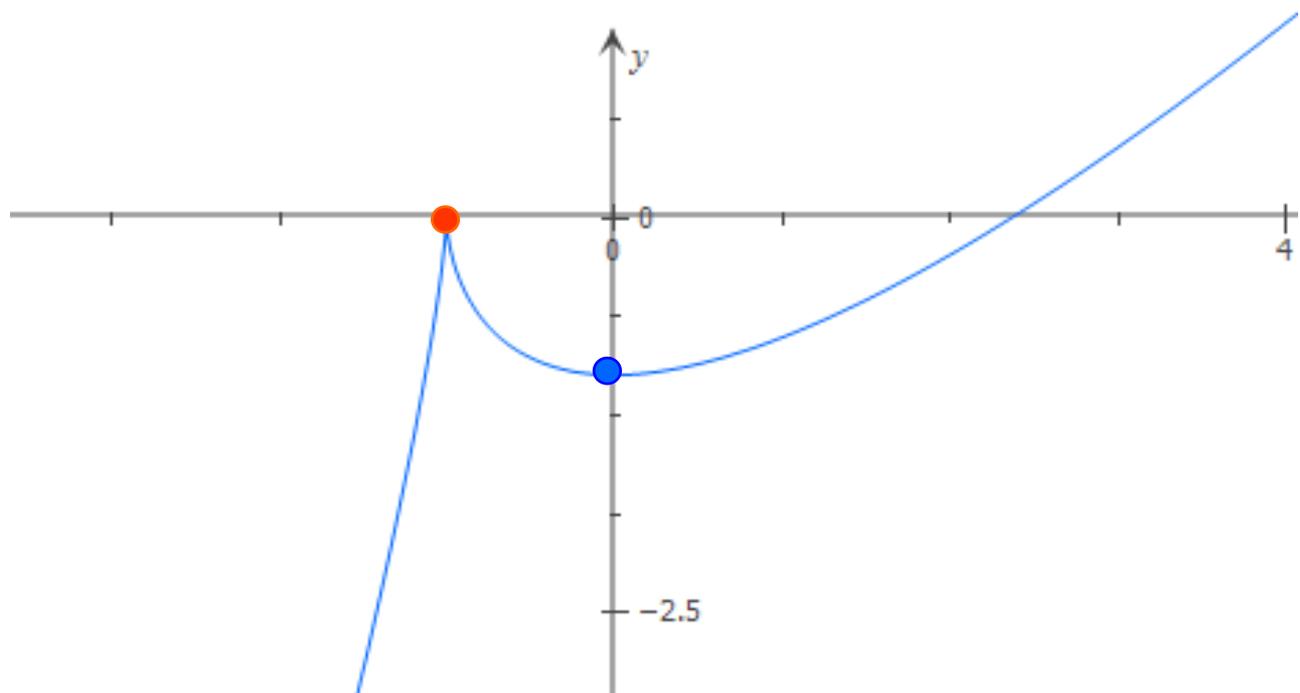
$f''(e^{-2}) = \frac{-2}{e^{-2}} < 0$ **Cực đại**

Tìm cực trị: $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{x+1}^2$

Miền xác định: R

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^{1/3}} = 2 \left(\frac{(x+1)^{1/3} - 1}{(x+1)^{1/3}} \right)$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
TS	$-$	$ $	$-$	$+$
MS	$-$	0	$+$	$+$
f'	$+$	\parallel	$-$	$+$



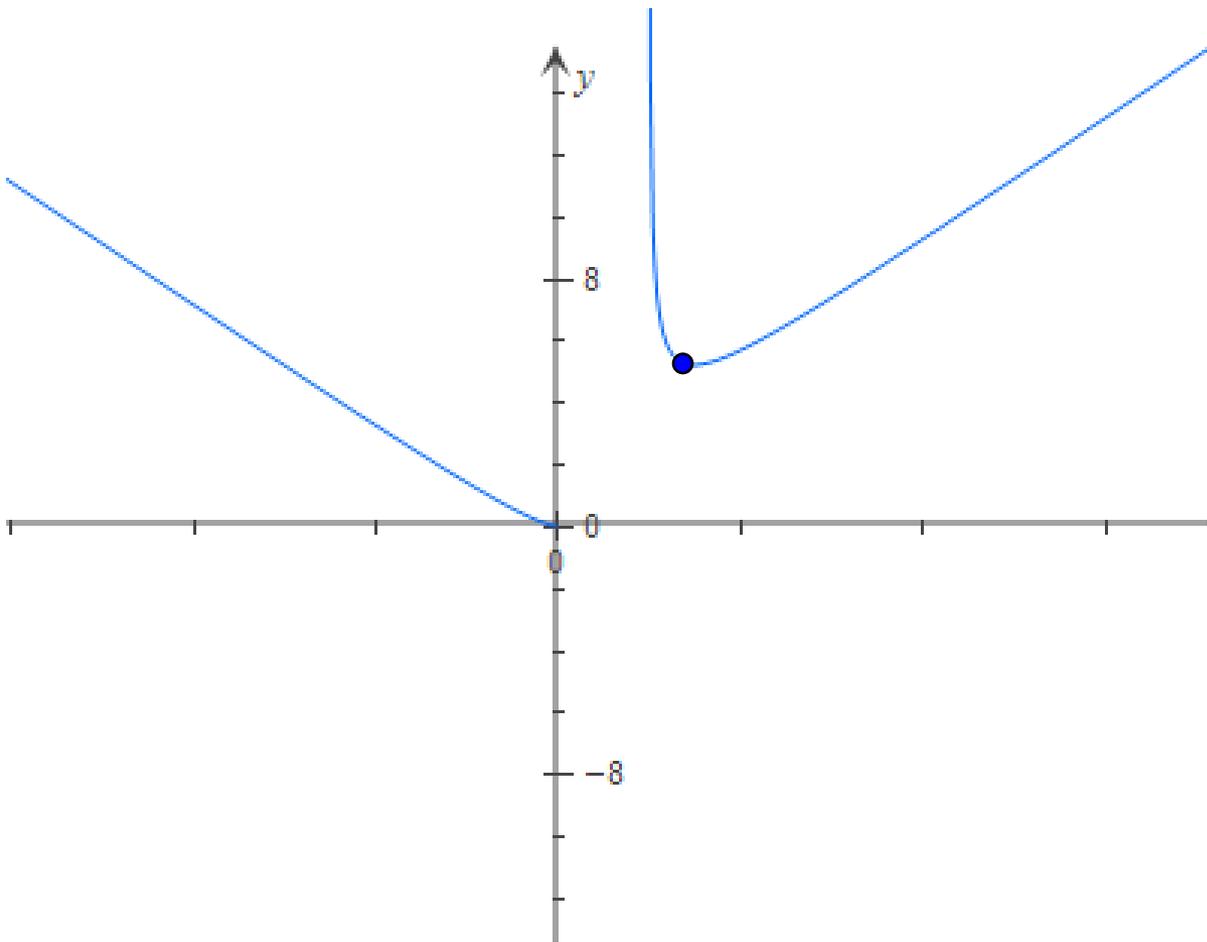
Tìm cực trị:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

Miền xác định: $-\infty < x \leq 0, 2 < x < +\infty$.

Tìm cực trị:

$$f(x) = x^2 |x+2|^{-4x}, x \in (-4, 2)$$

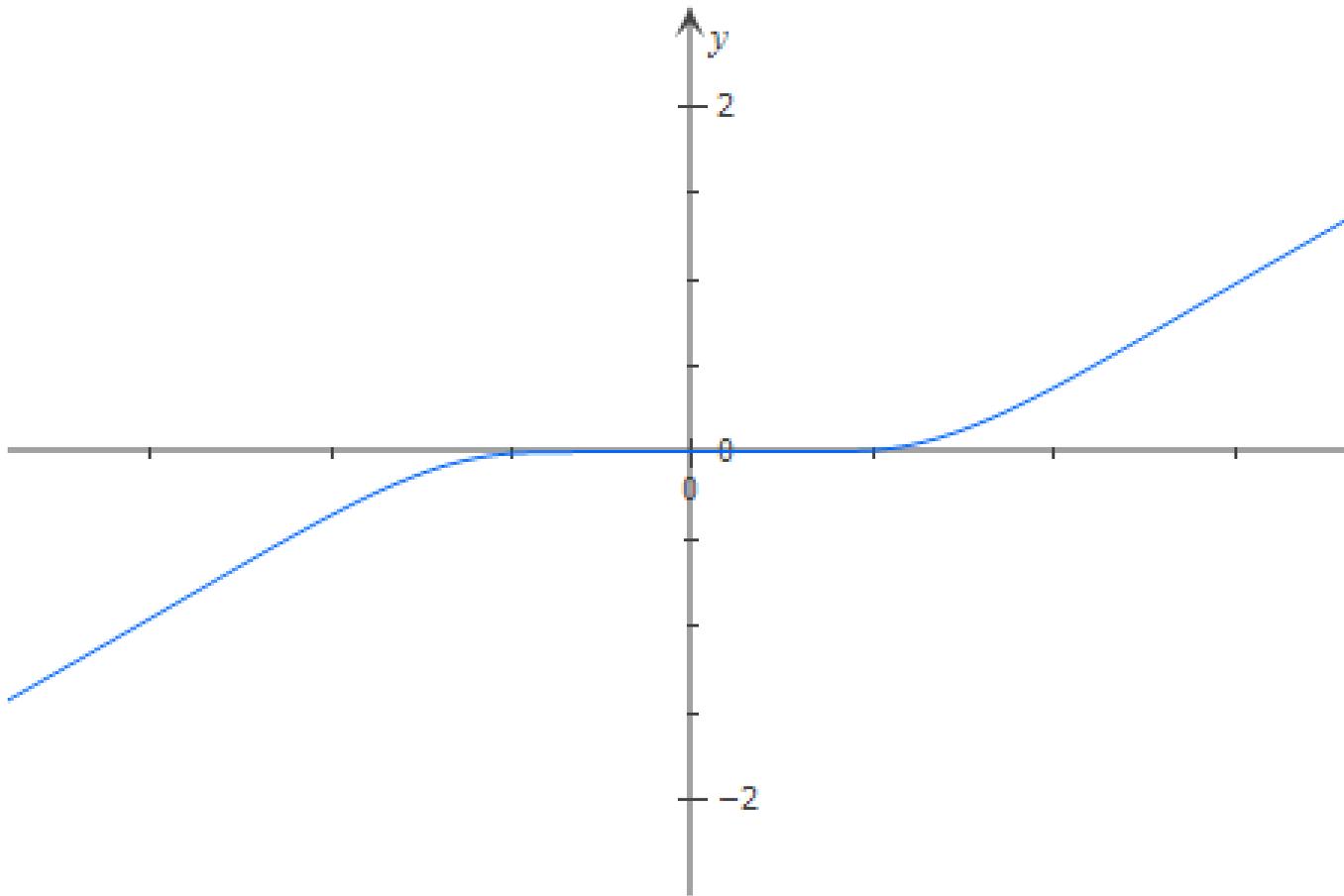


Tìm cực trị:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} > 0 \quad (x \neq 0)$$

f' không đổi dấu khi qua bất kỳ điểm nào trên toàn bộ MXĐ nên không có cực trị.



TIỆM CẬN

$$y = f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty \longrightarrow \text{Tiệm cận đứng } x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pm)\infty} f(x) = a \longrightarrow \text{Tiệm cận ngang } y = a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pm)\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\pm)\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow (\pm)\infty} [f(x) - ax] = b$$

$$\longrightarrow \text{Tiệm cận xiên } y = ax + b$$

Nếu viết được $f(x) = ax + b + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB
khi $x \rightarrow \infty$ thì TCX là $y = ax + b$

CÁC BƯỚC TÌM TIỆM CẬN

1. Tìm miền xác định để biết điểm nào không nằm trong MXĐ nhưng **dính vào MXĐ** và các đầu vô cùng.
2. Xét tiệm cận đứng tại các điểm không xđ được chỉ ra ở bước 1.
3. Xét tiệm cận ngang hoặc xiên tại các đầu vô cùng được chỉ ra ở bước 1.

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + 2x - 1$

Miền xác định: $(-1, +\infty) \setminus \{0\}$

$x \rightarrow -1^+$: $f(x) \rightarrow +\infty$: **TCĐ** $x = -1$

$x \rightarrow 0$: $f(x) \rightarrow 0$: **không có TCĐ**

$x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$: **có thể có TCX.**

$$\alpha(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$f(x) = 2x - 1 + \alpha(x) \quad \Rightarrow \text{TCX : } y = 2x - 1$$

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

Miền xác định: $-\infty < x \leq 0, 2 < x < +\infty$

$x \rightarrow 2^+$: $f(x) \rightarrow +\infty$: **TCD** $x = 2$

$x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$: có thể có TCX

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm 1$$

$\{a = 1, x \rightarrow +\infty\}, \{a = -1, x \rightarrow -\infty\}$

$x \rightarrow +\infty$ ($a = 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{2} \frac{2}{x-2} = 1$$

TCX $y = x + 1$

$$\boxed{x \rightarrow -\infty} \quad (a = -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x-2}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\frac{1}{2} \frac{2}{x-2} \right) = -1$$

$$\text{TCX } y = -x - 1$$

Có thể tìm tiệm cận xiên bằng khai triển Taylor

$$\boxed{x \rightarrow \infty} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \pm x \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \pm x \sqrt{1 + \frac{2}{x-2}}$$

$$= \pm x \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x-2} + o\left(\frac{1}{x-2}\right) \right]$$

$$= \pm \left[x + \frac{x}{x-2} + x \times o\left(\frac{1}{x-2}\right) \right]$$

Khai triển đến khi $f(x)$ xuất hiện VCB (khi $x \rightarrow \infty$)

$$= \pm \left[x + \frac{x}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right) \right]$$

$$= \pm \left[x + 1 + \frac{2}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right) \right]$$

$$= \pm x + 1 + \alpha(x),$$

$$\text{vói } \alpha(x) = \frac{2}{x-2} + x \times 0\left(\frac{1}{x-2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \text{TCX: } y = (x + 1)$$

Tìm tiệm cận hàm số: $f(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{x-1}}$

$$= (x - 1)e^{1 + \frac{1}{x-1}} = e(x - 1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

MXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\underline{x \rightarrow 1^-} : \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow 0 \longrightarrow$$

không có tiệm cận đứng

$$\underline{x \rightarrow 1^+} : \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \longrightarrow$$

TCD $x = 1$

$$f(x) = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

$x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$: có thể có TCX.

$$\frac{f(x)}{x} = e \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} e = a$$

$$f(x) - ex = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - ex$$

$$= ex \left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \right) - ex \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} e - e = 0 = b$$

TCX: $y = ex$

Tìm TCX bằng khai triển Taylor

$$f(x) = e(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= e(x-1) \left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \right)$$

$$= e(x-1) + e + e(x-1) o\left(\frac{1}{x-1}\right) = ex + \alpha_x$$

TCX: $y = ex$

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- NHỎ NHẤT

Loại 1: tìm gtn, gtnn trên toàn miền xác định

⇒ khảo sát hàm số

Loại 2: tìm gtn, gtnn trên $[a, b]$

B1: Tìm các điểm tới hạn trong (a, b)

B2: so sánh giá trị của f tại các điểm tới hạn và $f(a), f(b)$ để rút ra min, max.

VÍ DỤ

1/ Tìm gtn, gtnn $f(x) = x^x$

MXĐ: $(0, +\infty)$. $f'(x) = x^x (\ln x + 1)$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$e^{-1/e}$	$+\infty$

Kết luận: gtn không có, gtnn là $f(1/e) = e^{-1/e}$

2/ Tìm gtn, gtnn trên $[0, 2]$: $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1 - x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \quad (1 \text{ điểm tới hạn})$$

$$f(0) = 0, f(1) = \arctan(1/2), f(2) = \arctan(2/5)$$

$$\Rightarrow f_{\max} = f(1) = \arctan(1/2), f_{\min} = f(0) = 0$$

3/ Tìm gtn, gtnn trên $[-1,2]$: $f(x) = |x|(3x + 2) - 6x$

$$f(x) = \begin{cases} -x(3x + 2) - 6x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x(3x + 2) - 6x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 2 - 6, & -1 < x < 0 \\ 6x + 2 - 6, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Điểm phân chia biểu thức được xem là 1 điểm tới hạn khi tìm min, max, *không cần tính đạo hàm tại điểm này.*

Vẽ đồ thị

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

MXĐ : $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$y' = \frac{2x \cdot x^2 - 4 - 4x^3}{x^2 - 4^2} = \frac{-8x}{x^2 - 4^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	\parallel	$+$	0	$-$	\parallel	$-$	
y	1	\square	$+\infty$ \parallel $-\infty$	\square	0	\square	$-\infty$ \parallel $+\infty$	\square	1

TCN
 $y=1$

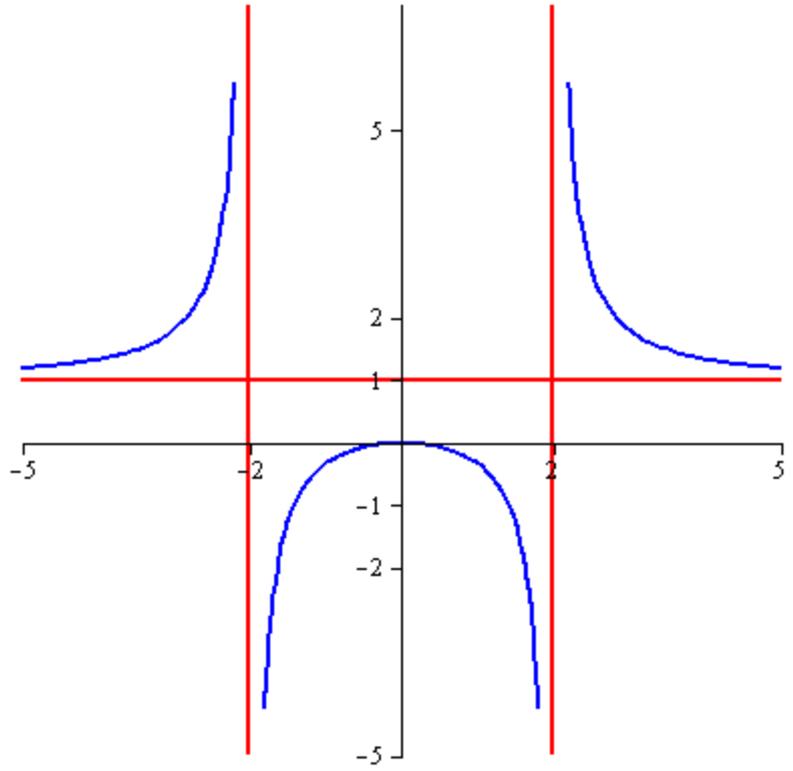
TCĐ
 $x=-2$

TTN

TCĐ
 $x=2$

TCN
 $y=1$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	\parallel	$+$	0	$-$	\parallel	$-$	
y	1	\square	$+\infty$ \parallel $-\infty$	\square	0	\square	$-\infty$ \parallel $+\infty$	\square	1
	TCN $y=1$		TCĐ $x=-2$		TTN		TCĐ $x=2$		TCN $y=1$



Vẽ đồ thị

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$
$$y' = (x-3) \sqrt{\left(\frac{x}{x-2}\right)^3}$$

$$\text{MXĐ: } -\infty < x \leq 0, \\ 2 < x < +\infty$$

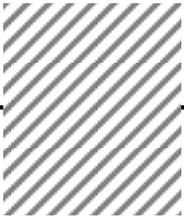
Tiệm cận: $\underline{x \rightarrow 2^+} : f(x) \rightarrow +\infty : \text{TCD } x = 2$

$\underline{x \rightarrow +\infty} : \text{TCX } y = x + 1$

$\underline{x \rightarrow -\infty} : \text{TCX } y = -x - 1$

Bảng biến thiên

$$y' = (x - 3) \sqrt{\left(\frac{x}{x - 2}\right)^3}$$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$	
y'		-	0			-	0	+		
y	$+\infty$	\square	0			$+\infty$	\square	$\sqrt{27}$	\square	$+\infty$

TCX
 $y = -x - 1$

TCĐ
 $x = 2$

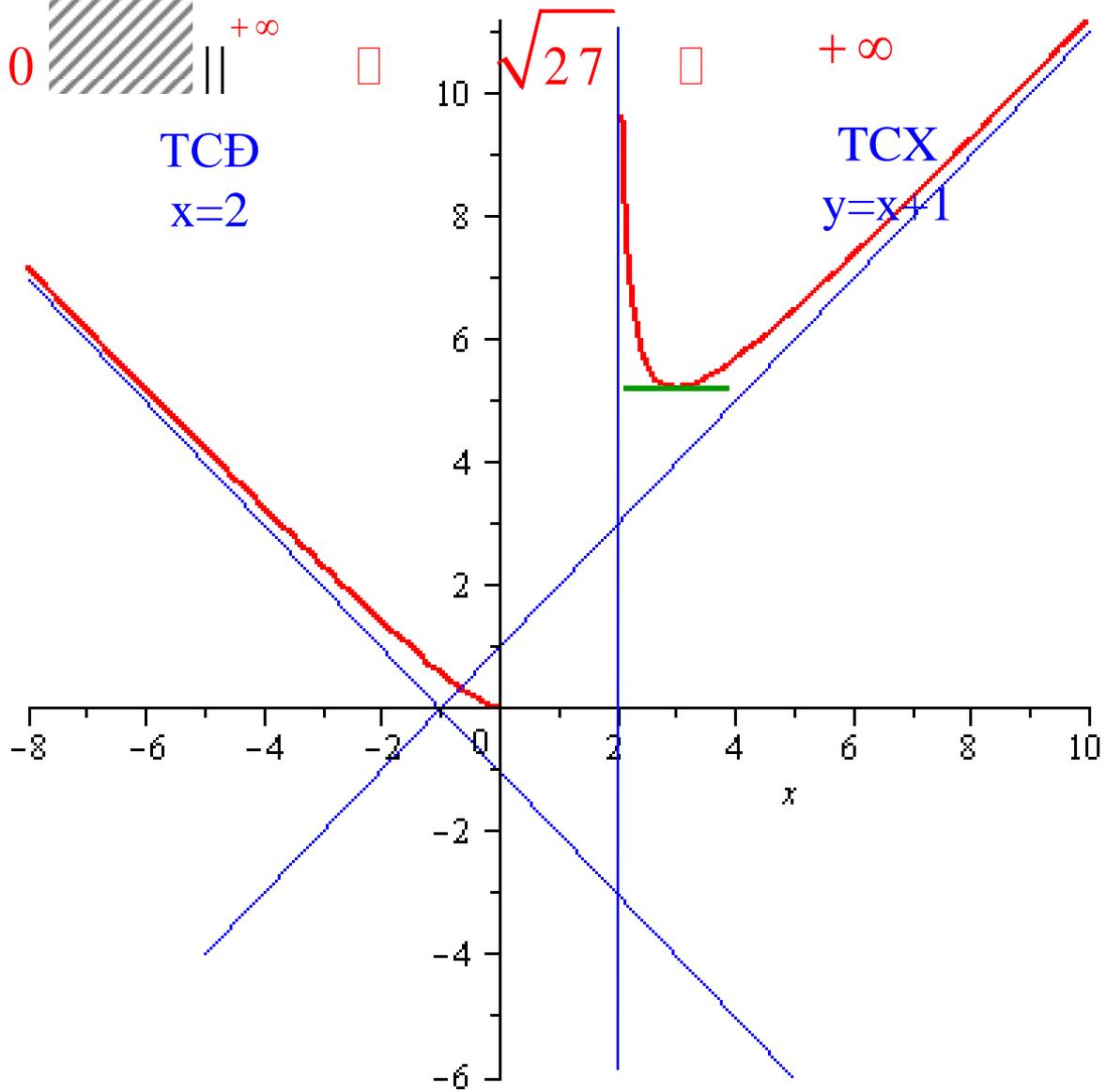
TCX
 $y = x + 1$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
y'	$-$	0	\parallel	$-$	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$		$+\infty$

TCX
 $y = -x - 1$

TCD
 $x = 2$

TCX
 $y = x + 1$



Vẽ đồ thị hàm số

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{[(x+1)(x-2)^2]^2}}$$

TCX : $y = x - 1, x \rightarrow \pm \infty$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	\parallel	$+$	0	$-$	\parallel	$+$	
y	$-\infty$	\square	0	\square	$\sqrt[3]{4}$	\square	0	\square	$+\infty$

TCX
 $y=x-1$

TT//oy

TT//ox

TT//oy

TCX
 $y=x-1$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		+		+	0	-		+	
y	$-\infty$	□	0	□	$\sqrt[3]{4}$	□	4	□	$+\infty$

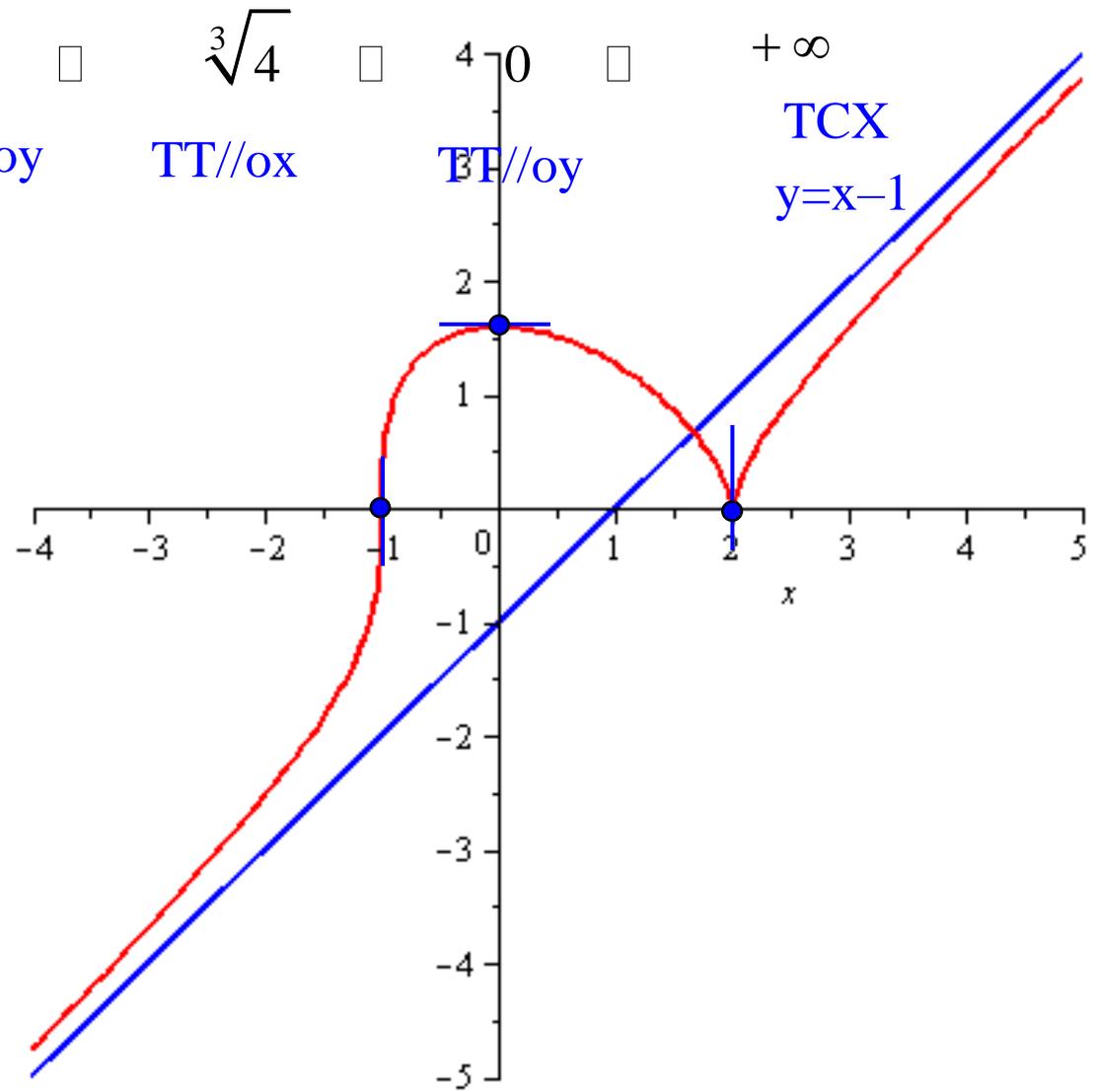
TCX
 $y=x-1$

TT//oy

TT//ox

BT//oy

TCX
 $y=x-1$



KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM THAM SỐ

$$x = x(t), y = y(t)$$

Tìm MXĐ và liên tục của $x(t), y(t)$

- Xét tính tuần hoàn, đối xứng (khác $y = f(x)$)
- Tính $x'(t), y'(t)$ và lập bảng biến thiên.
- Tìm tiệm cận (nếu có).
- Vẽ đồ thị.

CỰC TRỊ HÀM THAM SỐ

$$x = x(t), y = y(t)$$

- **Bước 1:** tính $x'(t), y'(t) \Rightarrow$ các giá trị
- **Bước 2 :** lập bảng biến thiên

Đi qua x_j , $y'(x)$ đổi dấu thì y đạt cực trị (theo x) tại x_j . Giá trị cực trị là y_j

t	t_0	t_1	t_2	t_3					
$x'(t)$									
$x(t)$	□	○ x_0 □	□ x_1 □	○ x_2 □	○ x_3 □				
$y'(t)$									
$y(t)$	y_0	y_1	y_2	y_3					
$y'(x)$	+		-		+		-		
		CĐ		K		K		CT	

Tìm cực trị $x = te^t, y = te^{-t}$

$$x'(t) = (1+t)e^t \rightarrow t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \rightarrow t_1 = 1$$

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x'(t)$	-	0	+	+	
$x(t)$	\square	$-1/e$	\square	\square	
$y'(t)$	+	+	0	-	
$y(t)$	\square	$-e$	\square	\square	
$y'(x)$	-		+	0	-

y đạt cực đại
tại $x = e$ ($t=1$),
 $y_{\text{cđ}} = 1/e$

Tìm cực trị

$$x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$$

$$x' = 2 - 2t \rightarrow t_0 = 1$$

$$y' = 4t - 3t^2 \rightarrow t_1 = 0, t_2 = 4/3$$

t	$-\infty$		0		1		$4/3$		$+\infty$
$x'(t)$		+		+	0	-		-	
$x(t)$		□	0	□	1	□	8/9	□	
$y'(t)$		-	0	+		+	0	-	
$y(t)$		□	0	□	1	□	32/27	□	
$y'(x)$		-	0	+		-	0	+	




CT
CĐ

TIỆM CẬN HÀM THAM SỐ $x = x(t), y = y(t)$

- Bước 1: tìm tìm tất cả các giá trị t_0 sao cho $x(t) \rightarrow \infty$ hay $y(t) \rightarrow \infty$ (t_0 có thể là ∞)
- Bước 2: xác định loại TC

Khi $t \rightarrow t_0$

$x(t) \rightarrow a, y(t) \rightarrow \infty$: TC đứng $x = a$

$x(t) \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow a$: TC ngang $y = a$

$x(t) \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty, \left\{ \begin{array}{l} \frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a, y(t) - ax(t) \rightarrow b \\ \text{TC xiên: } y = ax + b \end{array} \right.$

Tìm tiệm cận hs $x = te^t, y = te^{-t}$

Bước 1: $\begin{cases} x(t) \rightarrow \infty \text{ khi } t \rightarrow +\infty \\ y(t) \rightarrow \infty \text{ khi } t \rightarrow -\infty \end{cases}$

Bước 2:

- ❖ $t \rightarrow +\infty, x(t) \rightarrow +\infty, y(t) \rightarrow 0$: TCN : $y = 0$
- ❖ $t \rightarrow -\infty, x(t) \rightarrow 0, y(t) \rightarrow -\infty$: TCĐ : $x = 0$

Tìm tiệm cận hs

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$$

- $x(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \pm\infty$ hay $t \rightarrow 1$
- $y(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \pm 1$

❖ $t \rightarrow \pm\infty$: $x(t) \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow 0$: TCN $y = 0$

❖ $t \rightarrow -1$: $x(t) \rightarrow -1/2$, $y(t) \rightarrow \infty$: TCĐ $x = -1/2$

$$x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$$

❖ t → 1 : x(t) → ∞ , y(t) → ∞

$$* \lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t^2-1} \times \frac{t-1}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$* \lim_{t \rightarrow 1} \left[y(t) - \frac{1}{2} x(t) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\frac{t}{t^2-1} - \frac{t^2}{2(t-1)} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{2(t^2-1)} \times (t^2 + t - 2) = \frac{-3}{4}$$

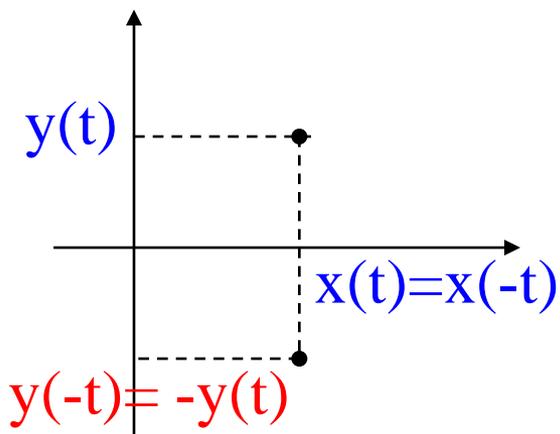
TCX

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

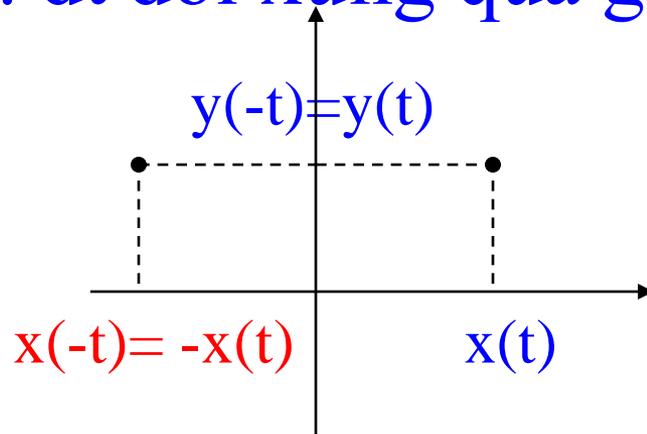
VỀ TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG ĐƯỜNG CONG TS

1. $x(t)$ chẵn, $y(t)$ lẻ: đt đối xứng qua ox
2. $x(t)$ lẻ, $y(t)$ chẵn: đt đối xứng qua oy
3. $x(t)$ lẻ, $y(t)$ lẻ: đt đối xứng qua gốc tđ

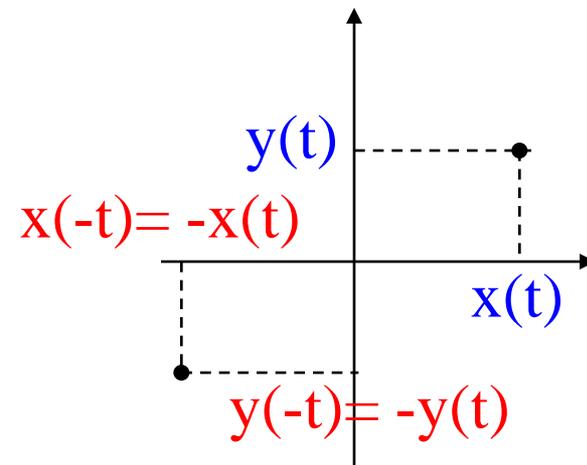
Chỉ ks phần $t \geq 0$



(1)



(2)



(3)

VỀ TÍNH TUẦN HOÀN TRONG ĐC THAM SỐ

1. $x(t)$ TH chu kỳ T_1 , $y(t)$ TH chu kỳ T_2

⇒ Chỉ khảo sát và vẽ trong 1 chu kỳ

$$T = \text{bscnn}(T_1, T_2)$$

2. $x(t + T) = x(t) + A$, $y(t)$ TH chu kỳ T

⇒ Hàm số $y = y(x)$ TH với chu kỳ A

⇒ Chỉ khảo sát trong 1 chu kỳ T (vẽ lặp lại theo tính

TH của hàm số $y = f(x)$)

Vẽ đồ thị hs

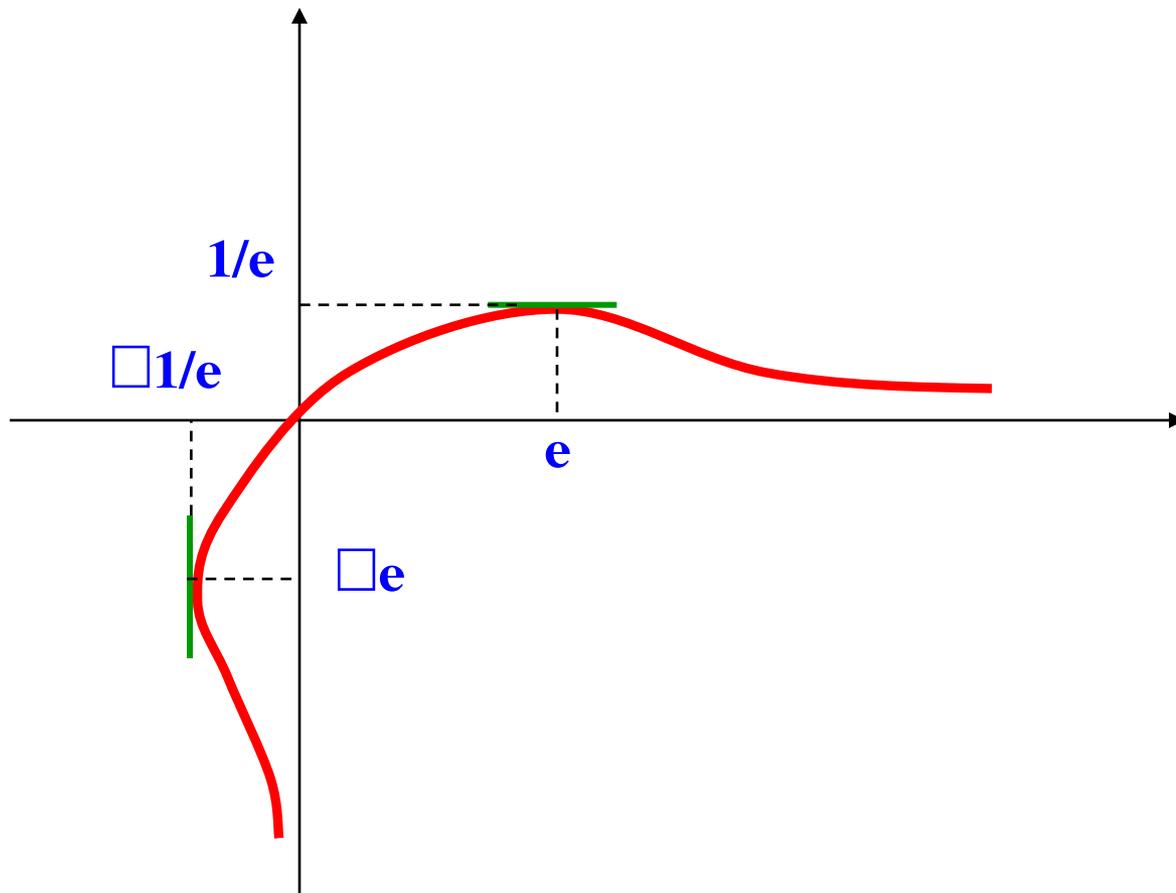
$$x = te^t, y = te^{-t}$$

$$x'(t) = (1+t)e^t \rightarrow t_0 = -1$$

$$y'(t) = (1-t)e^{-t} \rightarrow t_1 = 1$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+		+	
$x(t)$	0	□	$-\frac{1}{e}$	□	e	□	$+\infty$
$y'(t)$		+		+	0	-	
$y(t)$	$-\infty$	□	$-e$	□	$\frac{1}{e}$	□	0
$y'(x)$		+	∞	-	0	+	
	TCD $x=0$		TTĐ (// oy)		TTN (// ox)		TCN $y=0$

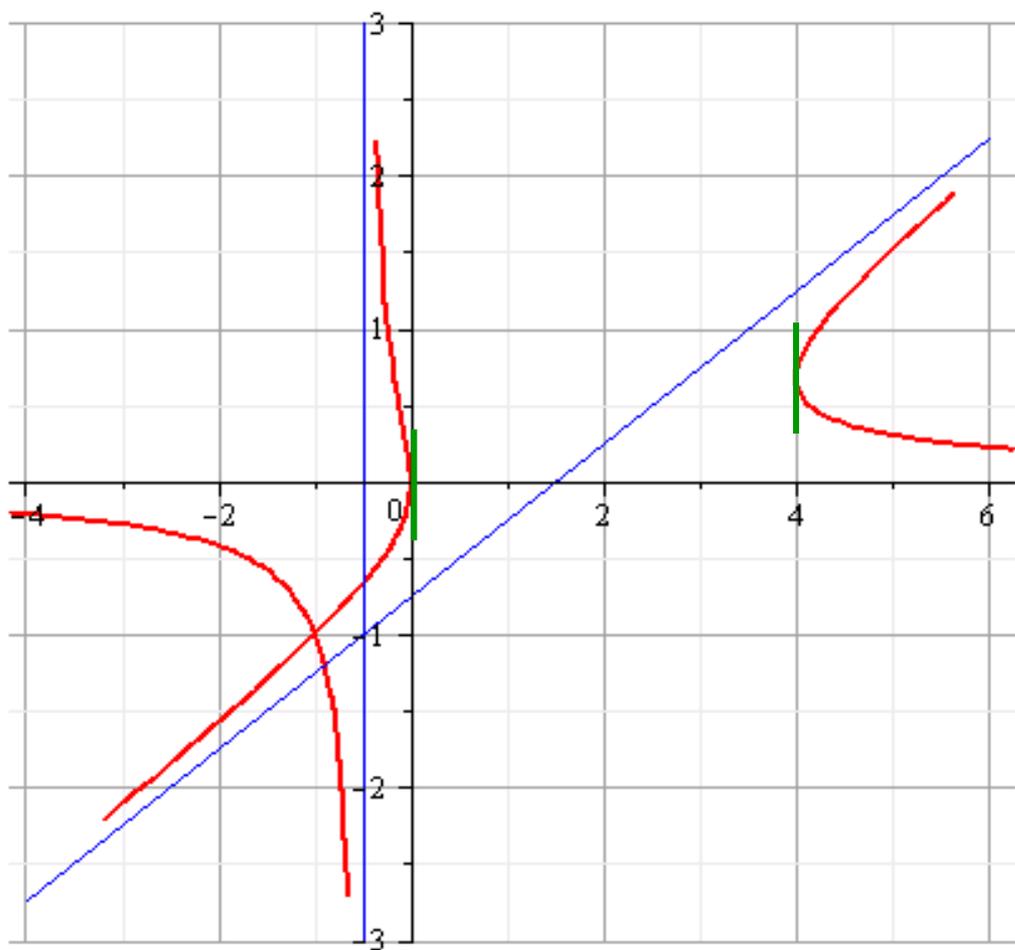
Vẽ đồ thị hs:



Vẽ đồ thị hs: $x(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1}, y(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$

$$x'(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t^2 - 1)^2} \Rightarrow t = 0, t = 2; y'(t) = -\frac{t^2 + 1}{(t^2 - 1)^2} < 0, \forall t \neq \pm 1$$

t	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$							
$x'(t)$	+		+	0	-		-	0	+				
$x(t)$	$-\infty$	\square	$-\frac{1}{2}$	\square	0	\square	$-\infty ^{+\infty}$	\square	4	\square	$+\infty$		
$y'(t)$	-		-		-		-		-				
$y(t)$	0	\square	$-\infty ^{+\infty}$	\square	0	\square	$-\infty ^{+\infty}$	\square	$\frac{2}{3}$	\square	0		
$y'(x)$	TCN $y=0$	-	TCĐ $x=-1/2$	-	∞	+	TTĐ	+	TCX $y=1/2x-3/4$	+	∞	-	TCN $y=0$



Veñ ñoà thò

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0$$

$$(x^{2/3} + y^{2/3} = a^2)$$

• $x(t), y(t)$ xác định liên tục trên \mathbb{R} .

• $x(t), y(t)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ khảo sát và vẽ trong 1 chu kỳ ($t \in [-\pi, \pi]$)

• $x(t)$ chẵn, $y(t)$ lẻ \Rightarrow đt đối xứng qua $ox \Rightarrow$ chỉ khảo sát nửa chu kỳ ($t \in [0, \pi]$) (nửa chu kỳ còn lại vẽ đối xứng qua ox).

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \leq 0, \forall t \in [0, \pi]$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Bảng biến thiên

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \leq 0, \forall t \in [0, \pi]$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	\square	0	\square	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	\square	a	\square	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN

TTĐ

TTN

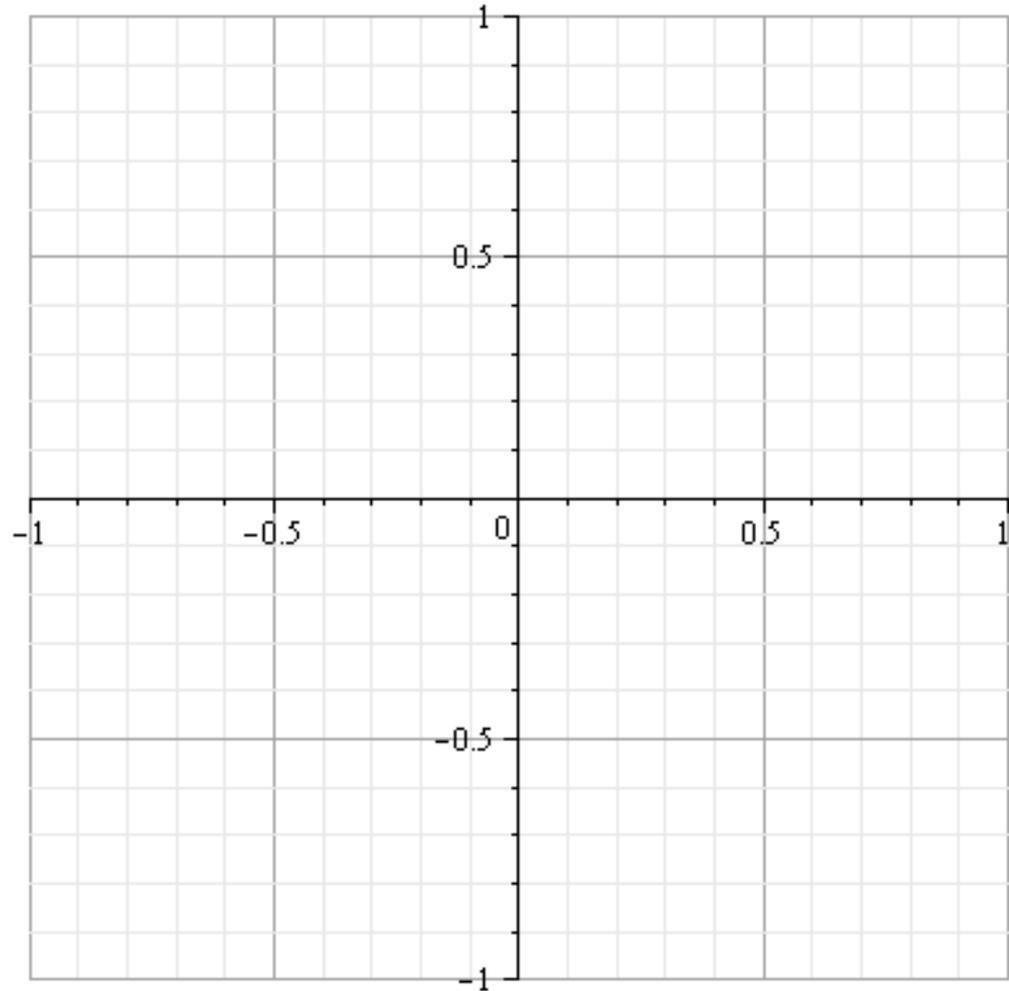
$$x(\pi-t) = -x(t), y(\pi-t) = y(t) \Rightarrow dx \text{ qua } Oy$$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	\square	0	\square	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	\square	a	\square	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN

TTD

TTN

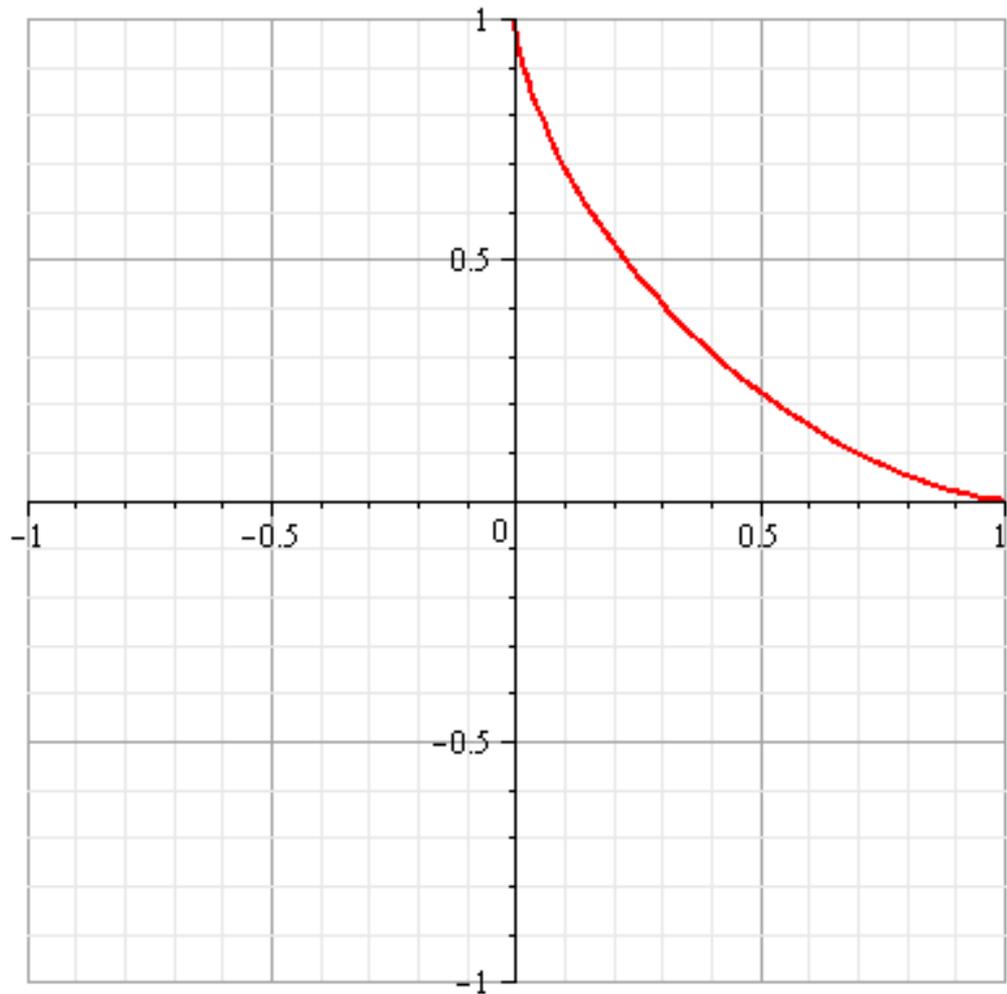


t	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	\square	0	\square	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	\square	a	\square	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN

TTD

TTN

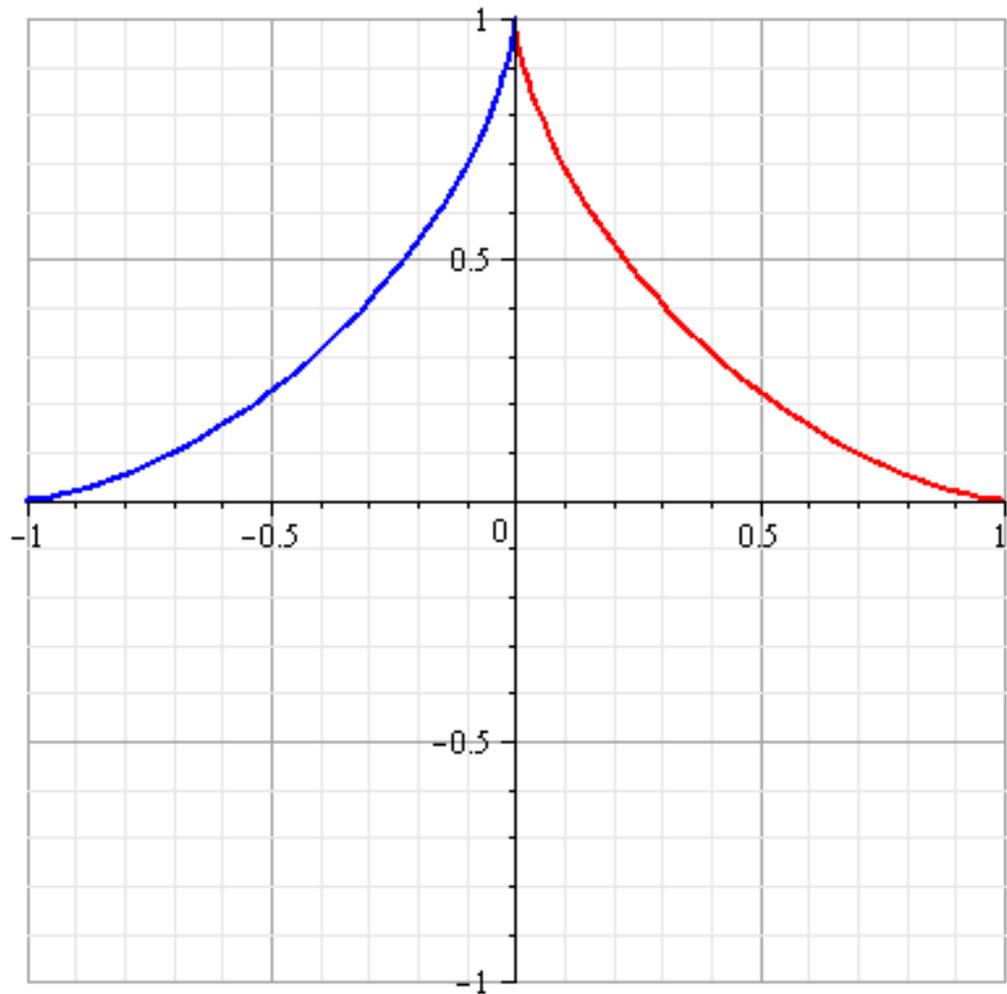


t	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	\square	0	\square	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	\square	a	\square	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN

TTD

TTN

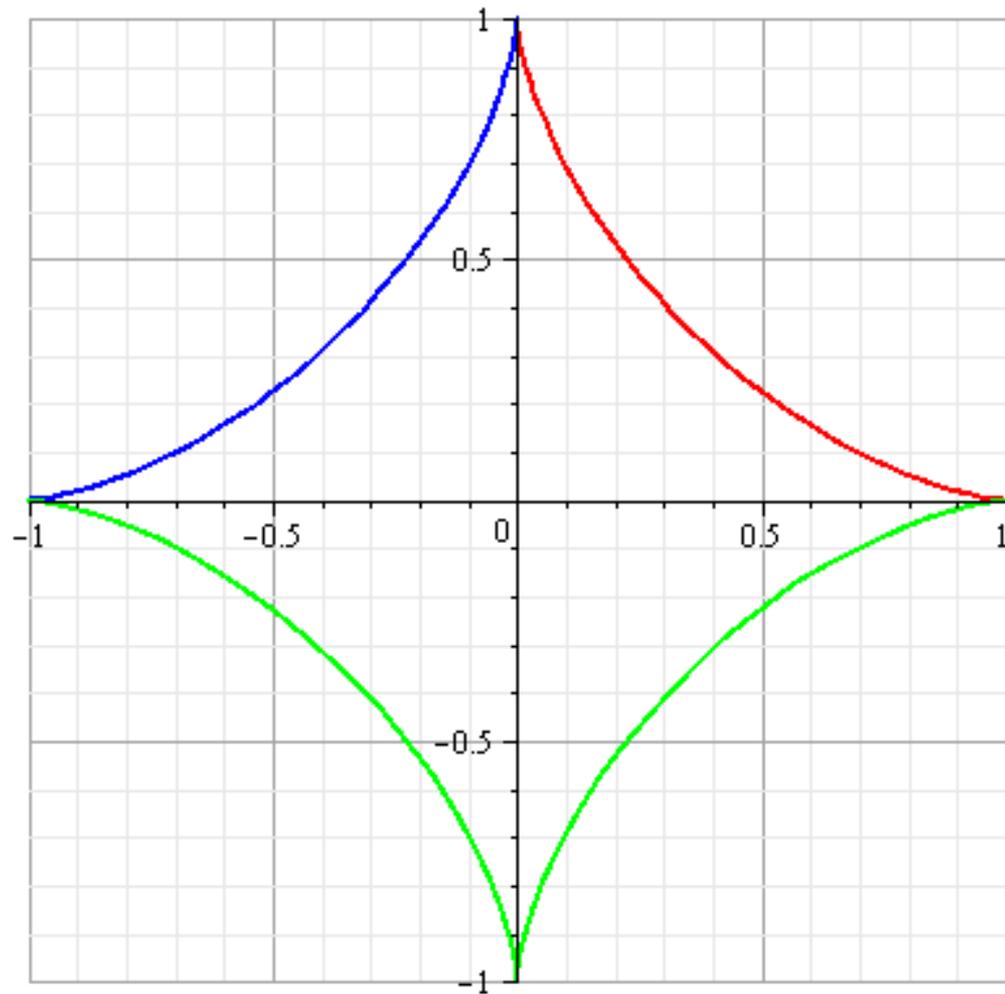


t	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$x'(t)$	0	-	0	+	0
$x(t)$	a	\square	0	\square	$-a$
$y'(t)$	0	+	0	-	0
$y(t)$	0	\square	a	\square	0
$y'(x)$	0	-	∞	+	0

TTN

TTD

TTN



Vẽ đồ thị Cycloid: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0$

❖ $x(t), y(t)$ xác định liên tục trên \mathbb{R} .

❖ $y(t)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π

$x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi a \Rightarrow y = y(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2\pi a$

\Rightarrow khảo sát 1 chu kỳ ($t \in [-\pi, \pi]$) và vẽ y tuần hoàn theo x với chu kỳ $2\pi a$.

❖ $x(t)$ lẻ, $y(t)$ chẵn \Rightarrow đường cong đối xứng qua oy

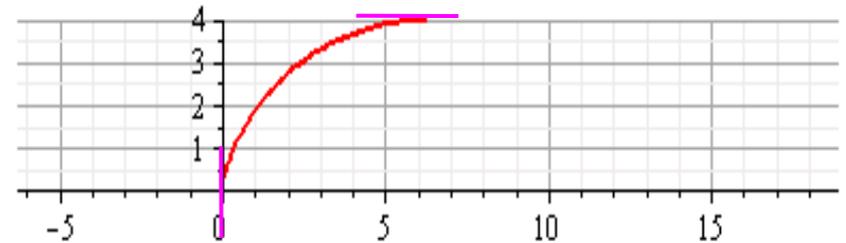
\Rightarrow chỉ khảo sát nửa chu kỳ ($t \in [0, \pi]$) (nửa chu kỳ còn lại lấy đối xứng qua oy).

Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$

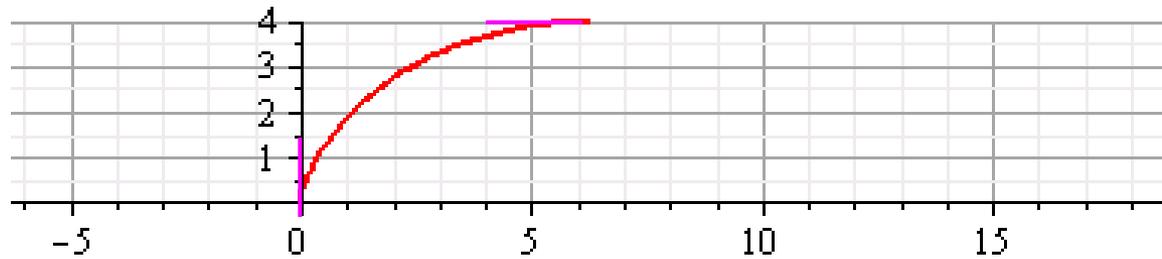
(y tuần hoàn chu kỳ 4π theo x)

$$x'(t) = 2(1 - \cos t) \geq 0, y'(t) = 2\sin t \geq 0, \forall t \in [0, \pi]$$

t	0		π
$x'(t)$	0	+	
$x(t)$	0	□	2π
$y'(t)$	0	+	0
$y(t)$	0	□	4
$y'(x)$	∞	+	0
	TTĐ		TTN

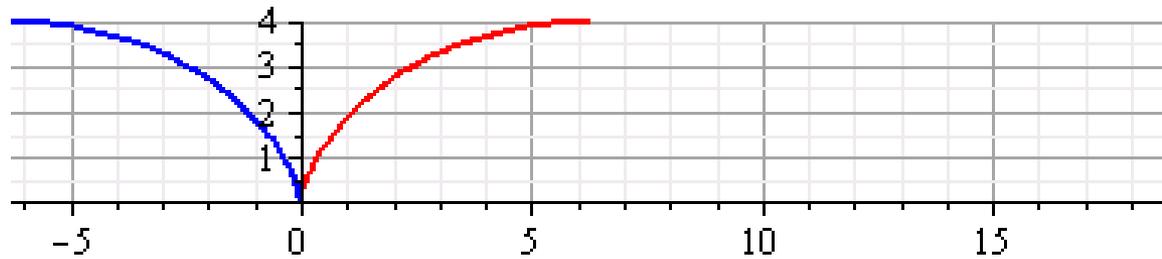


Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$



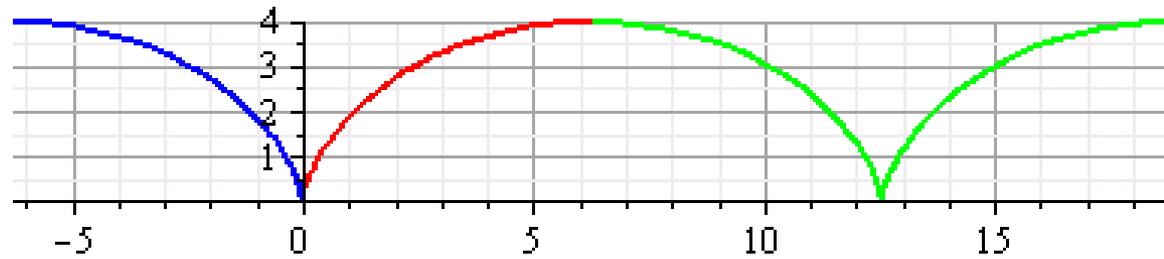
$$t \in [0, \pi]$$

Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$



$$t \in [-\pi, \pi]$$

Cycloid: $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$



$$t \in [-\pi, 3\pi]$$

