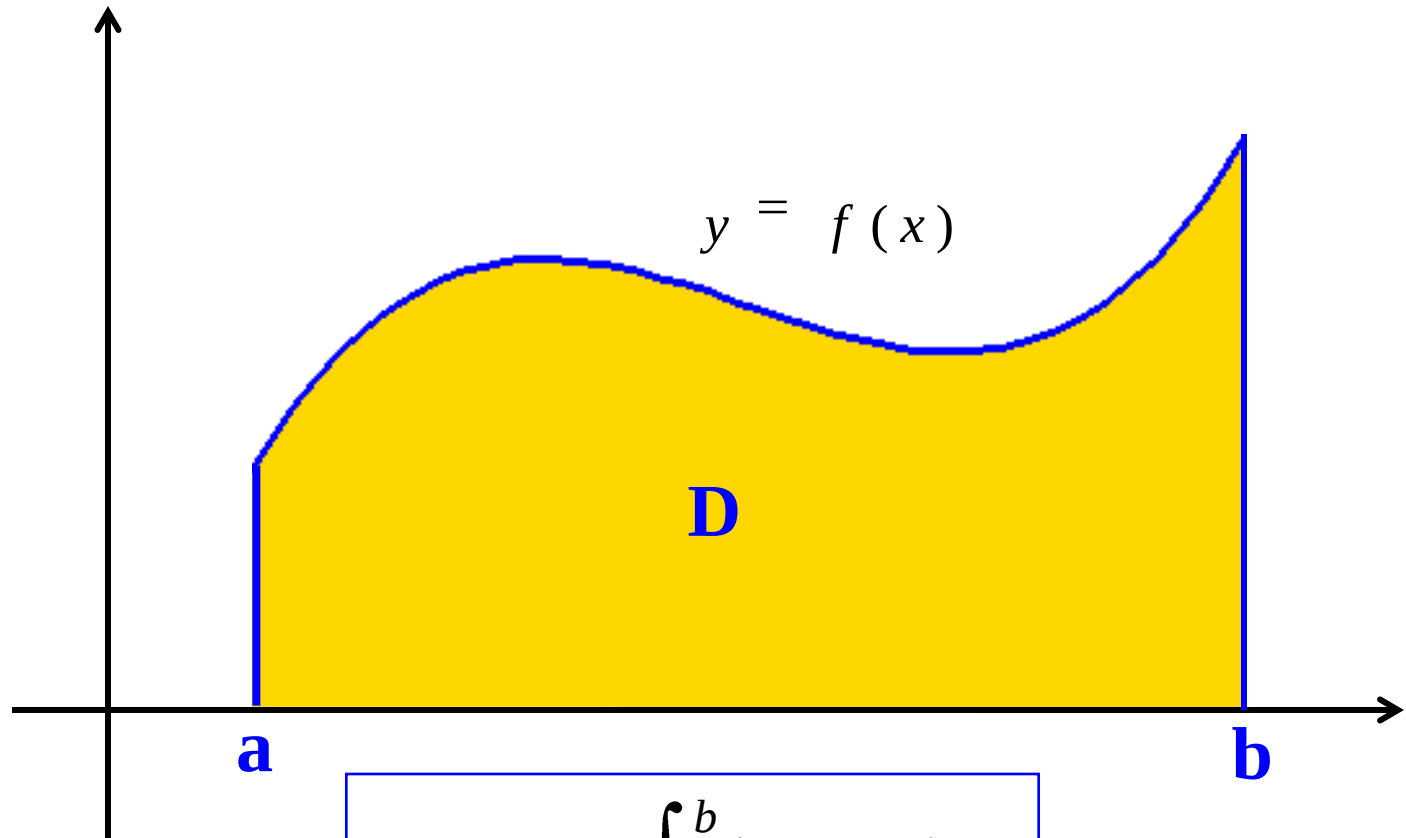


ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bài toán diện tích

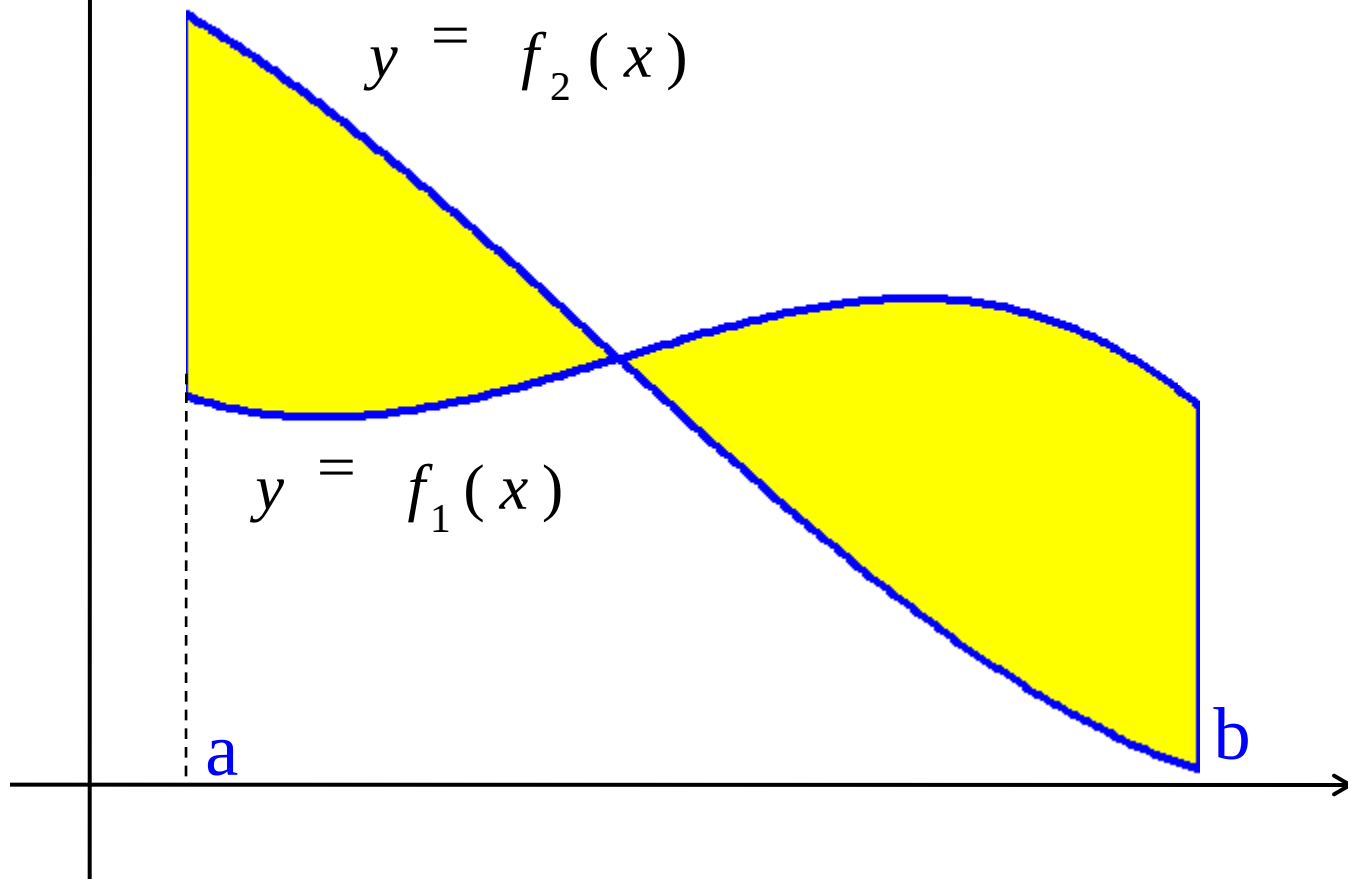
$D: a \leq x \leq b, y$ nằm giữa 0 và $f(x)$



$$S(D) = \int_a^b |f(x)| dx$$

Bài toán diện tích

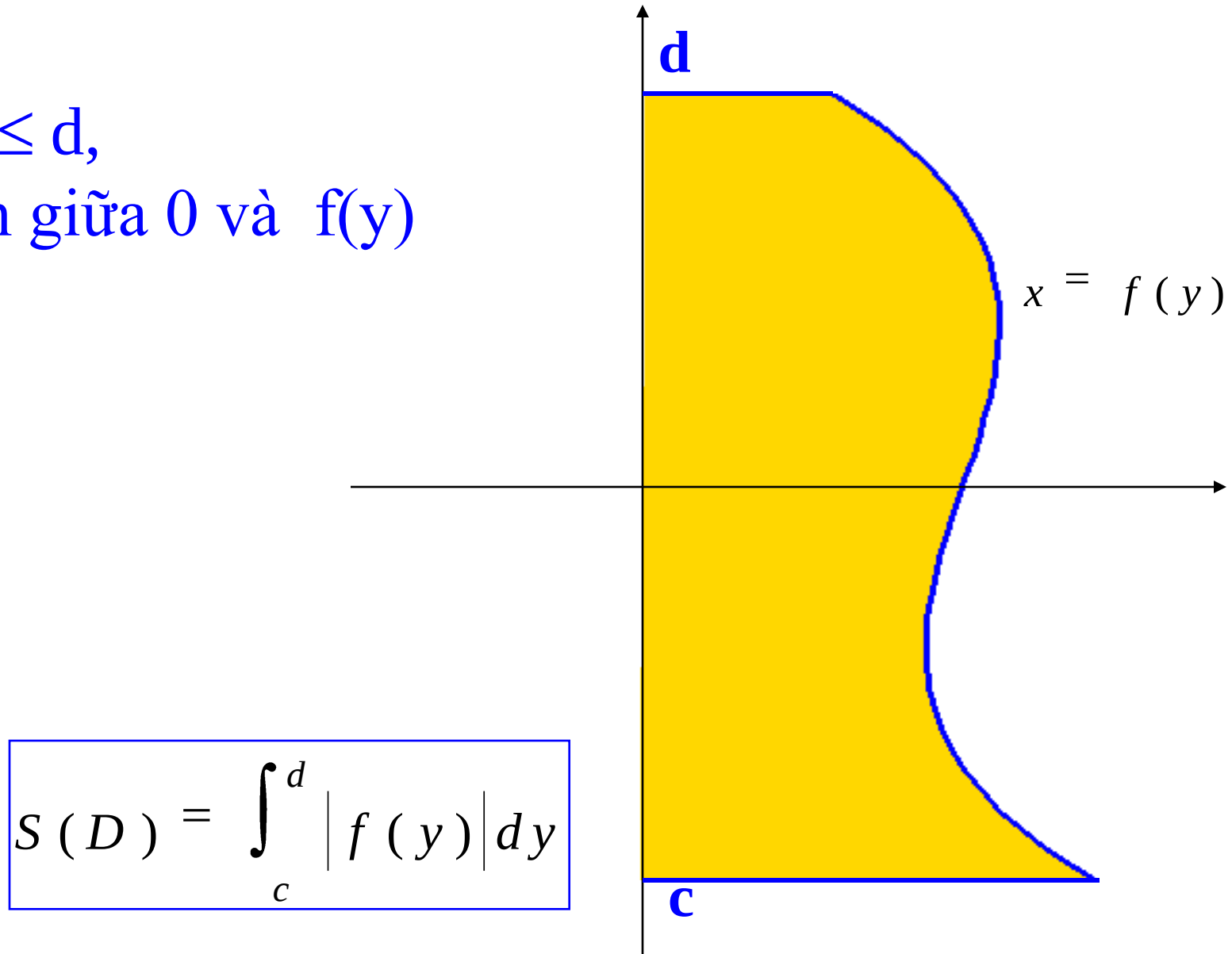
$D: a \leq x \leq b, y$ nằm giữa $f_1(x)$ và $f_2(x)$



$$S(D) = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

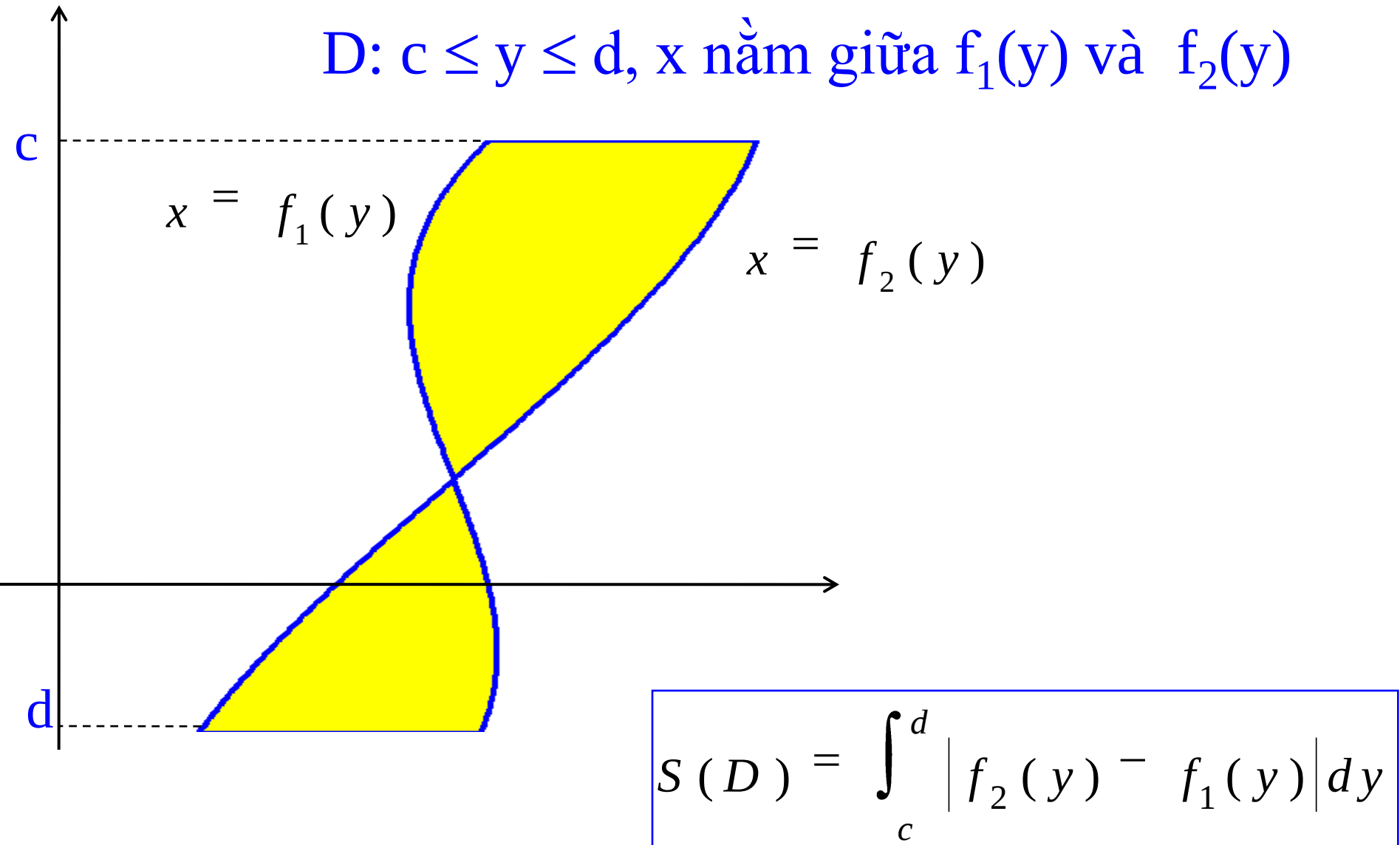
Bài toán diện tích

$D: c \leq y \leq d,$
 x nằm giữa 0 và $f(y)$



$$S(D) = \int_c^d |f(y)| dy$$

Bài toán diện tích



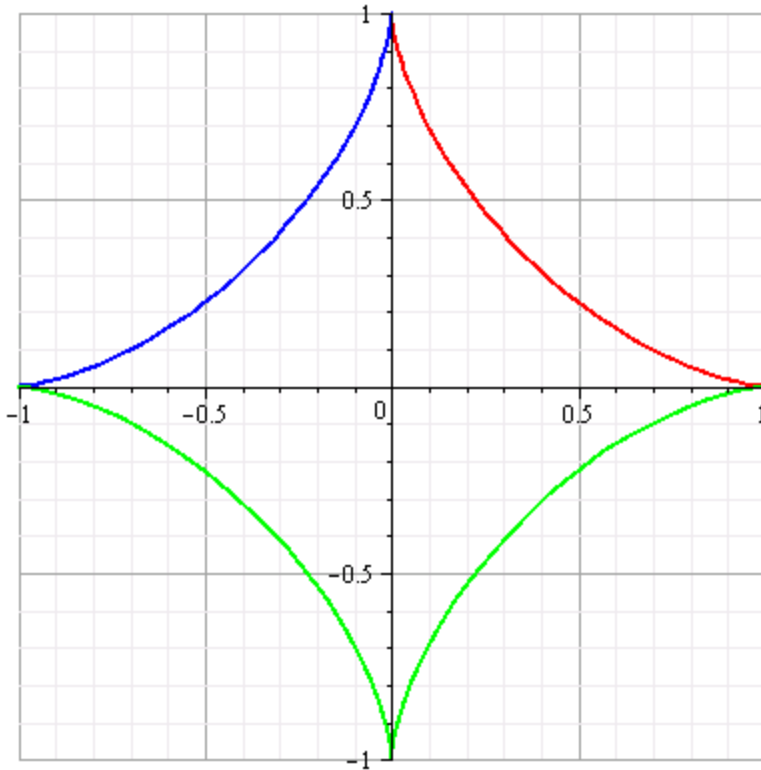
Lưu ý

Có thể vẽ hình các đường cong đơn giản hoặc tìm hoành độ (tung độ giao điểm) để xác định cận tích phân.

- Tính hoành độ giao điểm $\Rightarrow$ tích phân tính theo biến x (ngược lại là tính theo y)

Lưu ý về tính đối xứng

Nếu miền D đối xứng qua Ox , D_1 là phần phía trên Ox của D .



$$S(D) = 2S(D_1)$$

Ví dụ

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi:

$$y = \sqrt{x}(x - 2), y = 0$$

Hoành độ giao điểm: 0, 2

$$S(D) = \int_0^2 \left| \sqrt{x}(x - 2) - 0 \right| dx$$

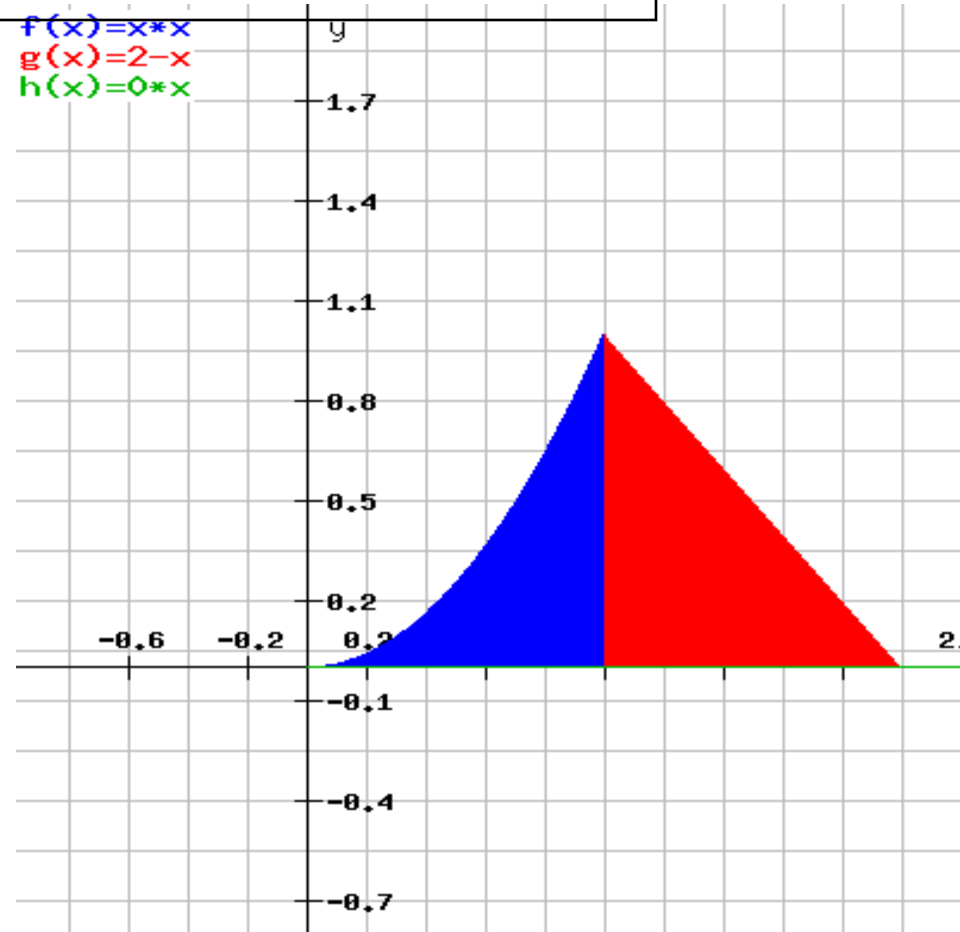
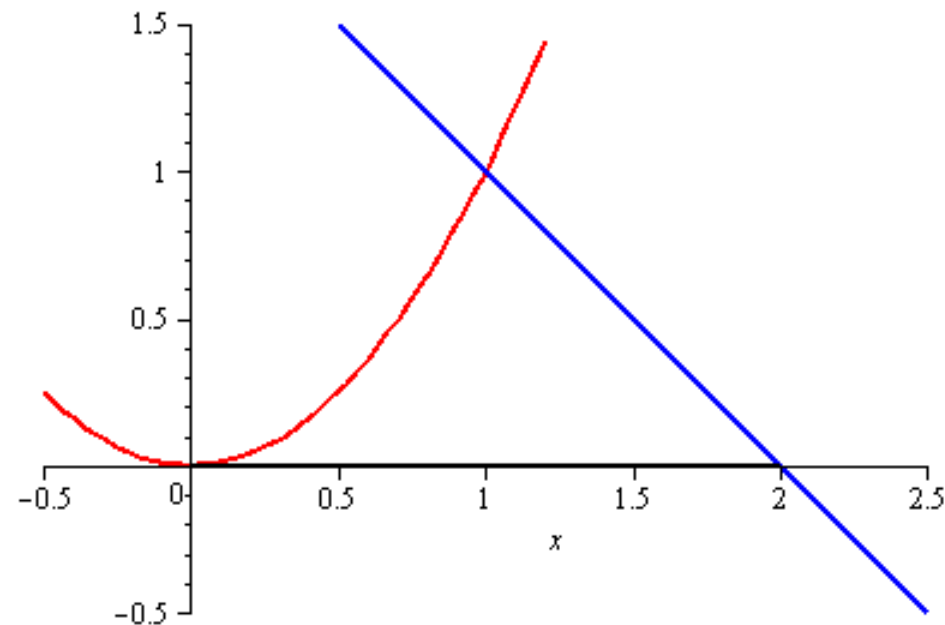
$$= \int_0^2 \sqrt{x}(2 - x) dx = \frac{16}{15}$$

Ví dụ

Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi:

$$y = x^2, y = 0, x + y = 2$$

$f(x) = x^2$
 $g(x) = 2 - x$
 $h(x) = 0 \cdot x$



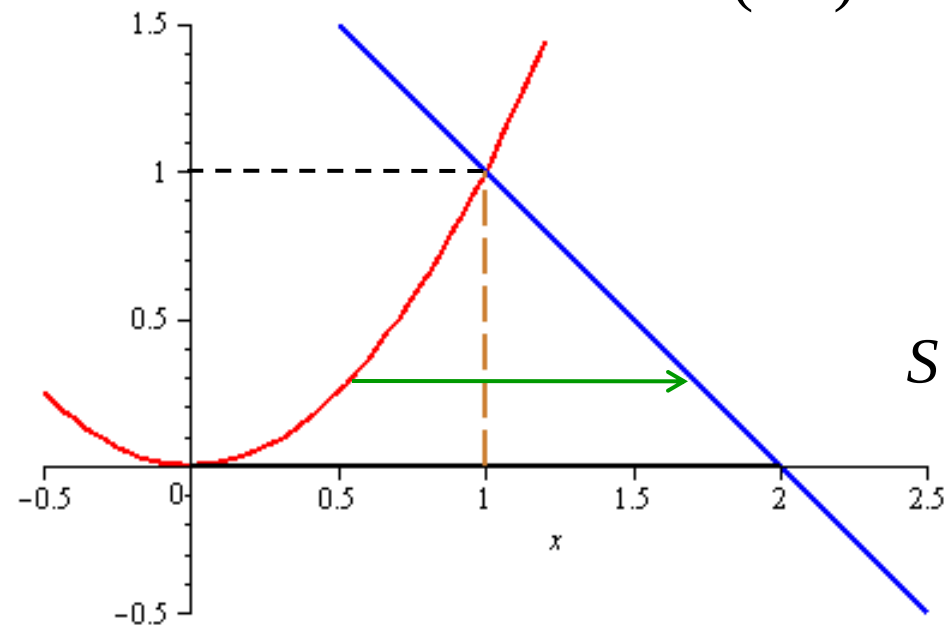
Ví dụ

$$S(D) = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

$$S(D) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x) dx$$

Hoặc

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^1 \left[(2 - y) - \sqrt{y} \right] dy \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$



Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường:

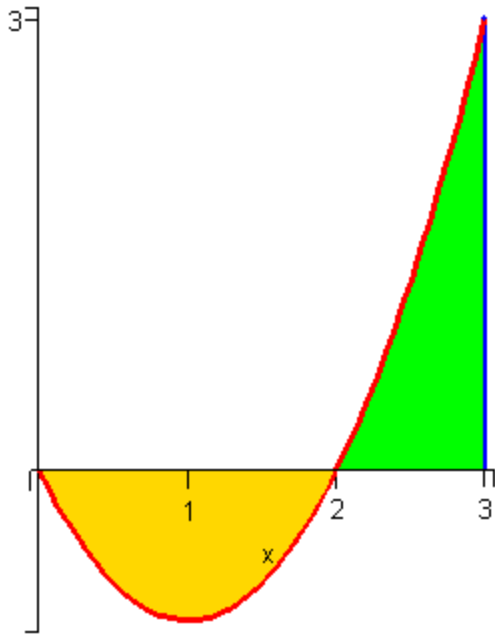
$$y^2 + 8x = 16, y^2 - 24x = 48$$

Tung độ giao điểm: $y = \pm \sqrt{24}$

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} \left| \frac{16 - y^2}{8} - \frac{y^2 - 48}{24} \right| dx \\ &= \int_{-\sqrt{24}}^{\sqrt{24}} \left(\frac{16 - y^2}{8} - \frac{y^2 - 48}{24} \right) dy \end{aligned}$$

Tính diện tích miền D :

$$D : y = x^2 - 2x, y = 0, 0 \leq x \leq 3$$



$$S(D) = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

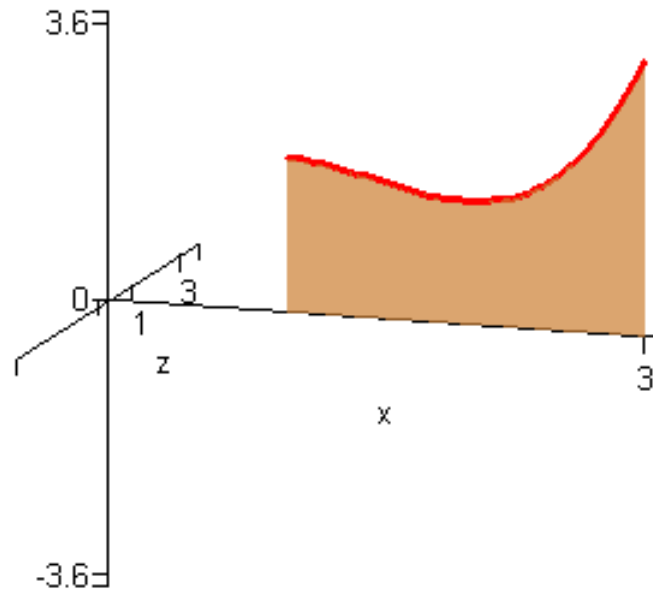
$$= \int_0^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$+ \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

Bài toán thể tích

D: $a \leq x \leq b$, y nằm giữa 0 và $f(x)$

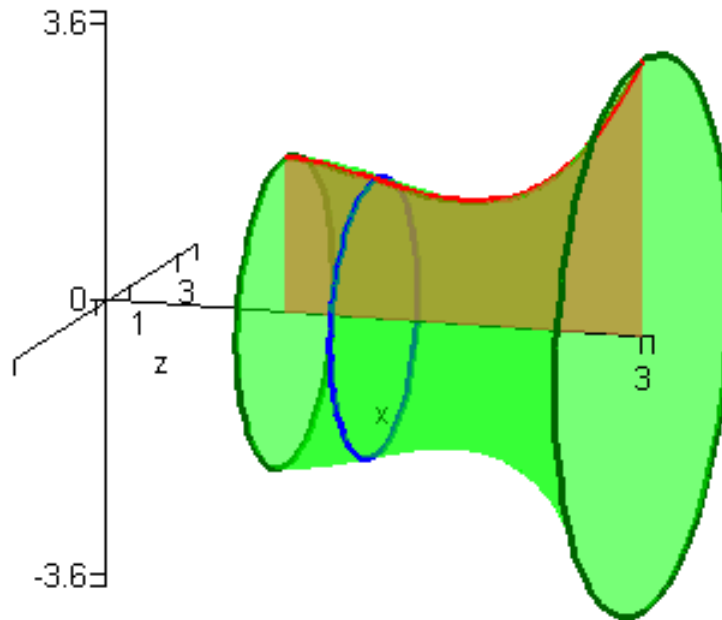


Quay D xung quanh Ox

Bài toán thể tích

$D: a \leq x \leq b$, y nằm giữa 0 và $f(x)$

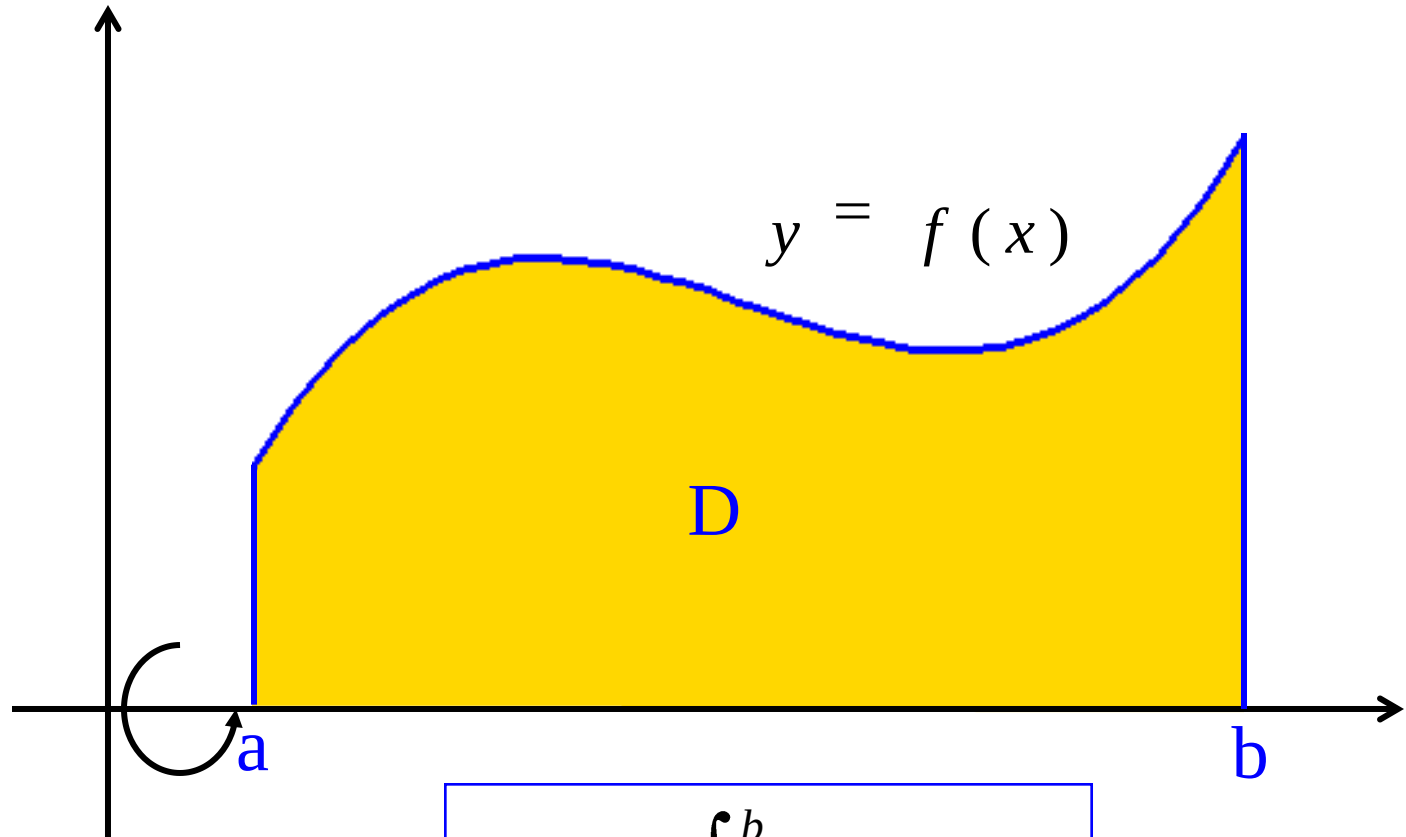
Vật thể tạo ra có dạng tròn xoay.



Quay D xung quanh Ox

Bài toán thể tích

D: $a \leq x \leq b$, y nằm giữa 0 và $f(x)$

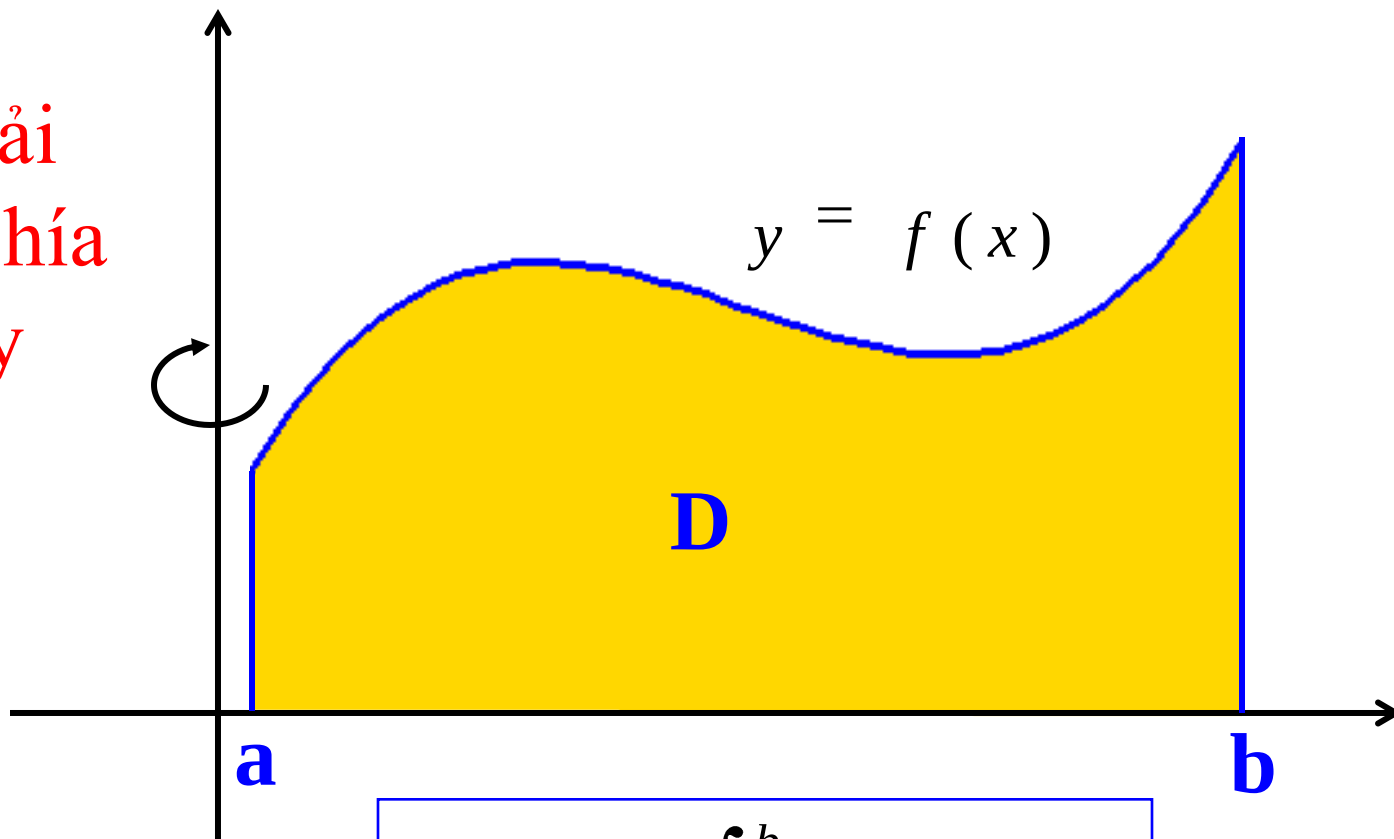


$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

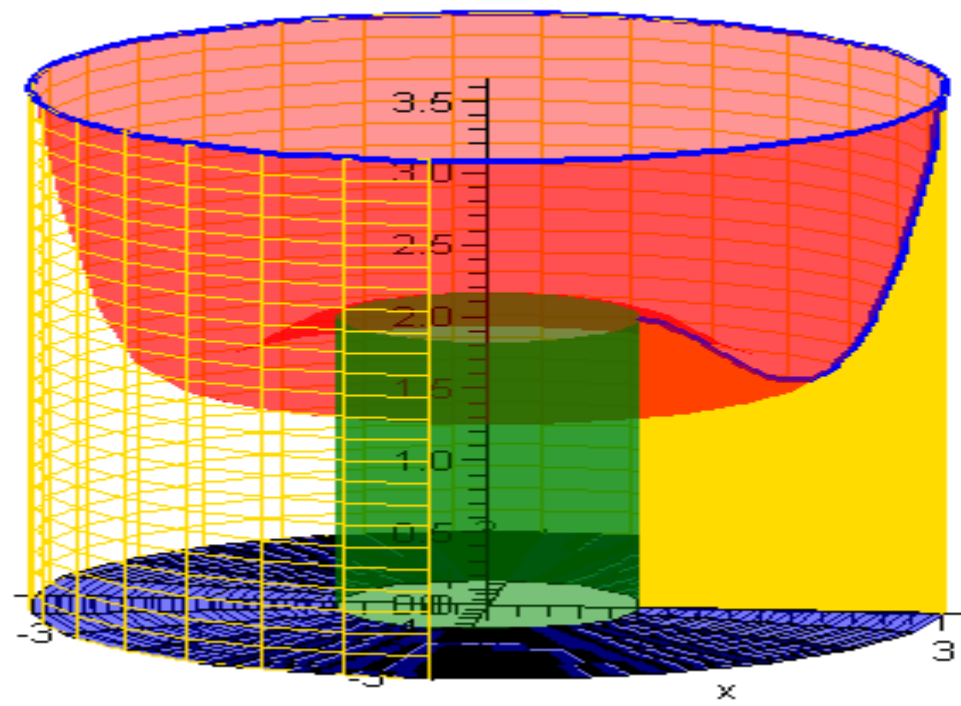
Bài toán thể tích

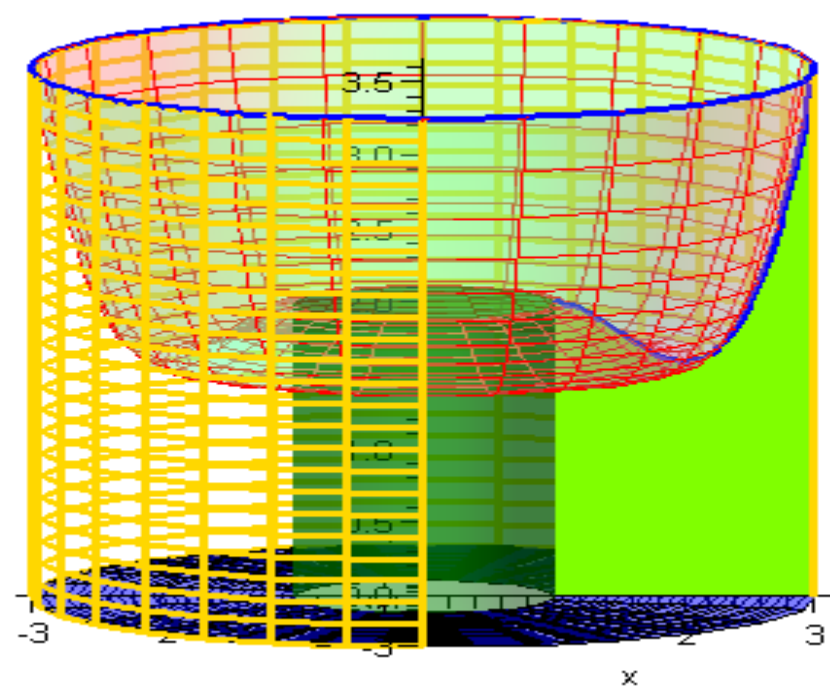
$D: a \leq x \leq b, y$ nằm giữa 0 và $f(x)$

Miền D phải
nằm về 1 phía
của trục Oy



$$V_y = 2\pi \int_a^b |x f(x)| dx$$





Chứng minh

$$V(x) = V(a, x)$$

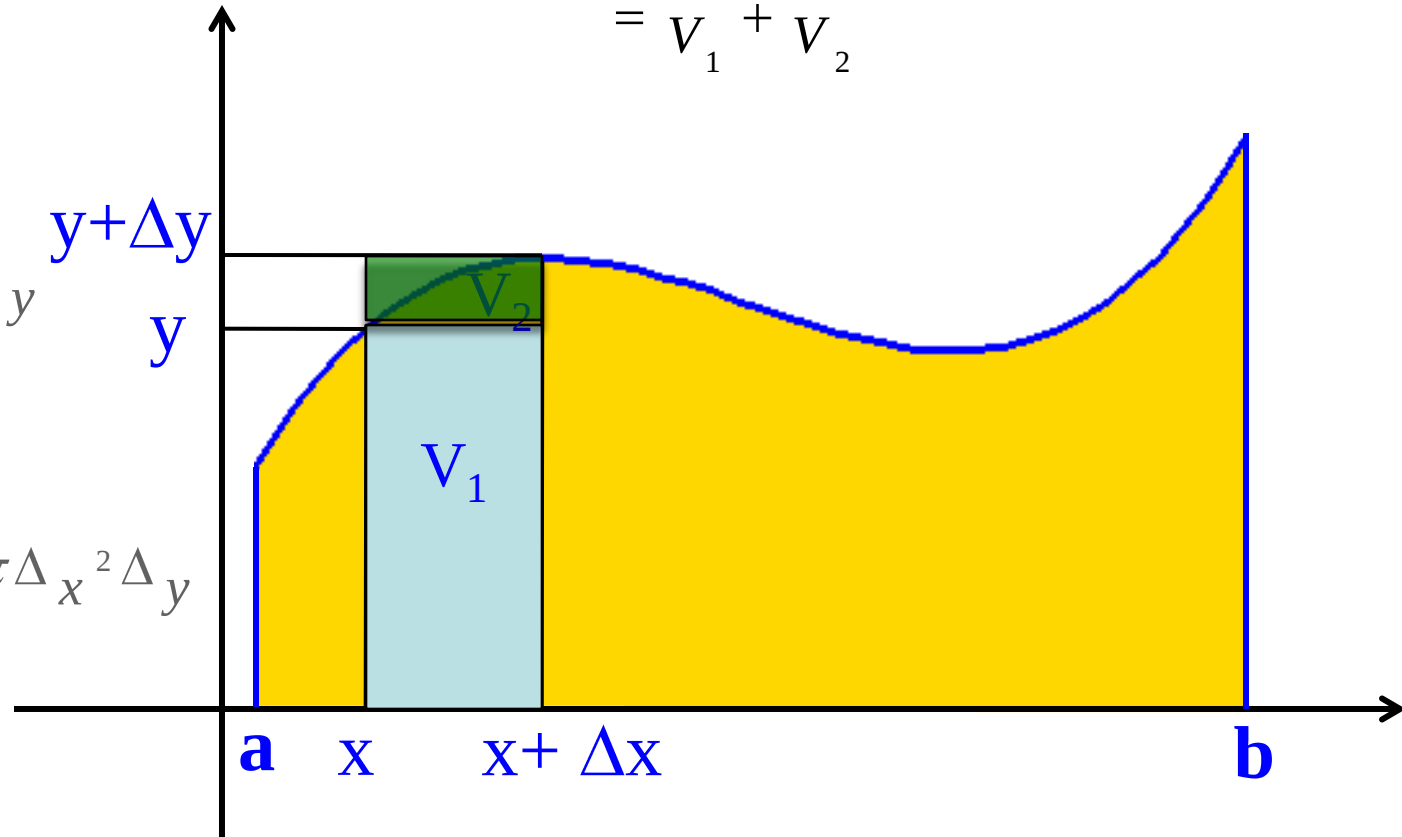
$$\Delta V = V(a, x + \Delta x) - V(a, x)$$

$$= V_1 + V_2$$

$$V_2 \leq V_{CN}$$

$$= \pi (x + \Delta x)^2 \Delta y - \pi x^2 \Delta y$$

$$= 2\pi x \Delta x \Delta y + \pi \Delta x^2 \Delta y$$



$$V_1 = \pi (x + \Delta x)^2 y - \pi x^2 y = 2\pi xy \Delta x + \pi y \Delta x^2$$

Chứng minh

$$\Delta V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = 2\pi xy\Delta x + \pi y\Delta x^2 = 2\pi xy\Delta x + o(\Delta x)$$

$$V_2 \leq V_{CN} = 2\pi x\Delta x\Delta y + \pi\Delta x^2\Delta y = o(\Delta x) \Rightarrow V_2 = o(\Delta x)$$

$$\Delta V = 2\pi xy\Delta x + o(\Delta x)$$

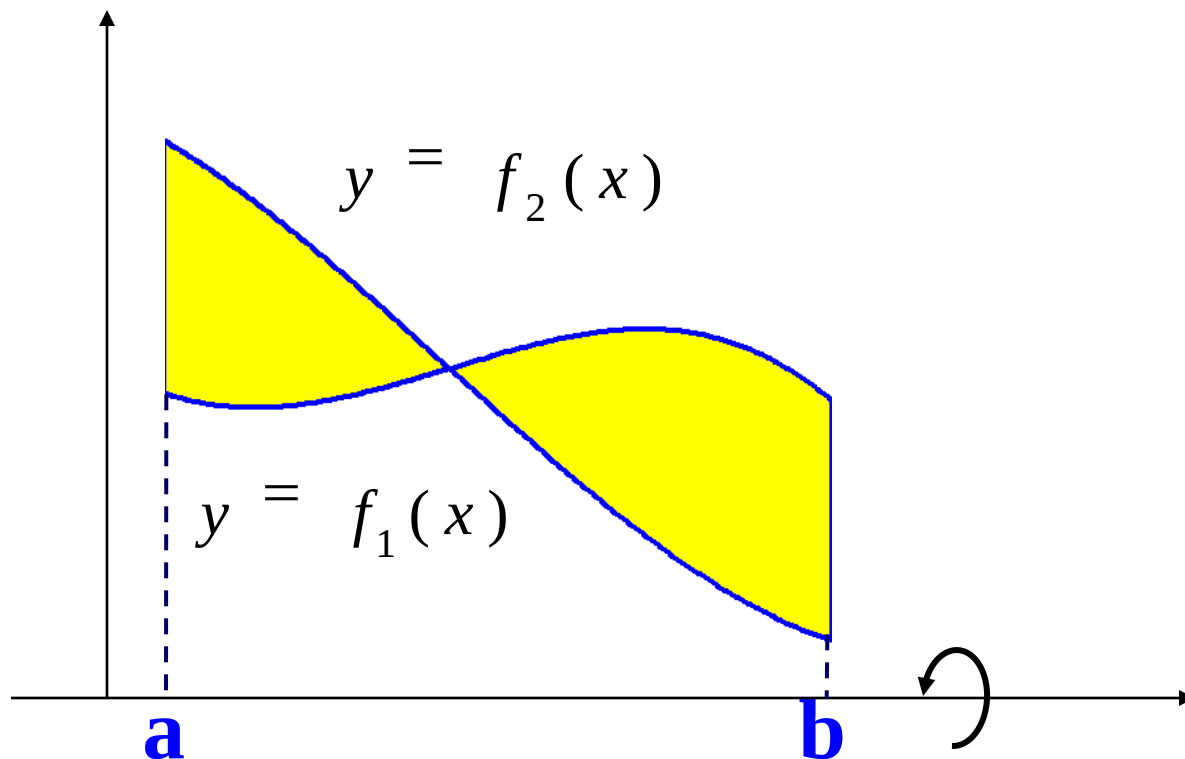
$$dV = 2\pi xy dx$$

$$\Rightarrow V = \int_a^b 2\pi xy dx$$

Bài toán thể tích

D: $a \leq x \leq b$, y nằm giữa $f_1(x)$ và $f_2(x)$

Miền D phải
nằm về 1 phía
của trục Ox

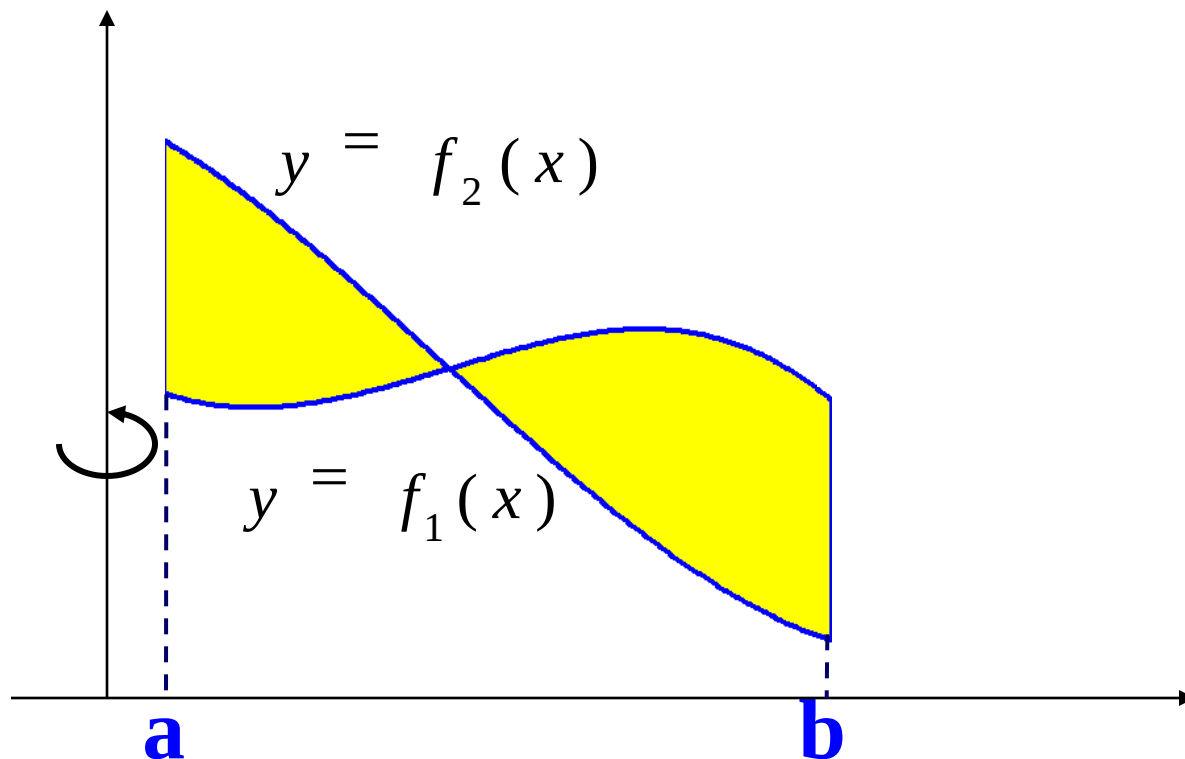


$$V_x = \pi \int_a^b \left| f_2^2(x) - f_1^2(x) \right| dx$$

Bài toán thể tích

D: $a \leq x \leq b$, y nằm giữa $f_1(x)$ và $f_2(x)$

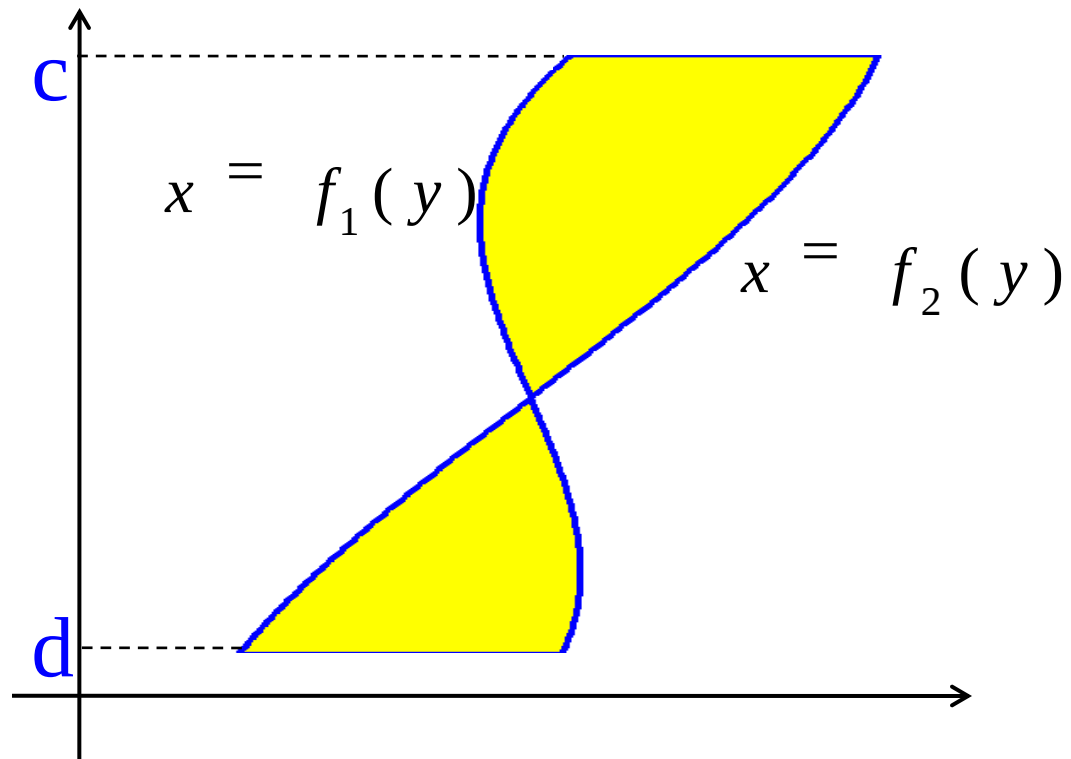
Miền D phải
nằm về 1 phía
của trục Oy



$$V_y = 2\pi \int_a^b |x| |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

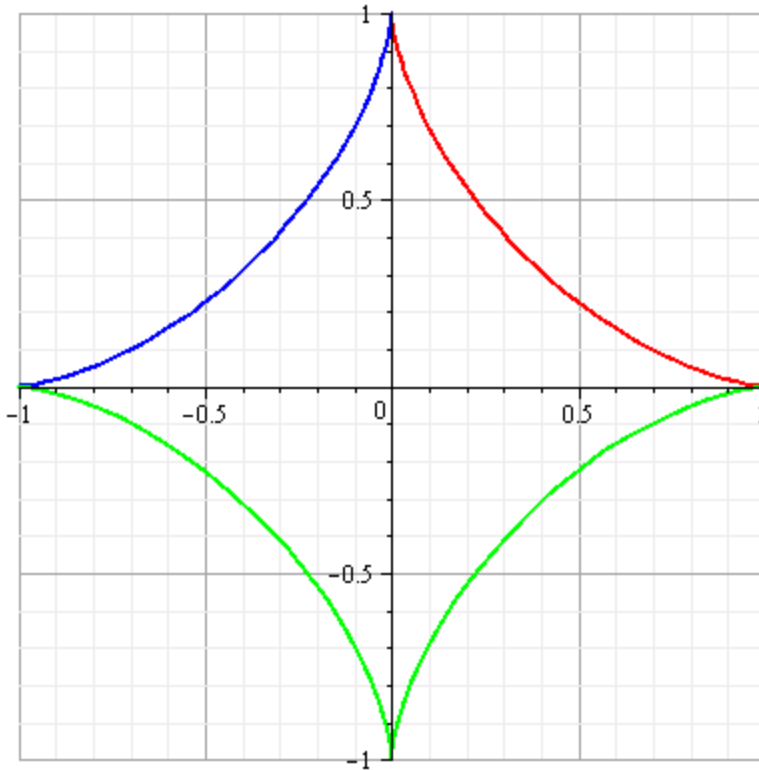
Bài toán thể tích

D: $c \leq y \leq d$, x nằm giữa $f_1(y)$ và $f_2(y)$



Lưu ý về tính đối xứng

Nếu miền D đối xứng qua Ox , D_1 là phần phía trên Ox của D .



$$\begin{cases} V_x(D) = V_x(D_1) \\ V_y(D) = 2V_y(D_1) \end{cases}$$

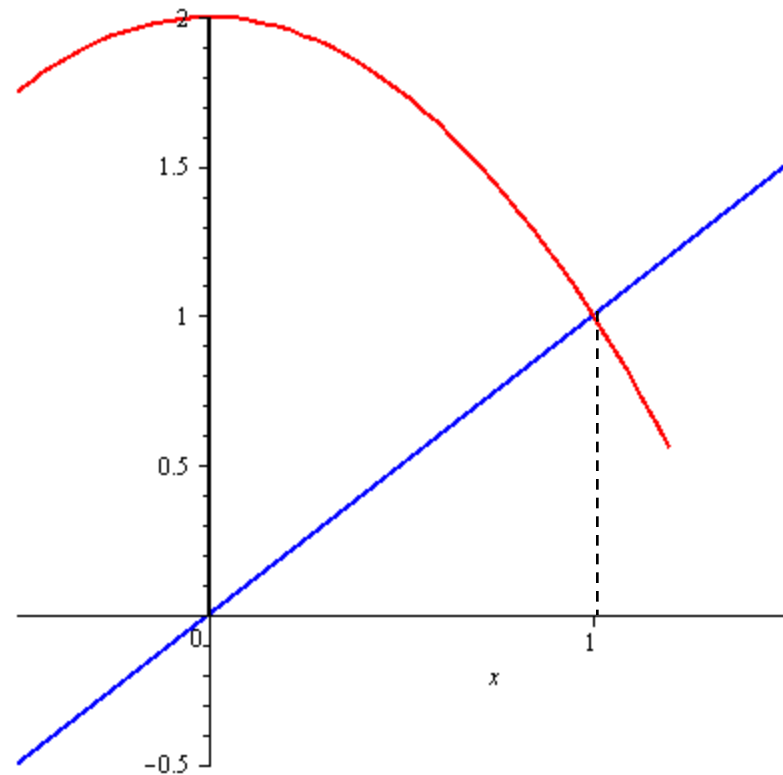
Ví dụ

$D : x \geq 0, y \leq 2 - x^2, y \geq x.$

Tính thể tích khi D quay quanh Ox, oy .

$$V_x = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - x^2 \right] dx$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \left[(2 - x^2) - x \right] dx$$



Ví dụ

Tính thể tích khi D quay quanh Ox

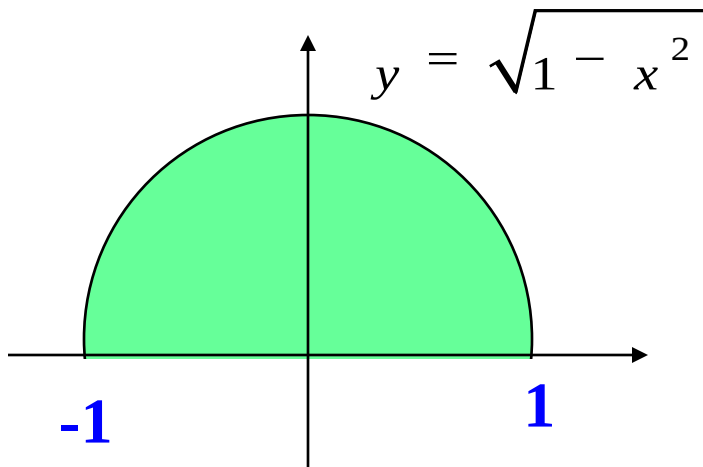
$$D : y = \sqrt{x}e^{-x}, y = 0, x = 2$$

$$V_x = \pi \int_0^2 \sqrt{x}e^{-x}^2 dx$$

Ví dụ

Tính thể tích khi D quay quanh Ox , Oy

$$D : y = \sqrt{1 - x^2}, y = 0, -1 \leq x \leq 1$$



$$V_x = \pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}^2 dx$$

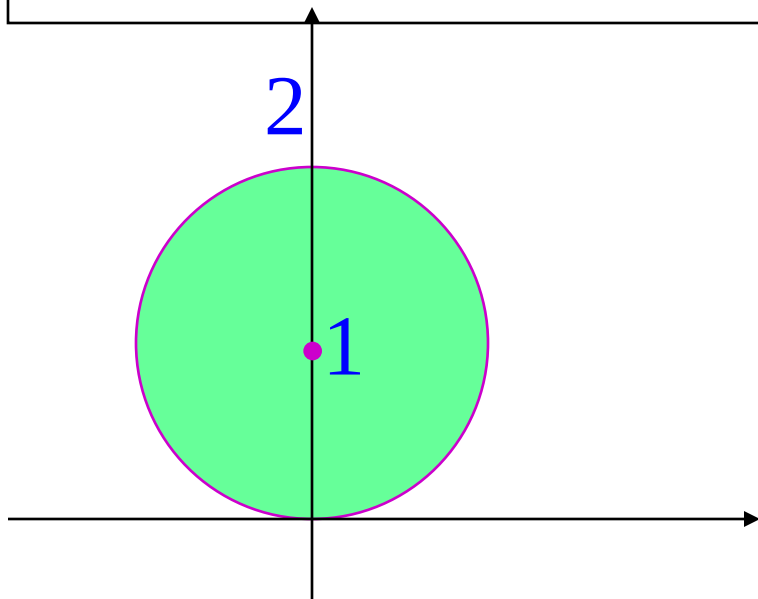
$$= 2\pi \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx$$

Ví dụ

Tính thể tích khi D quay quanh Ox, Oy

$$D : x^2 + y^2 \leq 2y$$



Pt đường tròn giới hạn C :

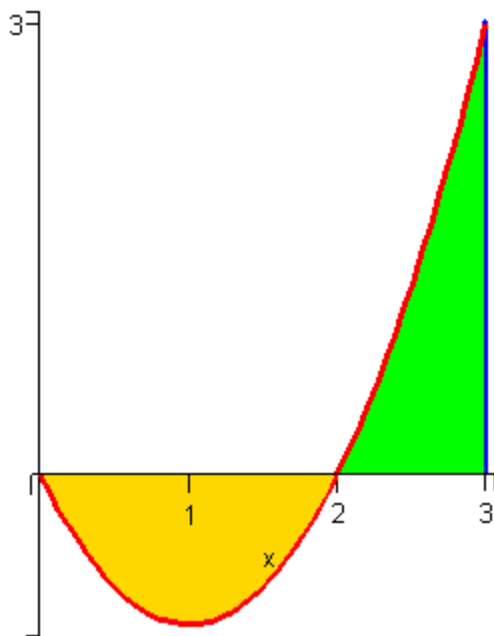
$$x = \pm \sqrt{2y - y^2}$$

hay

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$$

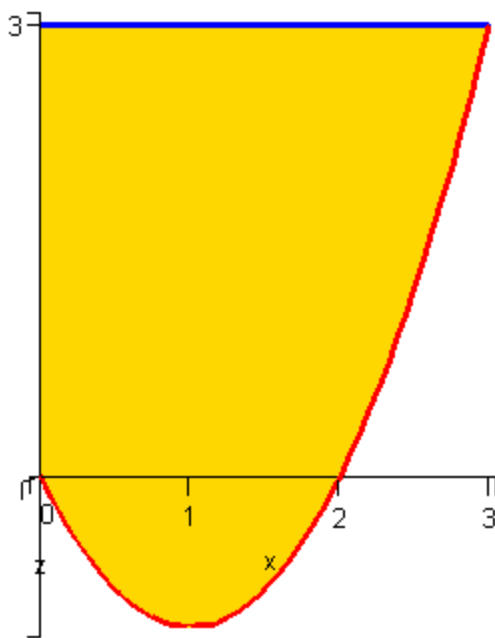
Tính thể tích khi D quay quanh Ox, Oy

$$D : y = x^2 - 2x, y = 0, 0 \leq x \leq 3$$



Tính thể tích khi D quay quanh Ox, Oy

$$D : y = x^2 - 2x, y = 3, 0 \leq x \leq 3$$



Bài toán diện tích, thể tích với đường cong tham số

D giới hạn bởi trục hoành, 2 đường thẳng $x=a$,
 $x=b$ và đường cong tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$,

Nếu $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$

$$S(D) = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| x'(t) dt$$

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt, \quad V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x(t) \cdot y(t)| x'(t) dt$$

Ví dụ

Tính diện tích miền D giới hạn bởi:

$$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi \quad \text{và trục hoành}$$

$$t \in [0, \pi] \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

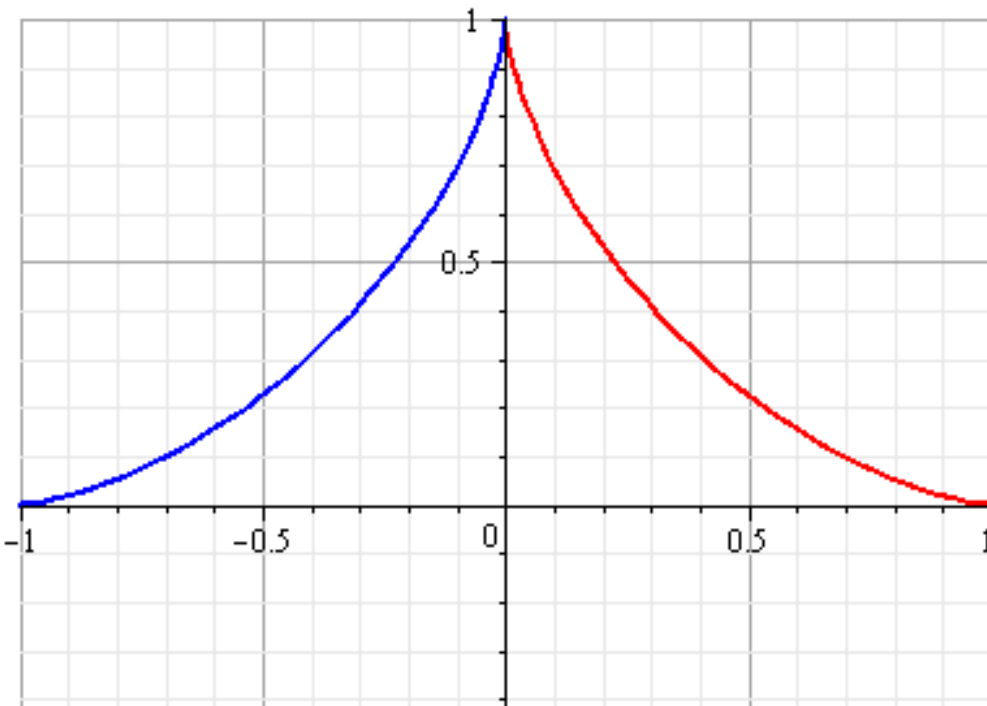
$$\begin{aligned} S(D) &= \int_{-1}^1 y dx = \int_{\pi}^0 \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt \\ &= 6 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Ví dụ

D: $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \pi$ và trục hoành

Tính thể tích tạo ra khi D quay quanh Ox, Oy

Nhận xét: D đối xứng qua Oy (thay x bởi $\pi - x$)



$$t \in [0, \pi / 2] \Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$V_x = 2 \cdot \left(\pi \int_0^1 y^2 dx \right)$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2(t) x'(t) dt$$

$$V_x = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) dt$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt$$

$$V_y = 2\pi \int_0^1 |x \cdot y| dx$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 t \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) dt$$

Độ dài đường cong phẳng

Diện tích mặt tròn xoay

Cho đường cong C: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

Độ dài đường cong C:
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Khi C quay quanh Ox tạo thành diện tích :

$$S_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Ví dụ

Cho đường cong C: $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x - 12), 0 \leq x \leq 12$

Tính độ dài đường cong và diện tích mặt
tạo ra khi C quay quanh Ox

$$y' = \frac{1}{6} \left[\frac{x - 12}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right] = \frac{1}{6} \frac{3x - 12}{2\sqrt{x}} = \frac{x - 4}{4\sqrt{x}}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x - 4)^2}{16x}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x-4)^2}{16x} = \frac{x^2 + 8x + 16}{16x} = \frac{(x+4)^2}{16x}$$

$$L = \int_0^{12} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{12} \frac{x+4}{4\sqrt{x}} dx$$

$$S_x = 2\pi \int_0^{12} |y| \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{12} \frac{\sqrt{x}}{6} \left| x-12 \right| \frac{x+4}{4\sqrt{x}} dx$$

Ví dụ

Cho đường cong C: $y = \ln x, 1 \leq x \leq 2$

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi
C quay quanh Oy.

$$y = \ln x, 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x = e^y, 0 \leq y \leq \ln 2$$

$$S_y = 2\pi \int_0^1 |f(y)| \sqrt{1 + f'(y)^2} dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1 + e^{2y}} dy$$

$$S_y = 2\pi \int_0^{\ln 2} e^y \sqrt{1 + e^{2y}} dy$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) - \ln(1 + \sqrt{2})$$

Bài toán độ dài cung và diện tích mặt tròn xoay với đường cong tham số

Cho đường cong C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$