

TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

ĐỊNH NGHĨA

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trong (a, b)

$$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

$\int f(x)dx = F(x) + C$: tích phân bất định

BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$1 / \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$2 / \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$3 / \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$4 / \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$5 / \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

$$6 / \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$7 / \int \sqrt{x^2+k} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$8 / \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$9 / \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$10 / \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$11 / \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{coth} x + C$$

$$12 / \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$13 / \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

Ví dụ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{1}{\ln 3 + 1} (3e)^x + C$$

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Đổi biến:

$$\text{Đổi biến 1: } \begin{cases} x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t) dt \\ \int f(x) dx = \int f(u(t)) u'(t) dt \end{cases}$$

$$\text{Đổi biến 2: } \begin{cases} t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx \\ \int f(t) dt = \int f(u(x)) u'(x) dx \end{cases}$$

2. Tích phân từng phần:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ví dụ

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$\int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \arctan \frac{x}{2} d \left(\arctan \frac{x}{2} \right)$$

Ví dụ

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \int x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$u = x, dv = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow du = dx, v = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

$$I = \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right] + C$$

Một số lưu ý khi dùng tp từng phần

$P_n(x)$ là đa thức bậc n .

$$\int P_n \cdot \ln(\alpha x) dx$$

$$\int P_n \cdot \arctan x dx$$

$$\int P_n \cdot \arcsin x dx$$

$dv = P_n dx$, u là phần còn lại.

$$\int P_n \cdot e^{\alpha x} dx$$

$$\int P_n \cdot \sin x dx$$

$u = P_n(x)$, dv là phần còn lại.

Ví dụ

$$I = \int \arcsin x dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \text{ chọn } v = x \end{array} \right.$$

$$I = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$$

Lập công thức quy nạp I_n

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

$$u = (x^2 + a^2)^{-n} \Rightarrow du = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1} dx$$

$$dv = dx, \text{ chọn } v = x$$

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2n \int x^2 (x^2 + a^2)^{-n-1} dx$$

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2n \int (x^2 + a^2 - a^2)(x^2 + a^2)^{-n-1} dx$$

$$\begin{aligned}
I_n &= x(x^2 + a^2)^{-n} \\
&\quad + 2n \int (x^2 + a^2 - a^2)(x^2 + a^2)^{-n-1} dx \\
&= x(x^2 + a^2)^{-n} \\
&\quad + 2n \int (x^2 + a^2)^{-n} dx - 2na^2 \int (x^2 + a^2)^{-n-1} dx
\end{aligned}$$

$$I_n = x(x^2 + a^2)^{-n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + (2n - 1)I_n \right]$$

TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

Nguyên tắc: chuyển về các tích phân cơ bản

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m}, \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}^n$$

Trong đó: * m, n là các số tự nhiên,

* Tam thức bậc 2 có $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln |x - a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x - a)^m} = \frac{1}{1 - m} \frac{1}{(x - a)^{m-1}} + C \quad (\mathbf{m > 1})$$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{x^2 + px + q}$$

Đạo hàm của MS (lấy hết Ax)

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$
$$= \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C$$

Tích phân các phân thức cơ bản

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$$

$$\int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{du}{u^n}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{dv}{(v^2 + a^2)^n} = I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{v}{(v^2 + a^2)^n} + (2n - 1)I_n \right]$$

Ví dụ

$$\int \frac{x^{-1}}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x^{-1}}{x^2 - x + 1} dx + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan 2 \cdot \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} + C$$

ĐỊNH LÝ PHÂN TÍCH

Hàm hữu tỷ: $f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)^m (x-b)^n (x^2+px+q)^r}$

Với đa thức ở tử có bậc nhỏ hơn mẫu và tam thức ở mẫu có $\Delta < 0$, sẽ được phân tích ở dạng

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{B_n}{(x-b)^n} \\ + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2 + px + q)^r}$$

Một số ví dụ phân tích

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}$$

Cách làm quen thuộc: giải hệ pt

$$\Rightarrow 2x - 1 = A(x + 3) + B(x - 1) \quad *$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 3A - B = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{7}{4}$$

PP thế số: trong (*), thay $x = 1$ để tìm A, thay $x = -3$ để tìm B.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3}$$

Tính B: vế trái che $(x - 1)^2$, sau đó thay x bởi 1.

Tính C: vế trái che $(x + 3)$, thay x bởi -3 .

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \rightarrow \infty$.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{1/4}{(x - 1)^2} + \frac{-7/16}{x + 3}$$

Tính B: vế trái che $(x - 1)^2$, sau đó thay x bởi 1.

Tính C: vế trái che $(x + 3)$, thay x bởi -3 .

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \rightarrow \infty$.

$$f(x) = x \frac{2x - 1}{(x - 1)^2 (x + 3)} = x \frac{A}{x - 1} + x \frac{1/4}{(x - 1)^2} + x \frac{-7/16}{x + 3}$$

Tính B: vế trái che $(x - 1)^2$, sau đó thay x bởi 1.

Tính C: vế trái che $(x + 3)$, thay x bởi -3 .

Tính A: nhân 2 vế với x rồi cho $x \rightarrow \infty$.

$$0 = A + 0 - \frac{7}{16} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{7}{16}$$

$$f(x) = \frac{4x^4 - 3x^3 - 32x^2 + 38x + 11}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

$$= 4x + 1 + \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

$$= 4x + 1 + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x + 3)(x - 2)^2}$$

$$= 4x + 1 + \frac{14/25}{x + 3} + \frac{-1/5}{x - 2} + \frac{11/25}{(x - 2)^2}$$

Sử dụng nguyên tắc chung

Quy đồng mẫu số và đồng nhất tử số 2 vế

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 + x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$2x - 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 3)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (A + B)x^2 + (A + 3B + C)x + A + 3C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 3B + C = 2 \\ A + 3C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

Ví dụ tính tích phân

$$\int \frac{2x - 1}{(x - 1)^2(x + 3)} dx$$

$$= \int \frac{7/16}{x - 1} dx + \int \frac{1/4}{(x - 1)^2} dx + \int \frac{-7/16}{x + 3} dx$$

$$= \frac{7}{16} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \frac{1}{x - 1} - \frac{7}{16} \ln |x + 3| + C$$

$$\int \frac{2x - 1}{(x^2 + x + 1)(x + 3)} dx = \int \frac{-1}{x + 3} dx + \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= -\ln|x + 3| + \frac{1}{2} \int \frac{(2x + 1) dx}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= -\ln|x + 3| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x + 1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

$$\int R \left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{m_2}} \right)$$

trong đó m_1, m_2 , là các số nguyên; n_1, n_2 là các số tự nhiên (**bậc căn**).

Phương pháp chung: đặt

$$t^n = \frac{ax + b}{cx + d} \quad n \text{ là BSCNN}(n_1, n_2)$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2 + x}}{\sqrt{x+1}} dx \quad n_1 = 3, n_2 = 2$$

$$t^6 = x + 1 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

$$I = \int \frac{t^4 + t^6 - 1}{t^3} 6t^5 dt = 6 \int t^6 + t^8 - t^2 dt$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$$

Các trường hợp riêng của pp Eurler

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

Nguyên tắc chung: đưa về bình phương đúng của các tam thức dưới căn và áp dụng tp bảng.

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right]$$

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Tương tự cho trường hợp còn lại.

Ví dụ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}$$

Ví dụ

$$\int \frac{(x + 1) dx}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}}$$

TỔNG QUÁT

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Sau khi đưa tam thức bậc 2 về bình phương đúng, có thể rơi vào các TH sau:

$$\int R(u, \sqrt{A^2 - u^2}) du \Rightarrow \text{Đặt } u = A \sin t$$

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - A^2}) du \Rightarrow \text{Đặt } u = A / \sin t$$

$$\int R(u, \sqrt{u^2 + A^2}) du \Rightarrow \text{Đặt } u = A \tan t$$

Lưu ý

$$\int \frac{dx}{(x-k)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Đặt $x-k=1/u$ sẽ đưa về dạng

$$\int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a'u^2+b'u+c'}}$$

Ví dụ

$$I = \int \sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3} dx$$

$$= \int \sqrt{(x + 2)^2 + 1^2}^3 dx$$

$$I = \int \sqrt{(u^2 + 1)^3} du \quad \text{Đặt } u = \tan t$$

$$I = \int \sqrt{(\tan^2 t + 1)^3} \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{(\tan^2 t + 1)^3} \frac{dt}{\cos^2 t} \\
&= \int \frac{dt}{\cos^5 t} = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt \\
&= \int \frac{dv}{1 - v^2}
\end{aligned}$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{x^{-1} \sqrt{x^2 + x^{-2}}} \quad u = \frac{1}{x^{-1}} \Rightarrow x = \frac{1}{u} + 1$$

$$I = \int u \frac{-\frac{1}{u^2} du}{\sqrt{\left(\frac{1}{u} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{u} + 1\right)^{-2}}} = - \int \frac{du}{u \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{3}{u}}}$$

$$= - \int \frac{du}{\sqrt{3u + 1}} = - \frac{2}{3} \sqrt{3u + 1} + C$$

Ví dụ

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 2x}}$$

TÍCH PHÂN TREBUSEV $\int x^m (ax^n + b)^p dx$

m, n, p là các số hữu tỷ

TH 1: p là số nguyên :

Đặt $x = t^k$, k là BSCNN mẫu số của m, n (bậc căn).

TH 2: $\frac{m+1}{n}$ là số nguyên:

Đặt $ax^n + b = t^k$, k là mẫu số của p (bậc căn).

TH 2: $\frac{m+1}{n} + p$ là số nguyên:

$\int x^{m \cdot n \cdot p} (a + bx^{-n})^p dx$: Đặt $bx^{-n} + a = t^k$, k là mẫu số của p (bậc căn).

VÍ DỤ

$$I = \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

$$m = -1, n = 2, p = -\frac{2}{3}$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$$

$$m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx$$

* $m = 2k + 1$ $I = - \int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x)$

* $n = 2k + 1$ $I = \int \sin^m x \cos^{2k} x d(\sin x)$

* m, n chẵn: dùng công thức hạ bậc

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

Thay x bởi $-x$, biểu thức dưới dấu tích phân không đổi

$$\Rightarrow t = \cos x$$

Thay x bởi $\pi - x$, biểu thức dưới dấu tích phân không đổi

$$\Rightarrow t = \sin x$$

Thay x bởi $\pi + x$, biểu thức dưới dấu tích phân không đổi

$$\Rightarrow t = \tan x$$

Tổng quát: $\Rightarrow t = \tan \frac{x}{2}$

VÍ DỤ

$$I = \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \, d(\cos x)$$

$$= - \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \, d(\cos x)$$

$$= - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$$

Ví dụ

$$I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x + 2 \sin x} dx$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$$

Một dạng đặc biệt của tp hàm lượng giác

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x + c}{a' \sin x + b' \cos x + c'} dx$$

Biểu diễn

$$\text{TỬ SỐ} = A \times (\text{đạo hàm mẫu số}) + B \times (\text{mẫu số}) + C$$

Tìm A, B, C bằng đồng nhất thức.

Ví dụ

$$I = \int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx$$

$$\sin x + 2 \cos x - 3$$

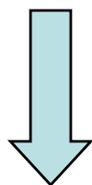
$$= A(\sin x - 2 \cos x + 3) + B(\sin x - 2 \cos x + 3) + C$$

$$\Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x - 3$$

$$= A(\cos x + 2 \sin x) + B(\sin x - 2 \cos x + 3) + C$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{4}{5}, B = -\frac{3}{5}, C = -\frac{6}{5}$$

$$I = \frac{4}{5} \int \frac{d(\sin x - 2 \cos x + 3)}{\sin x - 2 \cos x + 3} - \frac{3}{5} x - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3}$$



$$\frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3|$$



$$t = \tan \frac{x}{2}$$

Nhận xét

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{a' \sin x + b' \cos x} dx$$