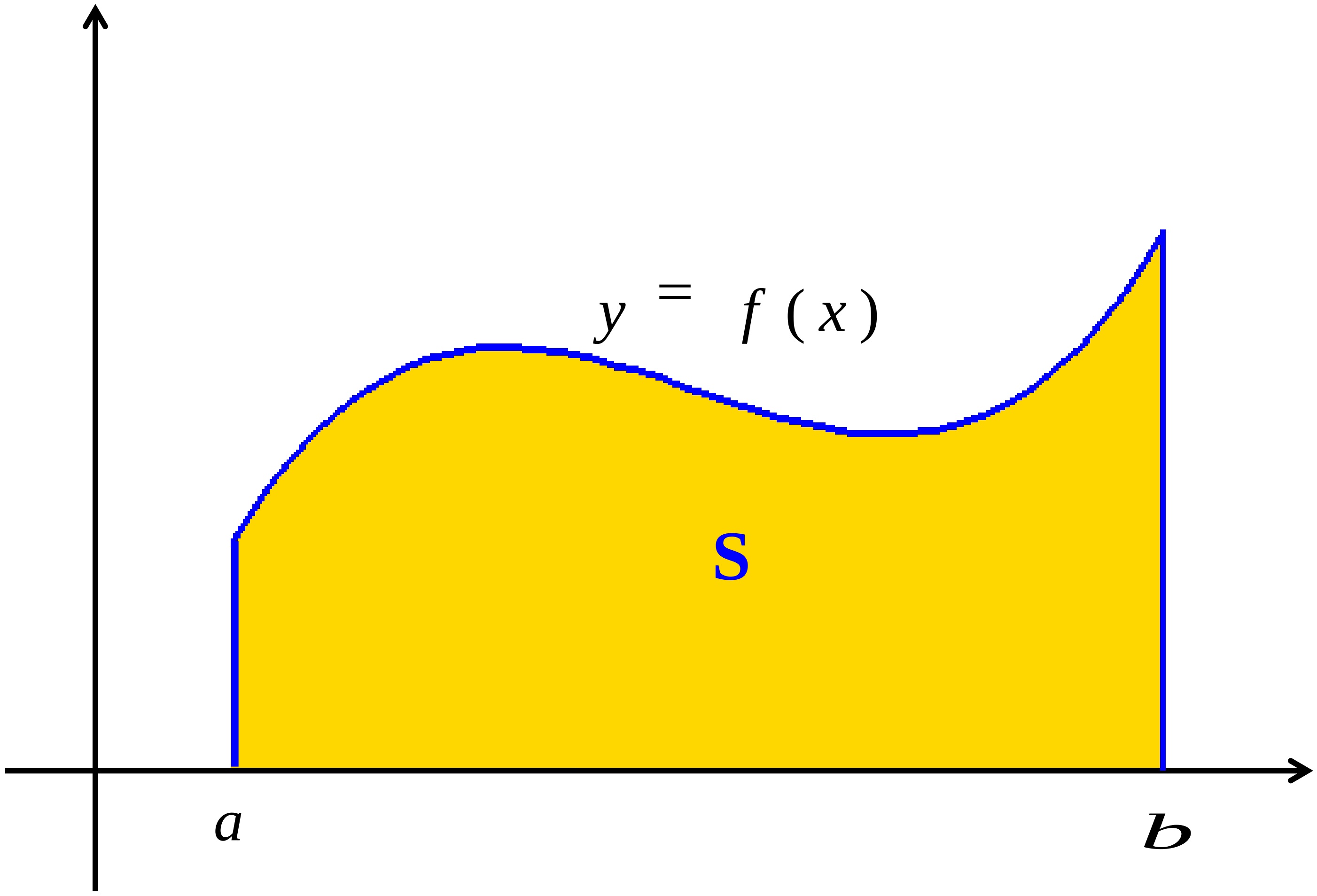
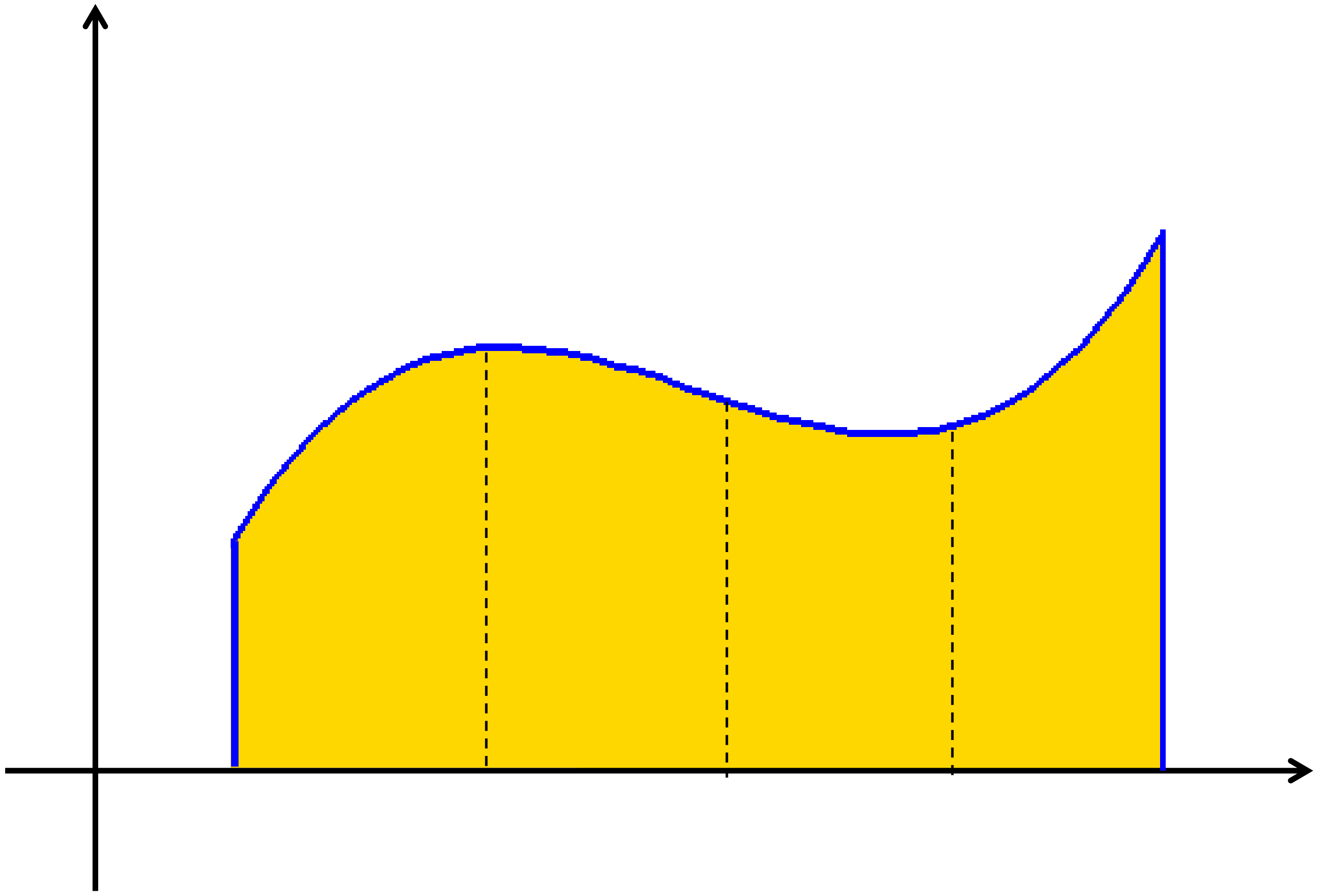
# TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

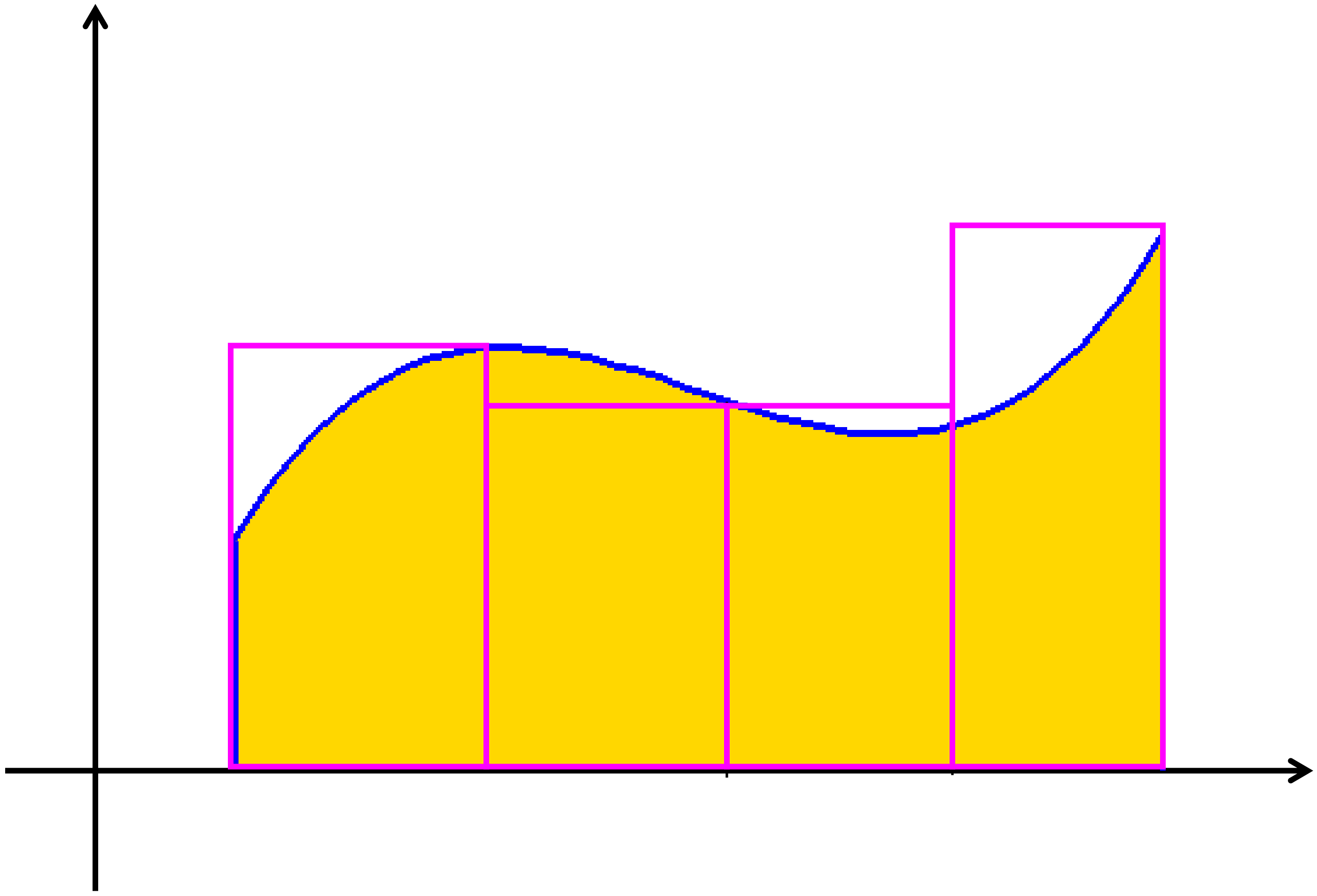
# Bài toán diện tích



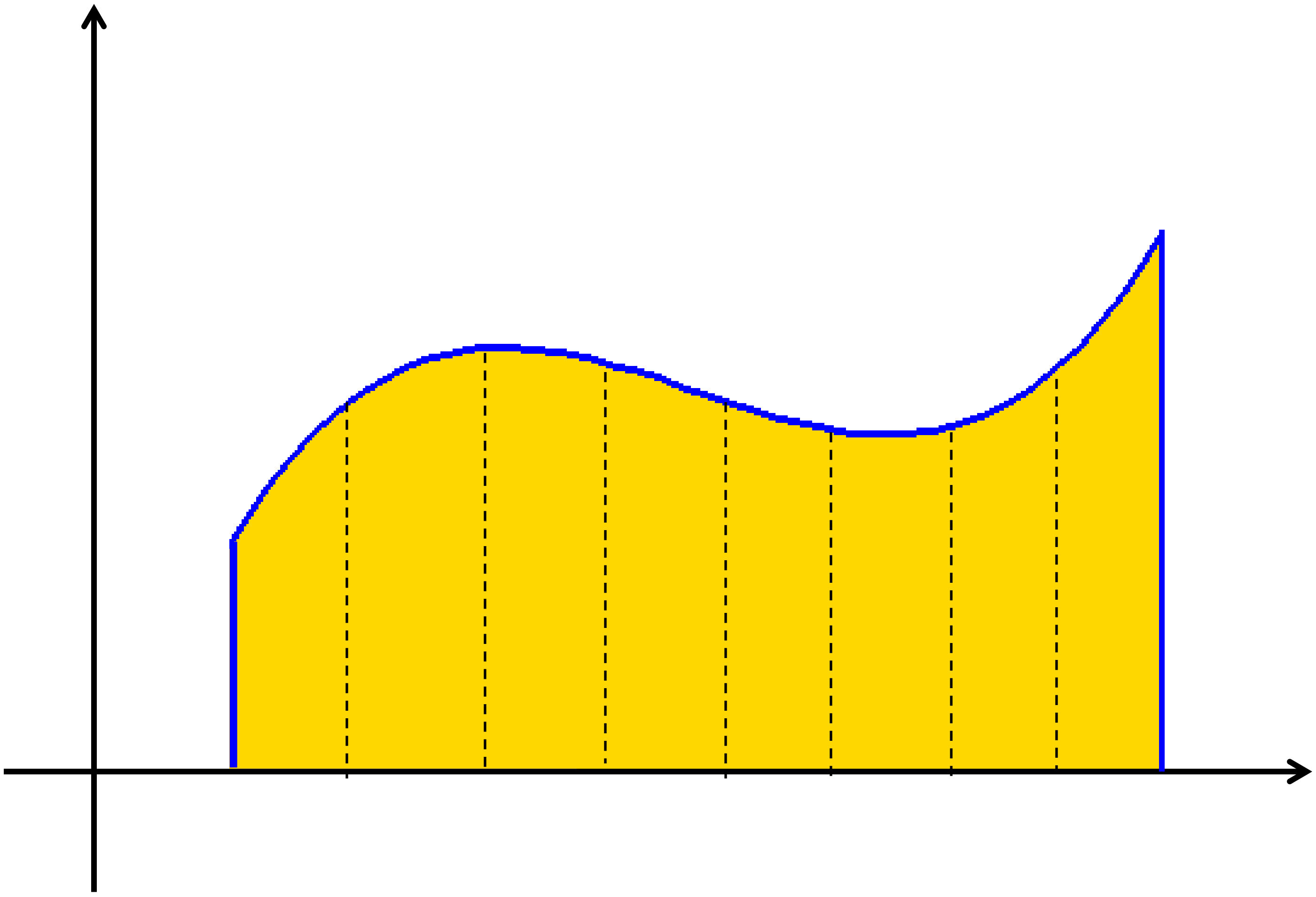
# Chia S thành nhiều diện tích con



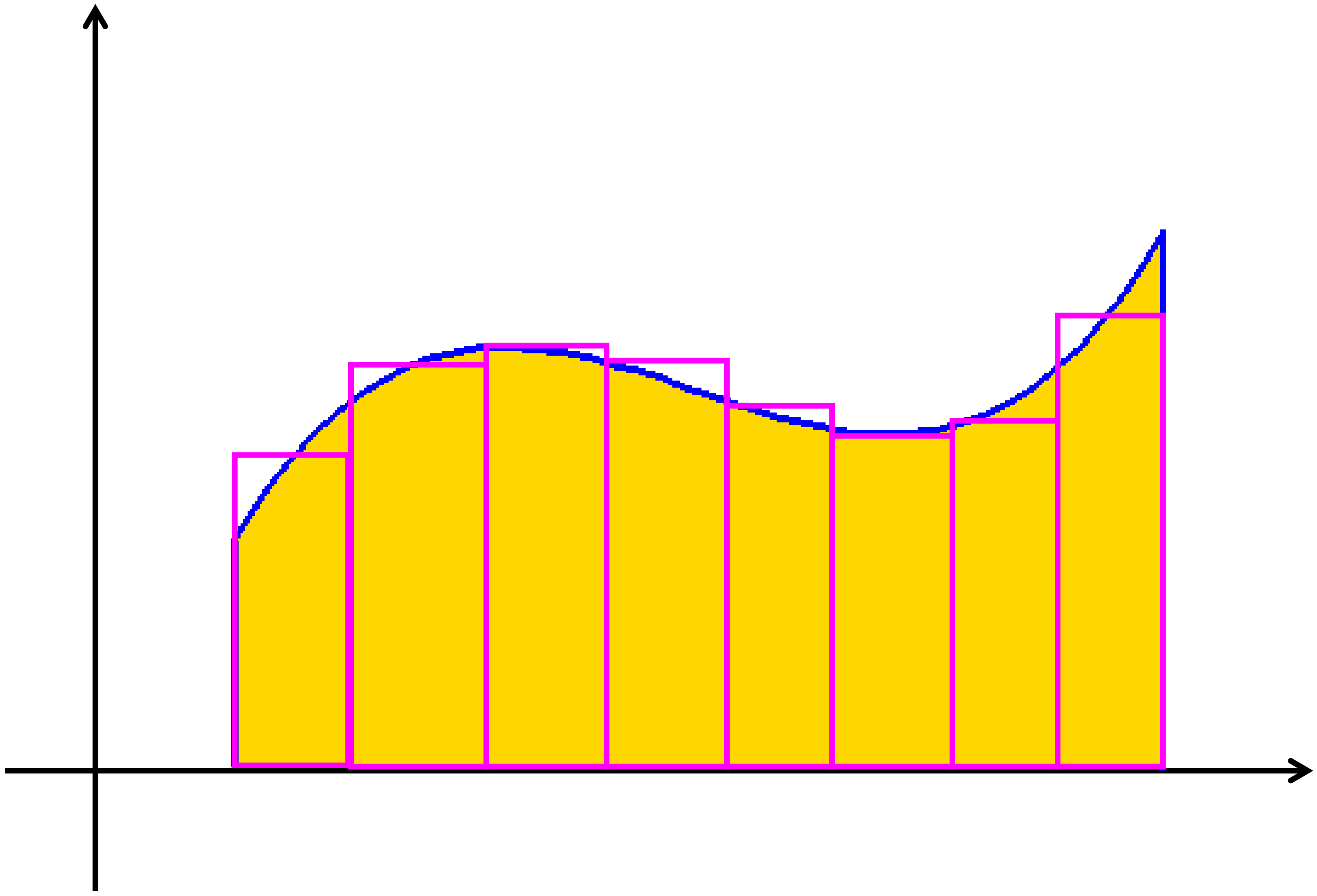
# Xấp xỉ các dt con bằng dt các hình chữ nhật con



# Chia S càng nhỏ



# Tổng diện tích xấp xỉ càng gần S



# ĐỊNH NGHĨA

Phân hoạch P của [a, b] là tập hợp các điểm chia của

[a, b] thỏa mãn $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$

$d = \max\{(x_{i+1} - x_i) / i = 0,.., n-1\}$: đường kính phân hoạch

Xét hàm số f(x) xác định trên [a, b], P là 1 phân hoạch của [a, b].

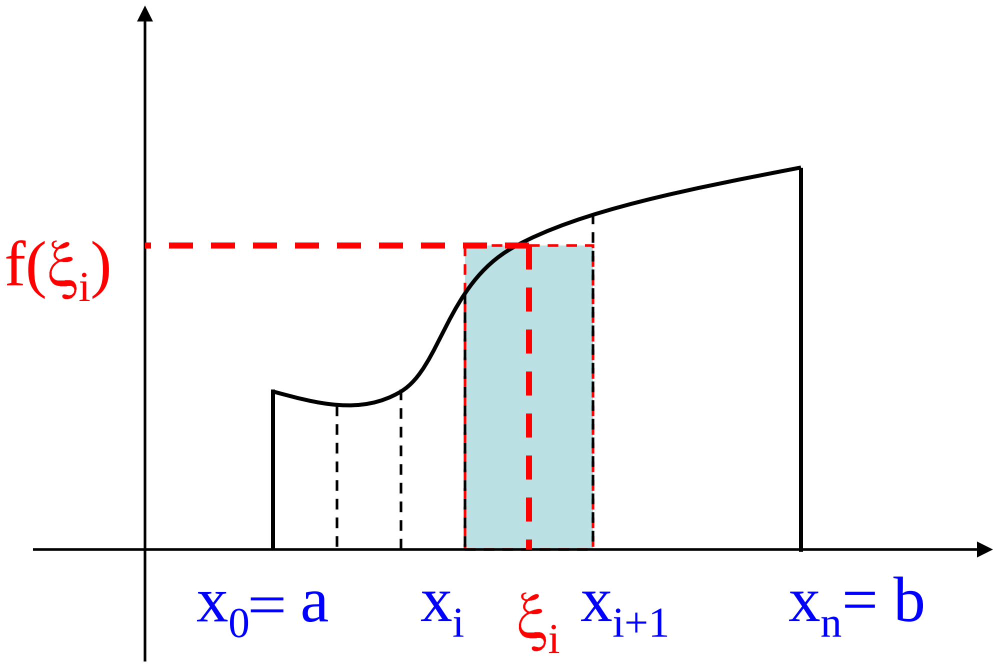
Trên $[x_i, x_{i+1}]$ chọn $\xi_i$ tùy ý, đặt

$$\boxed{S(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)}$$

Tổng tích phân ứng với phân hoạch P

$$S(P,f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

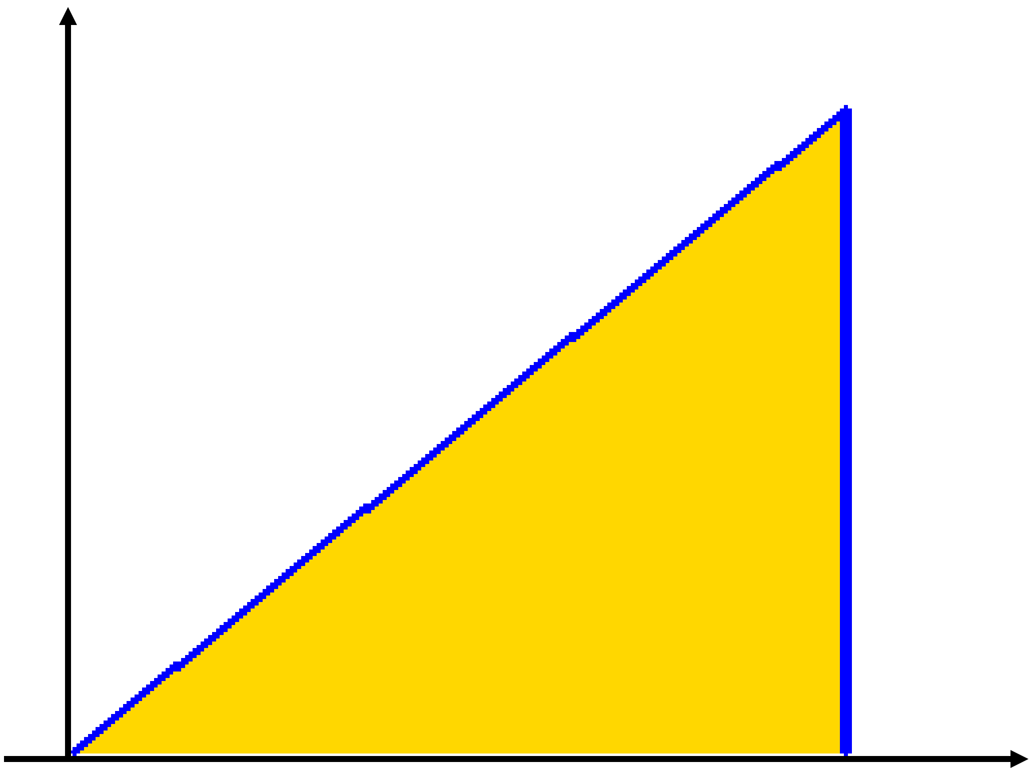
f khả tích ⇔ tồn tại giới hạn hữu hạn của S(P, f) khi d→ 0 (không phụ thuộc P)




$$\lim_{d\to 0} S(P,f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

# Ví dụ về tổng tích phân

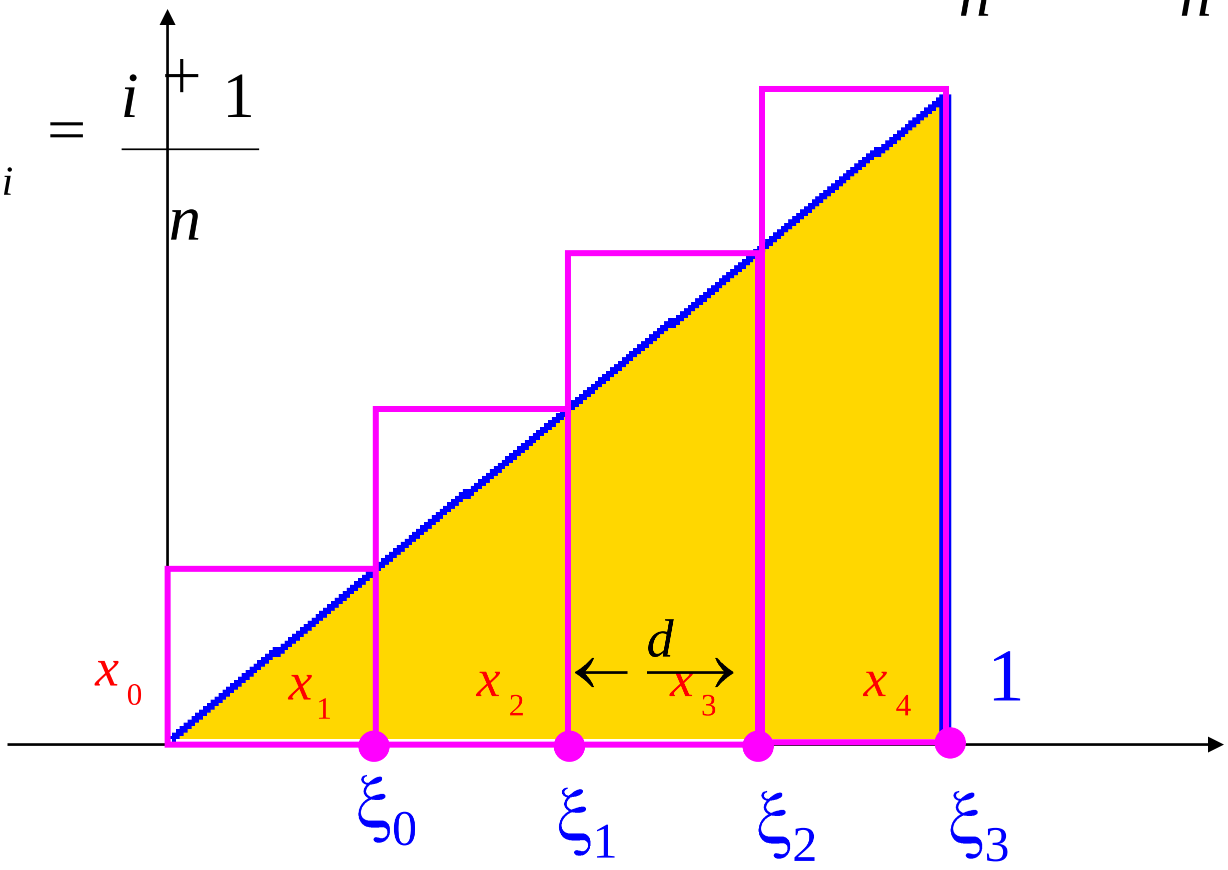
Cho $f(x) = x$ trên $[0,1]$, phân hoạch đều $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Tìm tổng tích phân nếu: $\xi_i = x_{i+1}$

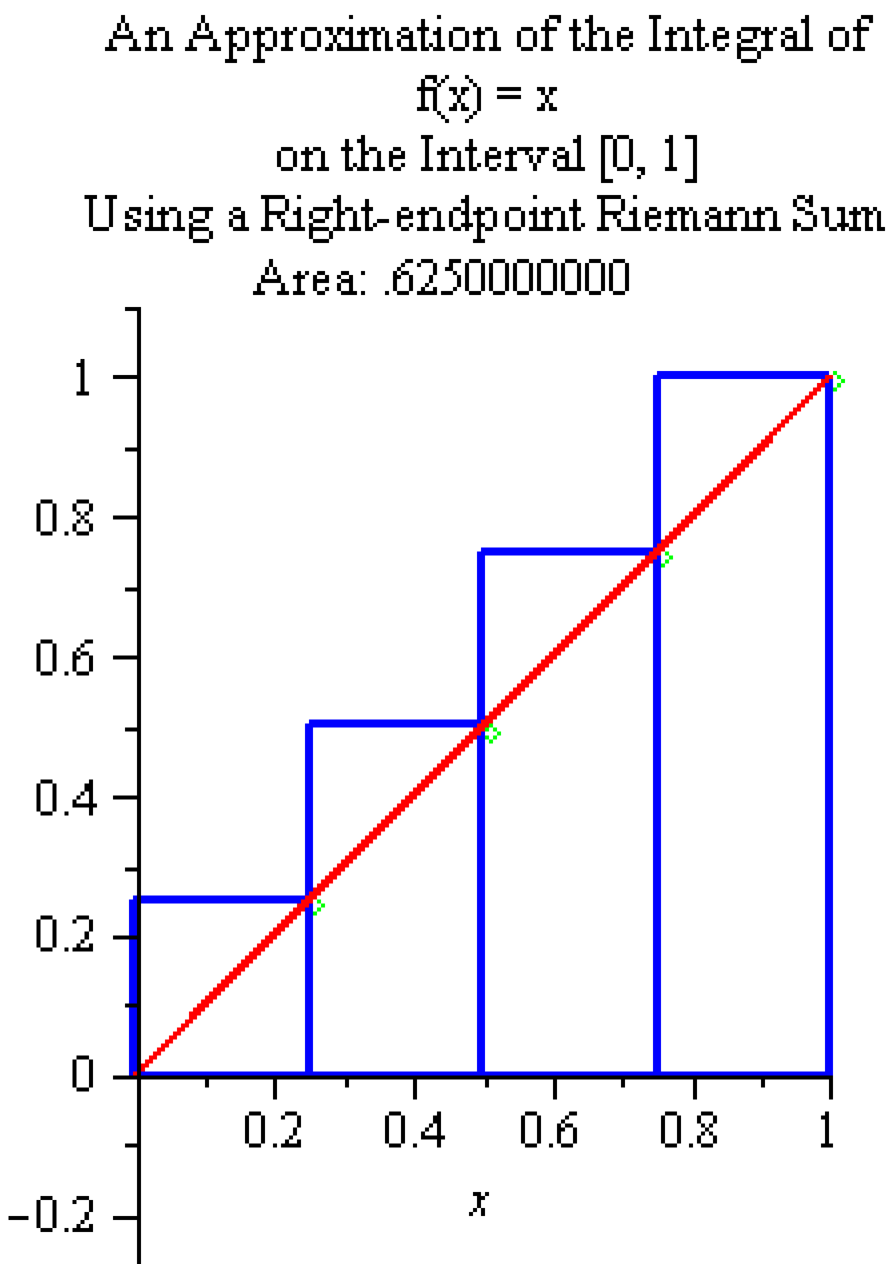


$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n} \Rightarrow d = \frac{1}{n},$$

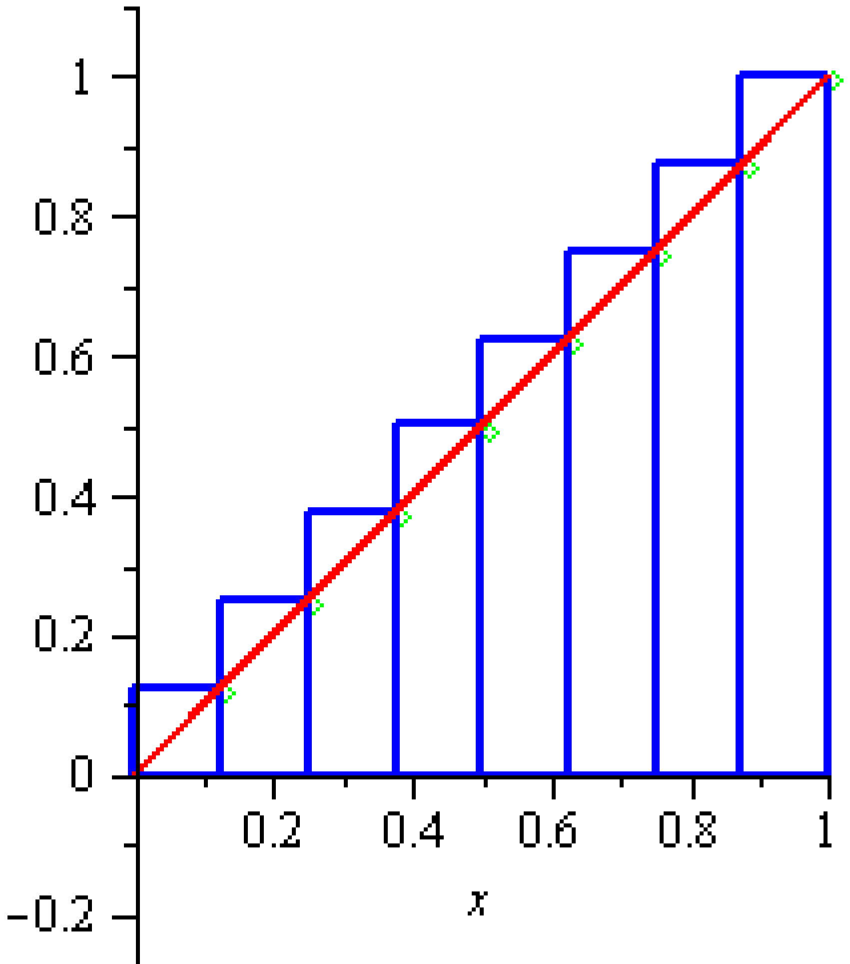
$$\xi_i = x_{i+1} = 0 + (i+1)\frac{1}{n} = \frac{(i+1)}{n},$$

$$f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i+1}{n}$$

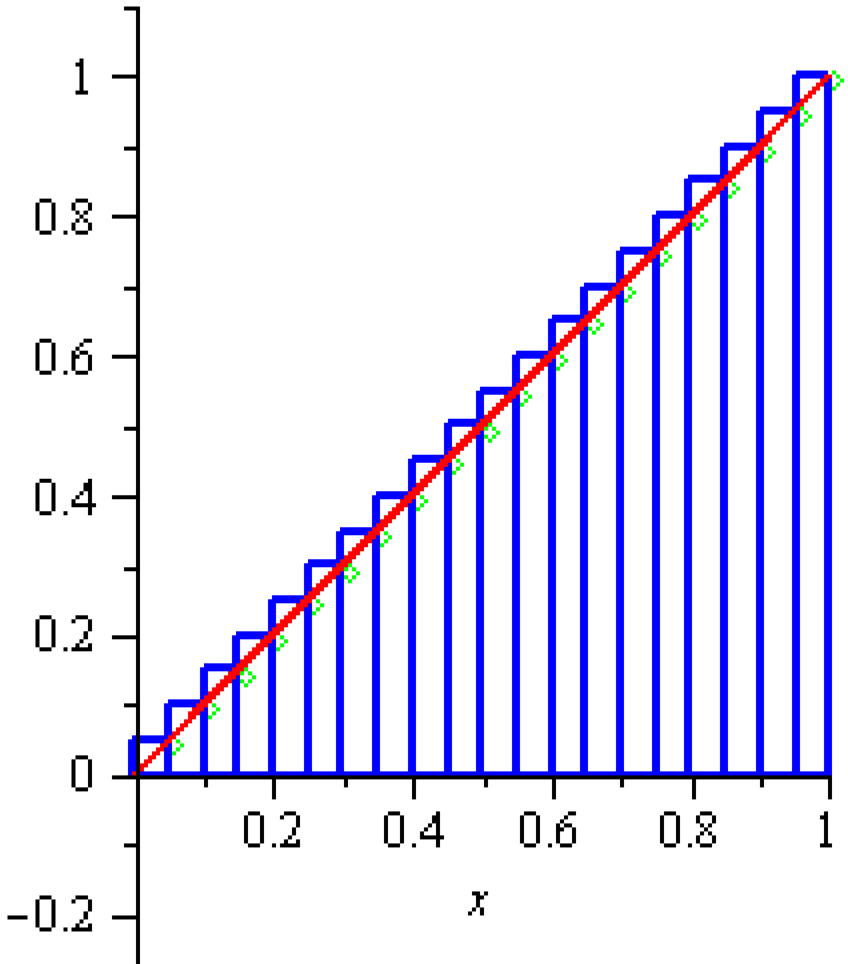



An Approximation of the Integral of
f(x) = x
on the Interval [0, 1]
Using a Right-endpoint Riemann Sum
Area: .6250000000
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

An Approximation of the Integral of
f(x) = x
on the Interval [0, 1]
Using a Right-endpoint Riemann Sum
Area: .5625000000



An Approximation of the Integral of
f(x) = x
on the Interval [0, 1]
Using a Right-endpoint Riemann Sum
Area: .5250000000



$$S(P,f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(i+1)}{n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)=\frac{1}{n^2}[1+\dots+n]$$

$$=\frac{(n+1)n}{2n^2}\xrightarrow[d\to 0]{}\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

# Điều kiện để f khả tích trên [a, b]

Hàm f liên tục trên [a, b] ngoại trừ 1 số hữu hạn các điểm gián đoạn loại 1 thì khả tích trên [a,b].

( Khi đó $\int_a^b f(x)\,dx$ là tích phân xác định.)

Ví dụ: $\int_{-1}^{2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 x\ln x\,dx$ là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 1.

$\int_0^2 \ln x\,dx$ không là tpxđ vì x = 0 là điểm gđ loại 2.

# Tính chất hàm khả tích

1. f khả tích trên [a, b] thì f bị chặn trên [a,b]
2. f khả tích trên [a,b] thì | f | khả tích trên [a,b]
3. f khả tích trên [a,b], m và M lần lượt là gtnn và gtln của f trên [a,b], khi đó

$$* \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$* \quad f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

# Tính chất hàm khả tích

4. $\int_a^b dx = b - a,\qquad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad$ 6. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

7. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

# Tính chất hàm khả tích

8. $\int_a^b dx = b - a$

9. f(x) tuần hoàn với chu kỳ T:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$

10. f lẻ trên [-a, a]: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

f chẵn trên [-a, a]: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

# Định lý giá trị trung bình

f liên tục trên [a,b], khi đó tồn tại c $\in$[a,b] sao cho

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Áp dụng: tính giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dt$

Hàm $e^{t^2}$ liên tục trên [0, x], theo định lý, tồn tại c$\in$ [0,x] sao cho

$$\int_0^x e^{t^2}dx = (x-0)e^{c^2} > x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

# Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân

* Nếu f khả tích trên [a,b] thì hàm số

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ liên tục trên [a,b]

* Nếu f liên tục trên [a,b] thì F khả vi trên [a,b] và

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$$ *Đạo hàm theo cận trên*

Hệ quả: $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$ f liên tục, φ và ψ khả vi

$$\boxed{F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)}$$

# Chứng minh

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \xrightarrow[x_0\in[a,b]]{x\to x_0} F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$\left|F(x)-F(x_0)\right|=\left|\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_a^{x_0} f(t)\,dt+\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le M\left|x-x_0\right| \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

$$F'(x_0) = \left( \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right)' = f \quad x_0 \ , \forall x_0 \in \quad a, b$$

$$\frac{F \quad x - F \quad x_0}{x - x_0} = \frac{\int_a^{x} f \quad t \quad dt - \int_a^{x_0} f \quad t \quad dt}{x - x_0}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{x} f \quad t \quad dt}{x - x_0} = \frac{f \quad c \quad x - x_0}{x - x_0} = f \quad c$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} f \quad x_0$$

# Ví dụ

1/ Tính đạo hàm tại x = 1 của $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \ln(1+t^2)\,dt$

$$f'(x) = 2x.\ln(1+(x^2+1)^2) - 2x.\ln(1+x^4)$$

2/ Tìm  cực trị của f(x) trong (0, 1)

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2+t+1}\,dt$$

$f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x+1}$ đổi dấu khi đi qua x = 1/2 $\in$(0, 1)

3/ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$

Theo vd phần định lý giá trị trung bình

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dx = +\infty$$

Vậy gh trên có dạng VĐ ∞/∞, áp dụng qtắc L'H

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(e^{x^2}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{\left(xe^{x^2}\right)'}+1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)'}{\left( x e^{x^2} \right)'} + 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}} + 1 = 1$$

# Công thức Newton-Leibnitz

f liên tục trên [a, b].

F là nguyên hàm của f trên [a, b]

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

# Phương pháp đổi biến số

- Nếu f liên tục trên [a, b]
- x = u(t) thỏa u(t) và u'(t) liên tục trên [α, β]
- u(α) = a, u(β) = b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt$$

# PP tích phân từng phần

Nếu u(x), v(x) cùng các đạo hàm liên tục trên [a, b]

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

# Ví dụ

$$\int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|\Bigg|_3^4$$

$$= \ln 9 - \ln(3+3\sqrt{2}) = \ln\frac{3}{1+\sqrt{2}}$$

# Ví dụ

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x} = t$$

$$I = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_0^2 = 2(2 - \ln 3)$$

# Một tích phân cần nhớ

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx}$$

$$\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x\,dx \end{cases}$$

$$I_n = -\cos x.\sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x.\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx$$

$$= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\boxed{\begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{cases}}$$