

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

ĐỊNH NGHĨA

$$\text{Hệ tổng quát} \left\{ \begin{array}{l} F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') = 0 \\ \dots \\ F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Hệ chính tắc} \left\{ \begin{array}{l} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

t : biến

x_1, x_2, \dots, x_n : ẩn hàm

BÀI TOÁN CAUCHY

Tìm nghiệm hệ

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Thỏa điều kiện

$$\begin{cases} x_1(t_0) = \alpha_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

Hệ n ptvp cấp 1 tương đương 1 ptvp cấp n nên hệ nghiệm có n hằng số tự do.

PHƯƠNG PHÁP KHỬ

B_1 : xây dựng một ptvp cấp n theo 1 hàm chọn trước.

B_2 : giải ptvp cấp n vừa tìm được và rút về hệ với $(n - 1)$ hàm

Vd:

$$\begin{cases} x' = x'(t) = 2y + e^t & (1) \\ y' = y'(t) = -x + 3y - e^t & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' = -x' + 3y' - e^t \\ x' = 2y + e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' = -2y - e^t + 3y' - e^t \\ x' = 2y + e^t \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow y''' - 3y'' + 2y' = -2e^t$$

Tt cấp 2 hệ số hằng

$$\Leftrightarrow y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2te^t$$

$$(2) \Rightarrow x = -y'' + 3y' - e^t$$

$$= -C_1 e^t - 2C_2 e^{2t}$$

$$-2(t+1)e^t + 3(C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2te^t) - e^t$$

$$= 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} + (4t - 3)e^t$$

$$\begin{cases} x = 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} + (4t - 3)e^t \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2te^t \end{cases}$$

Cách khử cho hệ 2 pt (tuyến tính)

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + f_1(t) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = a_2 x + b_2 y + f_2(t) & (2) \end{cases}$$

1. Lấy đạo hàm pt (1) theo t được (3)
2. Thay y' từ pt (2) vào (3) được (4)
3. Rút y từ (1) thay vào (4)
4. Pt kết quả là pt cấp 2 theo ẩn hàm x và biến t

Nếu xuất phát từ pt (2), ta có pt cấp 2 theo y

Ví dụ:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x + y + e^t & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2x + 4y + t & (2) \end{cases}$$

Đạo hàm pt (1) theo t

$$x'' = 3x' + y' + e^t \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x'' = 3x' + 2x + 4y + t + e^t$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} x'' = 3x' + 2x + 4(x' - 3x - e^t) + t + e^t$$

$$\Rightarrow x'' - 7x' + 10x = -3e^t + t$$

$$x'' - 7x' + 10x = -3e^t + t$$

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t} - \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{10} t + \frac{7}{100}$$

$$y = x' - 3x - e^t$$

$$= 5C_1 e^{5t} + 2C_2 e^{2t} - \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{10}$$

$$- 3 \left(C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t} - \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{10} t + \frac{7}{100} \right) - e^t$$

$$= 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t - \frac{3}{10} t - \frac{11}{100}$$

HỆ PTVP TUYẾN TÍNH CẤP 1 HỆ SỐ HẰNG

$$X'(t) = AX(t) + F(t)$$

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

(Hệ ẩn hàm)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : \text{ma trận vuông cấp } n$$

Ví dụ

$$1 / \begin{cases} x' = x'(t) = 2y + e^t \\ y' = y'(t) = -x + 3y - e^t \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$2 / \begin{cases} x' = x + y + 2z + t + \sin t \\ y' = 2x + 4y + z + t^2 \\ z' = 3y - 2z + e^t - \ln t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t + \sin t \\ t^2 \\ e^t - \ln t \end{pmatrix},$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

PP TRỊ RIÊNG GIẢI HỆ THUẦN NHẤT

$$X' = AX$$

A chéo hóa được

($\Leftrightarrow \exists P: P^{-1}AP = D$ (chéo))

$$\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$$

Đặt $Y = P^{-1}X$:

$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow Y' = DY$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \dots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ y_n(t) = C_k e^{\lambda_n t} \end{cases}$$



$$\boxed{X = PY}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$



$$P_1$$

$$P_2$$

$$P_n$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11} C_1 e^{\lambda_1 t} & P_{12} C_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & P_{1n} C_n e^{\lambda_n t} \\ P_{21} C_1 e^{\lambda_1 t} & P_{22} C_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & P_{2n} C_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} C_1 e^{\lambda_1 t} & P_{n2} C_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & P_{nn} C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$X = C_1 P_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 P_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n P_n e^{\lambda_n t}$$

CẤU TRÚC NGHIỆM TỔNG QUÁT HỆ $X' = AX$

Định lý: Hệ $X' = AX(t)$, ma trận A có n giá trị riêng thực $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ (kể cả trị riêng bội), và n vector riêng P_1, P_2, \dots, P_n độc lập tuyến tính

\Rightarrow Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} P_k$$

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Trị riêng và VTR của A:

$$\lambda_1 = 1, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Nghiệm tổng quát:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} X$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (6 - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$(A - \lambda_1 I)P = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

Chọn vector riêng: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda_2 I)P = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 0$$

Chọn VTR: $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$

$$X_1 = e^{\lambda_1 t} P_1, X_2 = e^{\lambda_1 t} P_2,$$

$$X_3 = e^{\lambda_2 t} P_3 = e^{6t} P_2$$

$$\Rightarrow X = \sum_{k=1}^3 C_k X_k = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{0t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 + C_3 e^{6t} \\ -C_1 + C_3 e^{6t} \\ -C_2 + 2C_3 e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \begin{cases} x_1'(t) = 3x_1 + x_2 + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1 + 4x_2 + t \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 3t \end{pmatrix}$$

Chéo hóa A

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Đặt : $Y = P^{-1}X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}F = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - \frac{t}{3} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

Hệ viết lại theo y_1, y_2

$$Y' = DY + P^{-1}F$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 5y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^t - \frac{t}{3} \\ \frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 + \frac{2}{3}e^t - \frac{t}{3} \\ y_2' = 5y_2 + \frac{1}{3}e^t + \frac{t}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{3}e^t + \frac{t}{6} + \frac{1}{12} + C_1e^{2t} \\ y_2 = -\frac{1}{12}e^t - \frac{t}{15} + \frac{1}{75} + C_2e^{5t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = PY \quad \text{hay} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Cấu trúc nghiệm hệ tt không thuần nhất

$$X = X_0 + X_r$$

X_0 : nghiệm tổng quát hệ pt thuần nhất

$$X'(t) = AX(t) \quad (1)$$

X_r : nghiệm riêng hệ pt không thuần nhất

Cấu trúc nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

$\{ X_k, k = 1, \dots, n \}$: hệ nghiệm độc lập tuyến tính của (1)

PP biến thiên hằng số tìm X_r

$$X_0 \quad t = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} P_k = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

$$X_r \quad t = C_1 \quad t \quad X_1 + C_2 \quad t \quad X_2 + \dots + C_n \quad t \quad X_n$$

C_i tìm từ hệ pt:

$$C'_1(t)X_1 + \dots + C'_n(t)X_n = F(t)$$

Ví dụ

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = 2x_2 + e^t \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 - e^t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Hệ thuần nhất:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

Trị riêng và VTR của A:

$$\lambda_1 = 1, P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Các nghiệm đltd của hệ thuần nhất

$$X_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tìm X_t bằng pp biến thiên hằng số:

Trong X_0 xem C_1 và C_2 là các hàm cố theo t

Tìm C_1 và C_2 từ hệ:

$$C'_1(t)X_1 + \dots + C'_n(t)X_n = F(t)$$

$$\Leftrightarrow C'_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C'_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 2e^t + C'_2 e^{2t} = e^t \\ C'_1 e^t + C'_2 e^{2t} = -e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 = 2 \\ C'_2 = -3e^{-t} \end{cases}$$

Chọn:
$$\begin{cases} C_1(t) = 2t \\ C_2(t) = 3e^{-t} \end{cases}$$

$$X_0 = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} C_1(t) = 2t \\ C_2(t) = 3e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_r = 2te^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-t} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}$$

Nghiệm tổng quát: $X = X_0 + X_r$