Chương 4:

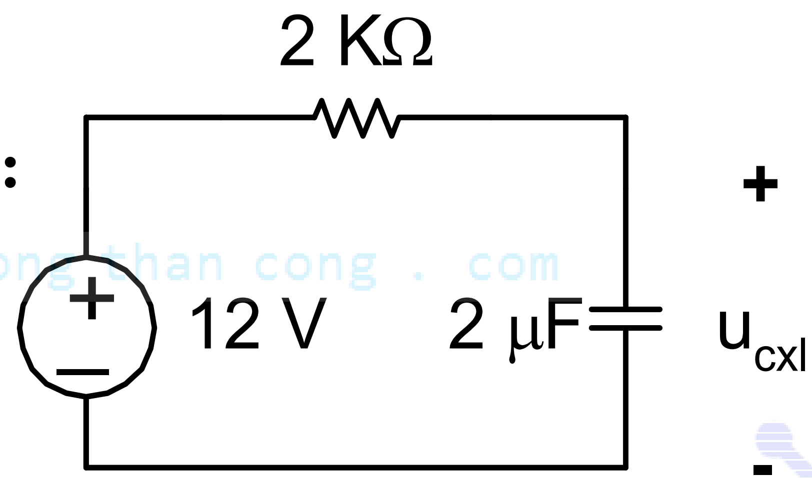
Phân tích mạch trong miền thời gian

❖ **Chế độ xác lập (steady-state) :**

- **Bài toán xác lập DC:**

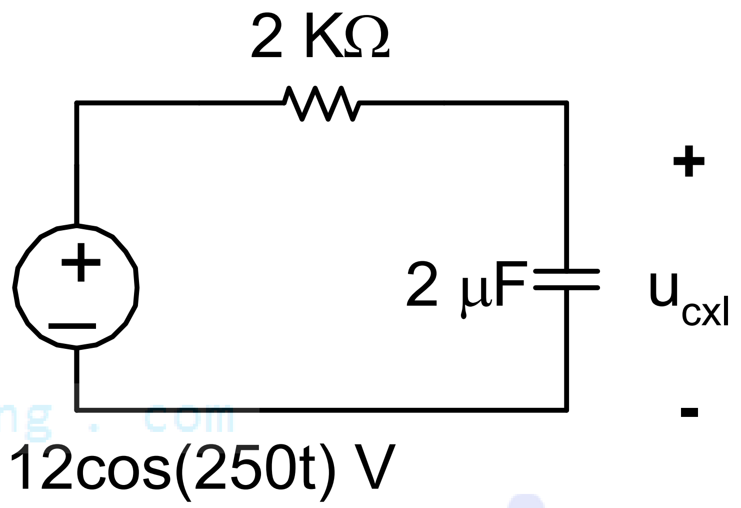
  u_{xl} = ?

  => U_{cxl} = 12 V.



❖ Bài toán xác lập AC :

- Tìm $u_{cxl}(t)$?



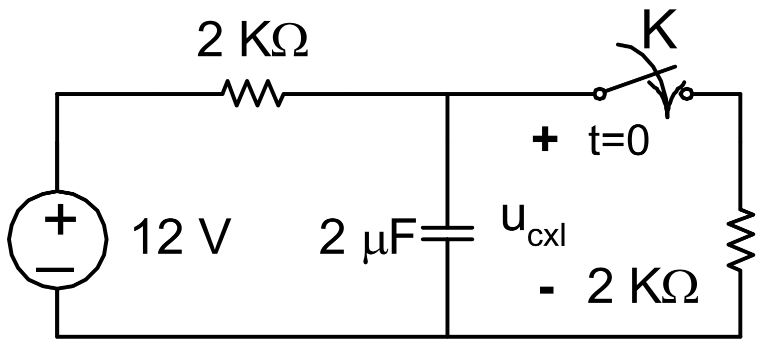
Từ mạch phức : $\dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{10^6}{250.2} = -j2K$

Nên : $$\dot{U}_{Cxl} = 12\frac{-j2K}{2K - j2K} = 6\sqrt{2}\angle -45^o\,(V)$$

Và biểu thức xác lập : $$u_{cxl} = 6\sqrt{2}\cos(250t - 45^o)V$$

❖ Bài toán quá độ :

- Bài toán quá độ :



- Trước khi đóng khóa K: mạch xác lập và ta có :

$$U_{cxl1} = 12\ V$$

- Sau khi đóng khóa và mạch xác lập : $U_{cxl2} = 6\ V$.

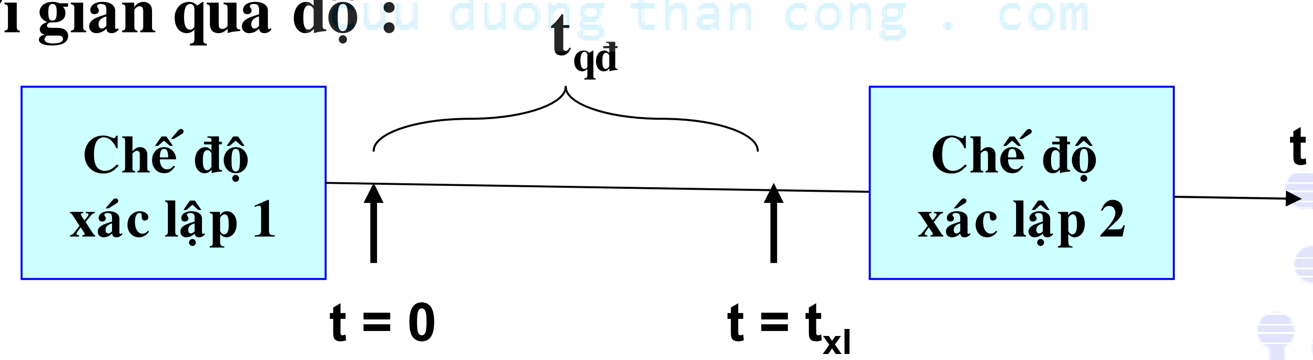
➢ Dạng tín hiệu $u_c(t)$ khi t > 0 (tín hiệu quá độ) : là lời giải của chương 6

❖ Kết luận :

❖ Bài toán quá độ (transient analysis) cho ta kết quả đúng tại mọi thời điểm .

⟹ Bao hàm cả nghiệm xác lập.

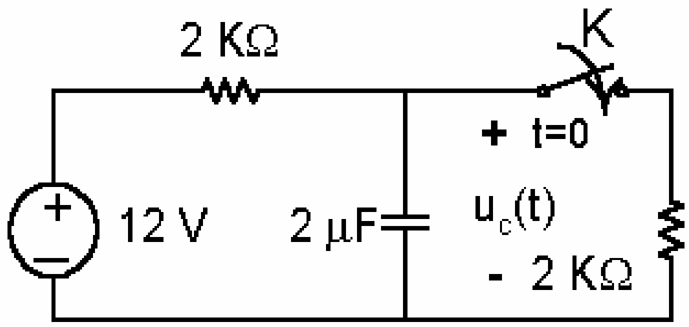
❖ Thời gian quá độ :



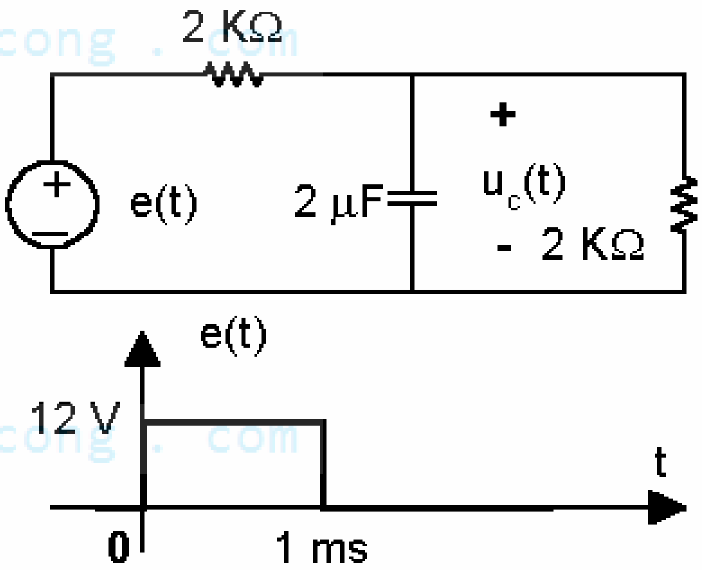
❖ Phân tích quá độ = Phân tích miền thời gian (time-domain analysis).

❖ Các bài toán quá độ thường gặp

- Bài toán quá độ do thông số mạch thay đổi (Bài toán có khóa)



- Bài toán quá độ do tác động lên mạch biến thiên đột ngột (Bài toán xung).



❖ Các phương pháp phân tích quá độ

- ❖ Phương pháp tích phân kinh điển
- ❖ Phương pháp toán tử Laplace
- ❖ Phương pháp biến trạng thái
- ❖ Phương pháp tích phân Duhamel và hàm Green
- ❖ Phương pháp hình ảnh pha
- ❖ Phương pháp số

4.2 Phương pháp tích phân kinh điển

4.2.1 Phương trình mạch và nghiệm phương trình vi phân

4.2.2 Điều kiện đầu (Sơ kiện)

4.2.3 Phương trình đặc trưng của mạch quá độ

4.2.4 Qui trình PP tích phân kinh điển.

4.2.5 Khảo sát quá độ bằng tích phân kinh điển trên một số mạch đơn giản

4.2.6 Một số ví dụ dùng TPKĐ.

4.2.1 Ptrình mạch và nghiệm ptrình vi phân

- Hệ phương trình vi tích phân viết theo các luật Kirchhoff cho mạch (hệ phương trình mô tả mạch) tại một thời điểm bất kỳ.

- Rút gọn hệ phương trình mô tả mạch theo một biến y(t) nào đó , ta có phương trình vi phân tổng quát bậc n như sau :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \qquad (1)$$

- PP tích phân kinh điển : tìm nghiệm quá độ bằng cách giải Ptrình (1) theo kiểu giải ptrình vi phân cổ điển .

Nghiệm theo tích phân kinh điển

- Nghiệm của phương trình (1) theo cách giải phương trình vi phân cổ điển có dạng :

$$y(t) = y_{cb}(t) + y_{td}(t)$$

- Trong đó :

  - $y_{cb}(t)$: nghiệm cưỡng bức . (nghiệm xác lập $y_{xl}(t)$)

  - $y_{td}(t)$: nghiệm phương trình thuần nhất. (nghiệm tự do)

❖ Xác định nghiệm xác lập $y_{xl}(t)$

- Với vế phải của phương trình vi phân (1) có dạng bất kỳ, nghiệm này thường xác định theo phương pháp hệ số bất định .

- Với tác động lên mạch là tín hiệu DC, AC hay xếp chồng của chúng : ta có thể áp dụng các phương pháp giải mạch xác lập đã học trong môn học Mạch điện I.

❖ Xác định nghiệm tự do $y_{td}(t)$

- Về mặt toán học , nghiệm này được xác định từ phương trình đặc trưng của mạch . Phương trình đặc trưng (PTĐT) xác định từ (1) có dạng :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0 \qquad (2)$$

- Các trường hợp nghiệm của phương trình đặc trưng sẽ cho ta biểu thức của nghiệm tự do. Các trường hợp đó là :

❖ Các trường hợp nghiệm PTĐT:

a) Nghiệm thực , phân biệt : $p_1, p_2 \ldots, p_n$

➢ Biểu thức nghiệm tự do sẽ là :

$$y_{td}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

❖ Các trường hợp nghiệm PTĐT

b) Nghiệm bội : p_1 bội r , còn lại là thực, đơn.

- **Biểu thức nghiệm tự do sẽ là :**

$$y_{td}(t) = (K_1 + K_2 t + \ldots + K_r t^{r-1})e^{p_1 t} + \sum_{i=r+1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

❖ Các trường hợp nghiệm PTĐT

c) **Nghiệm phức: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, còn lại là thực, đơn.**

- **Biểu thức nghiệm tự do sẽ có dạng :**

$$y_{td}(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) + \sum_{i=3}^{n} K_i e^{p_i t}$$

Hay:

$$y_{td}(t) = e^{-\alpha t}\left[K_1\cos(\beta t) + K_2\sin(\beta t)\right] + \sum_{i=3}^{n} K_i e^{p_i t}$$

4.2.2 Phương trình đặc trưng mạch

a) Phương pháp rút gọn hệ phương trình mô tả mạch :

1. Viết hệ phương trình vi tích phân
2. Rút gọn theo biến y(t) cần tìm, ta có phương trình vi phân (1)
3. Suy ra phương trình đặc trưng

NX: **Phương pháp tuy phức tạp và đòi hỏi kinh nghiệm rút gọn mạch nhưng tổng quát cho tất cả các dạng mạch.**

b) P.pháp đại số hóa sơ đồ tìm PTĐT:

1. Triệt tiêu nguồn độc lập.

2. Thay thế : L -> pL ; M -> pM ; C -> 1/pC.

3. Do tác động của sơ đồ đại số là 0, nhưng nghiệm tự do phải khác không , nên đòi hỏi:
   - $Z_v(p)$ của một nhánh bằng 0 : đối với dòng điện.
   - $Y_v(p)$ giữa hai nút bằng 0 : đối với điện áp.
   - $Z^{ml}(p)$ hay $Y^n(p)$ bằng 0 : đối với các dòng mắc lưới hay thế nút.

Đây chính là phương trình đặc trưng.

❖ Lưu ý khi dùng phương pháp này:

- Nếu PTĐT có bậc nhỏ hơn bậc quá độ mạch : chỉ dùng cho áp hay dòng đó.

- Nếu PTĐT có bậc bằng bậc quá độ mạch : dùng được cho tất cả các tín hiệu trong mạch .

- Không dùng cho các mạch có khớp nối và không tương hỗ (do không thỏa mãn nguyên lý lập luận của phương pháp này) .

- Không dùng cho các tín hiệu : dòng qua dây dẫn hoặc áp trên cửa.

4.2.3 Điều kiện đầu (Sơ kiện)

- Với phương trình đặc trưng bậc n, các hệ số K_i có thể xác định nếu ta biết được các điều kiện đầu (sơ kiện) :

$$y(0^+)\ ;\ y'(0^+)\ ;\ \ldots\ ;\ y^{(n-1)}(0^+)\ .$$

- **Sơ kiện có hai loại :**

  ❖ Sơ kiện độc lập : $u_c(0^+)$ và $i_L(0^+)$

  ❖ Sơ kiện phụ thuộc : các sơ kiện còn lại (bao gồm tất cả các sơ kiện đạo hàm.

a) Xác định sơ kiện độc lập :

a$_1$) Bài toán chỉnh : dùng luật liên tục của dòng qua cuộn dây và áp trên tụ , còn gọi là luật đóng mở (switching laws) :

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

✓ Các giá trị tại t = 0$^-$ được xác định từ việc giải mạch khi t < 0 :

$$\begin{cases} u_C(0^-) = \lim\limits_{t \to 0}\left(u_C(t) \leftrightarrow khi : t < 0\right) \\ i_L(0^-) = \lim\limits_{t \to 0}\left(i_L(t) \leftrightarrow khi : t < 0\right) \end{cases}$$

a$_2$) Bài toán không chỉnh :

❖ Xuất hiện "vòng điện dung" hay "tập cắt cảm" : dùng luật liên tục của từ thông (loop) và điện tích (node) :

$$\begin{cases} \sum\limits_{loop} L_k i_{Lk}(0^+) = \sum\limits_{loop} L_k i_{Lk}(0^-) \\ \sum\limits_{node} C_k u_{Ck}(0^+) = \sum\limits_{node} C_k u_{Ck}(0^-) \end{cases}$$

❖ Xuất hiện hỗ cảm với k = 1 , dùng 1 trong hai phương trình:

$$\begin{cases} L_1 i_{L1}(0^+) \pm M i_{L2}(0^+) = L_1 i_{L1}(0^-) \pm M i_{L2}(0^-) \\ L_2 i_{L2}(0^+) \pm M i_{L1}(0^+) = L_2 i_{L2}(0^-) \pm M i_{L1}(0^-) \end{cases}$$

b) Xác định sơ kiện phụ thuộc:

- Thông thường xác định từ ba cơ sở :

  i. Sơ kiện độc lập.

  ii. Giá trị tác động tại $t = 0^+$.

  iii. Hệ phương trình mô tả mạch tại $t = 0^+$.

- Có 2 trường phái xác định sơ kiện phụ thuộc :

b$_1$) Quan hệ giữa các sơ kiện phụ thuộc:

1. $i_C(0^+) \leftarrow KCL(node)$

2. $u_L(0^+) \leftarrow KVL(loop)$

3. $i_R(0^+) \leftarrow KCL(node) \cup \dfrac{u_R(0^+)}{R}$

4. $u_R(0^+) \leftarrow KVL(loop) \cup Ri_R(0^+)$

5. $i_{e(t)}(0^+) \leftarrow KCL(node)$

6. $u_{j(t)}(0^+) \leftarrow KVL(loop)$

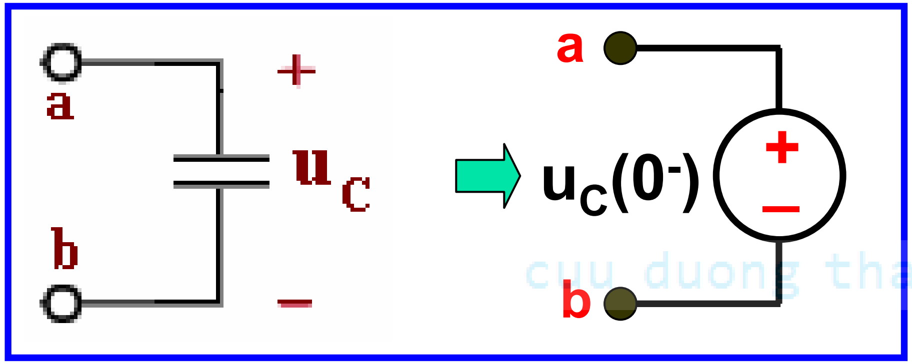
7. $i_L^{'}(0^+) = \dfrac{u_L(0^+)}{L}$

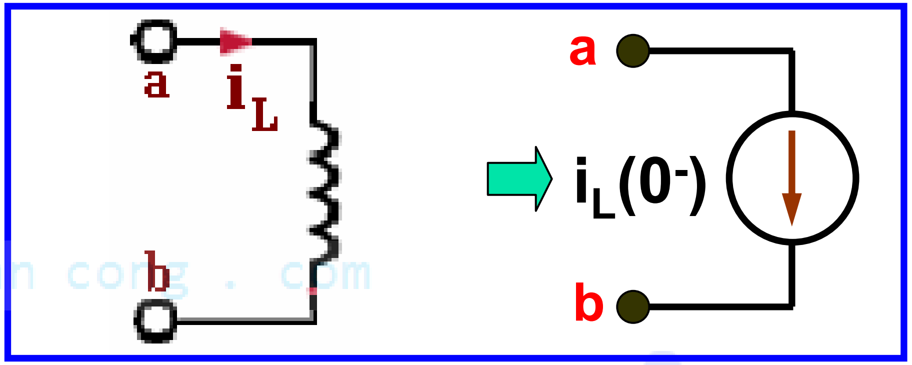
8. $u_C^{'}(0^+) = \dfrac{i_C(0^+)}{C}$

9. **Các sơ kiện đạo hàm còn lại chủ yếu đạo hàm các pt KCL và KVL**

b_2) Dùng sơ đồ tương đương :

❖ Thực hiện thay thế :





❖ Nguồn : e(t) → $e(0^-)$ j(t) → $j(0^-)$

❖ Dùng các ptrình : KCL & KVL suy ra các sơ kiện phụ thuộc.

✓ *Lưu ý:* Các này không tính các sơ kiện đạo hàm .

c) Bài toán xác định sơ kiện:

1. Dựa vào điều kiện làm việc của mạch ở t < 0 (trạng thái năng lượng trước đó), xác định các giá trị $u_C(0^-)$ và $i_L(0^-)$.

$$\begin{cases} u_C(0^-) = \lim\limits_{t\to 0}\left(u_C(t)\big|_{t<0}\right) \\ i_L(0^-) = \lim\limits_{t\to 0}\left(i_L(t)\big|_{t<0}\right) \end{cases}$$

2. Xác định sơ kiện độc lập.

3. Xác định sơ kiện phụ thuộc.

4.2.4 Qui trình PP tích phân kinh điển:

❖ **Giải mạch khi $t < 0$:** Chỉ tìm $u_C(0^-)$ và $i_L(0^-)$

❖ **Giải mạch khi $t > 0$:**

a) Tìm nghiệm xác lập : $y_{xl}(t)$.

b) Tìm nghiệm tự do:

- Tìm PTĐT.
- Giải PTĐT và suy ra $y_{td}(t)$.

$$\boxed{y(t) = y_{xl}(t) + y_{td}(t)}$$

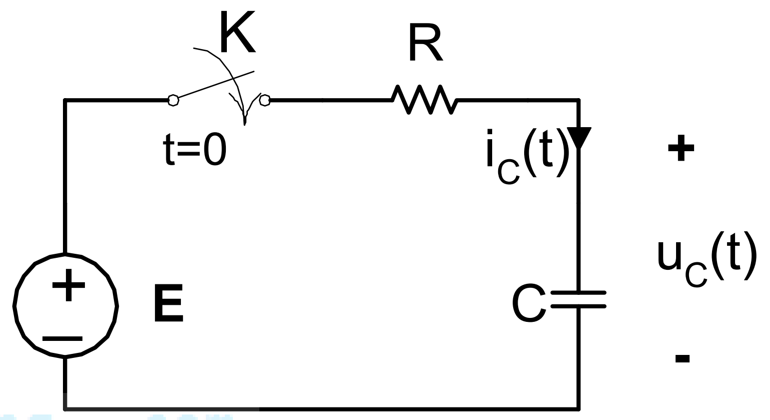
❖ **Sơ kiện :** Tìm đủ số sơ kiện cho bài toán

❖ **Xác định K_i :** Dựa vào y(t) và sơ kiện , giải ra các hệ số K_i.

4.2.5 Khảo sát quá độ bằng tích phân kinh điển trên một số mạch đơn giản :

1. Mạch quá độ cấp I (R-C) :

a) <u>Bài toán:</u> Đóng nguồn áp DC , giá trị E , tại t = 0 , vào tụ điện C thông qua điện trở R. Tìm điện áp trên tụ $u_C(t)$ và dòng qua tụ $i_C(t)$ khi t > 0 ?



<u>Giải</u>

❖ Khi t < 0 : Ta có $u_C(0^-) = 0$.

❖ Khi t > 0 :

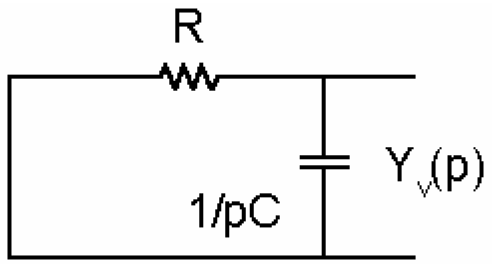
a) Nghiệm xác lập : $u_{Cxl} = E$

Mạch quá độ cấp I – RC (tt)

b) Nghiệm tự do : Đại số hóa sơ đồ , tìm $Y_v(p)$, ta có PTĐT :

$pC + 1/R = 0 \rightarrow \quad p = -1/RC$

$\rightarrow u_{Ctd}(t) = K_1 e^{(-t/RC)}$



<u>Nghiệm:</u> $u_C(t) = E + K_1 e^{(-t/RC)}$

- Sơ kiện : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$
- Tìm K_1 : $u_C(0^+) = E + K_1 = 0 \rightarrow K_1 = -E$

<u>Vậy :</u> $u_C(t) = E - Ee^{(-t/RC)}$

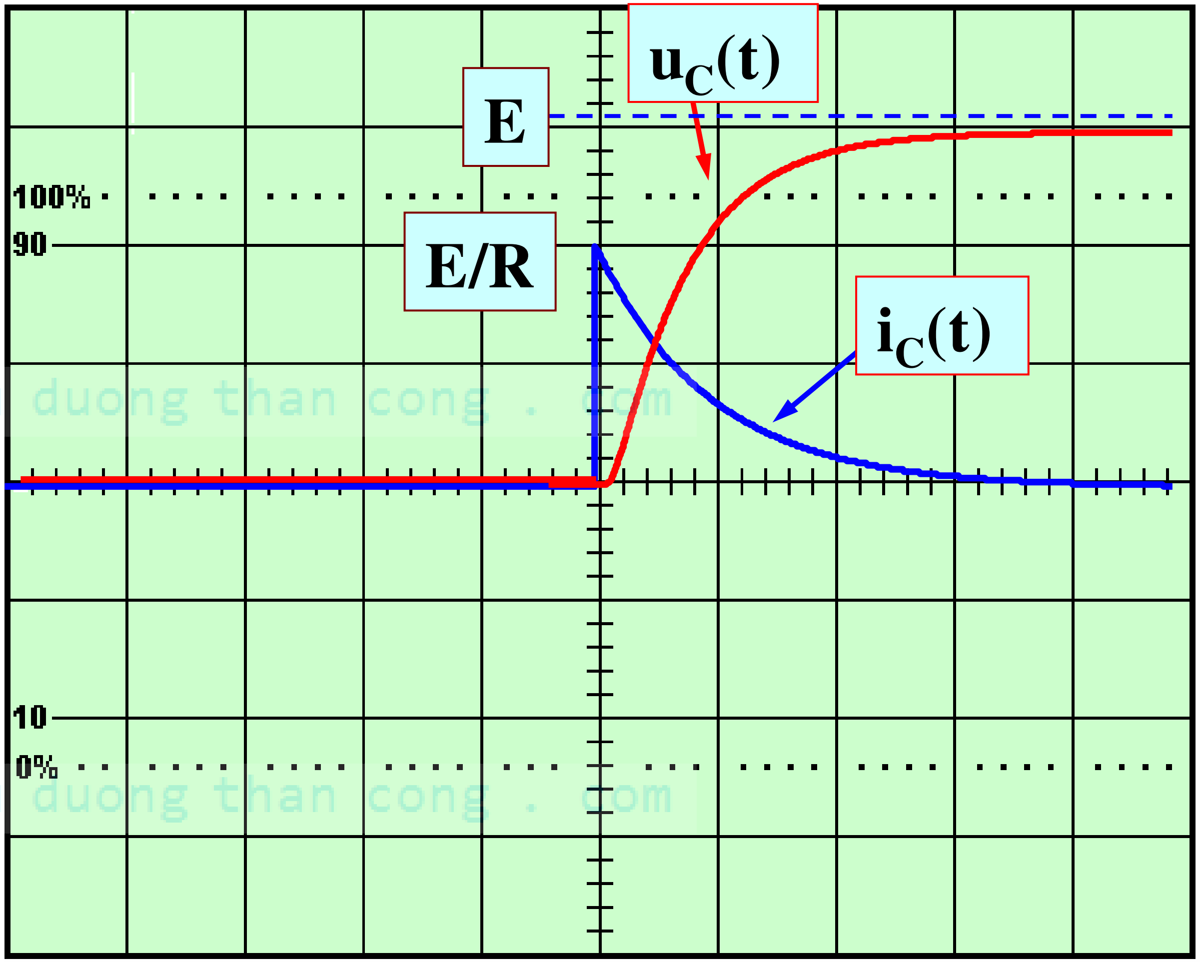
$i_C(t) = C.du_C/dt = (E/R)e^{(-t/RC)}$

b) Dạng tín hiệu quá độ :

$u_C(t) = E - Ee^{(-t/RC)}$

$i_C(t) = (E/R)e^{(-t/RC)}$

❖ Quan sát trên oscilloscope , ta có :



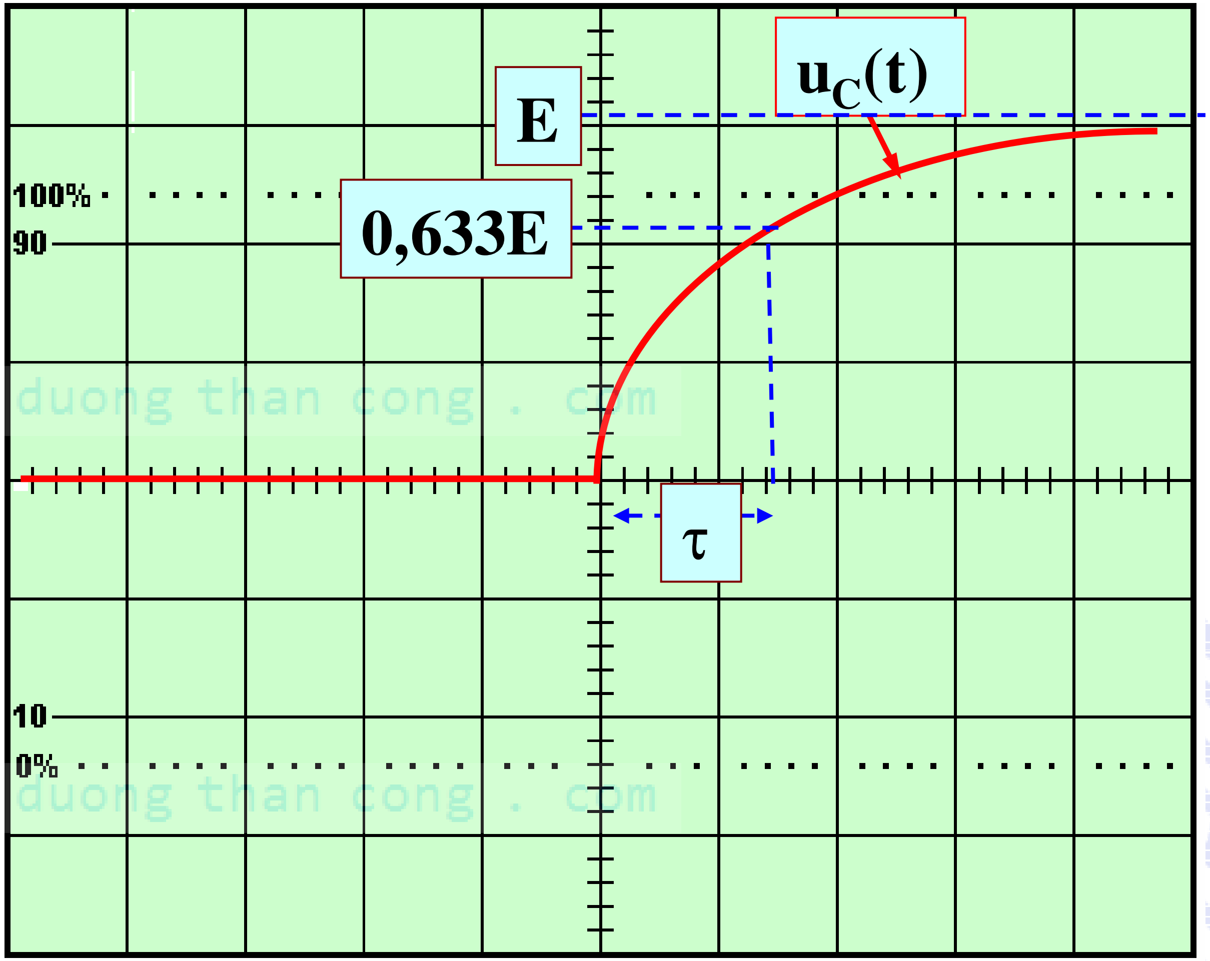
c) Nhận xét trên mạch cấp I - RC

❖ Hằng số thời gian (thời hằng) của mạch RC :

$\tau = RC$

$[s] = [\Omega].[F]$

❖ Dựa trên tín hiệu $u_C(t)$, hằng số thời gian được đo :

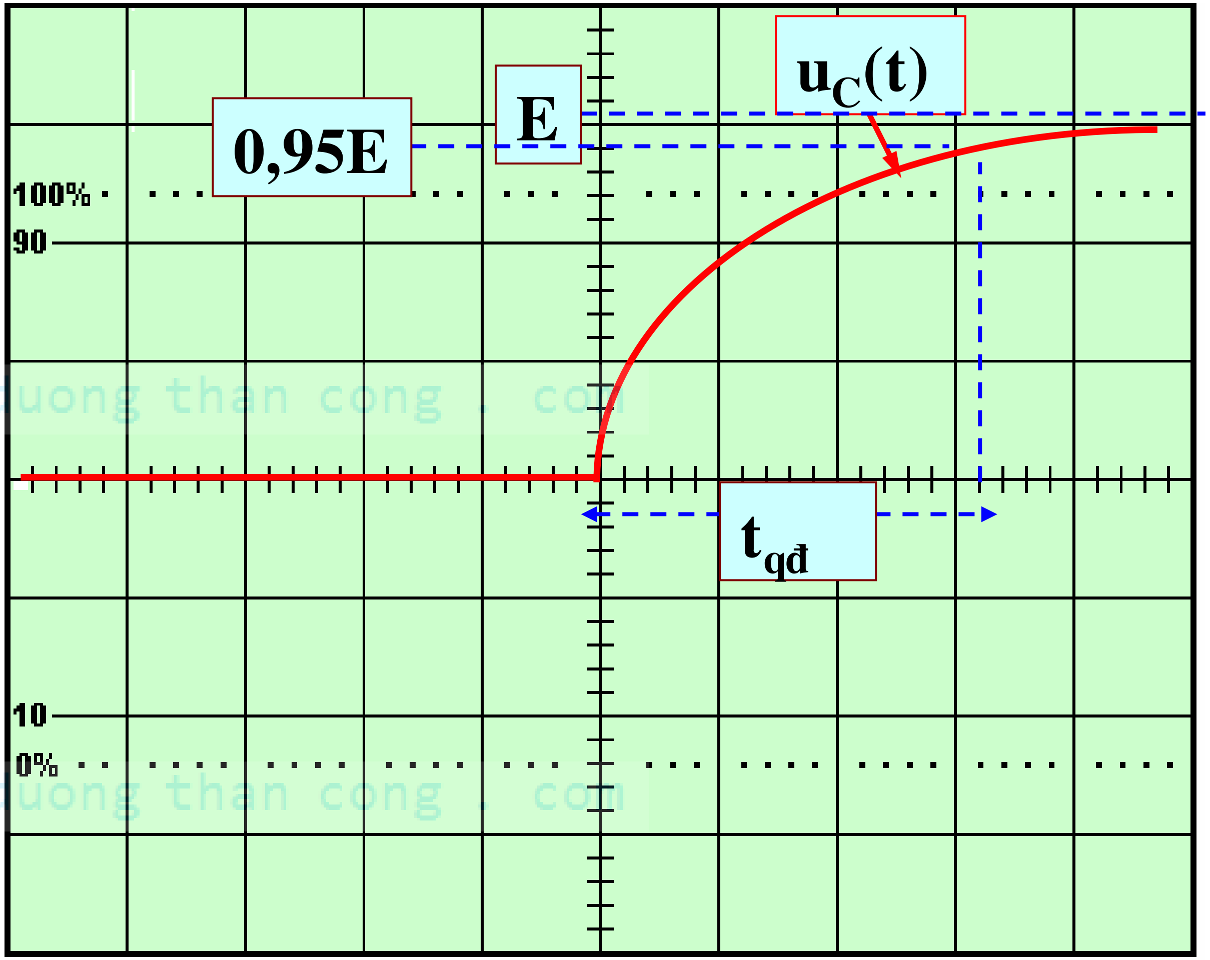


Thời gian quá độ :

❖ Thời gian tồn tại quá trình quá độ.

❖ Một cách qui ước :

$$t_{qđ} = 3\tau$$

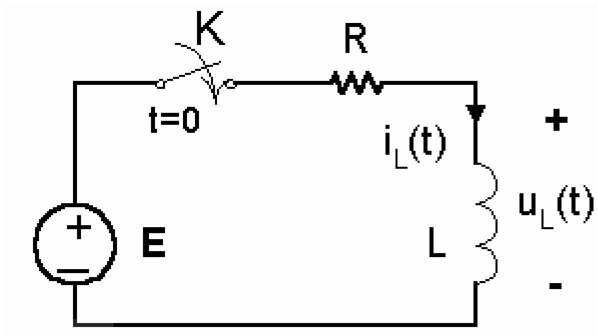


2. Mạch quá độ cấp I - RL

❖ Đóng nguồn áp DC , giá trị E vào mạch RL tại t = 0 , ta có :

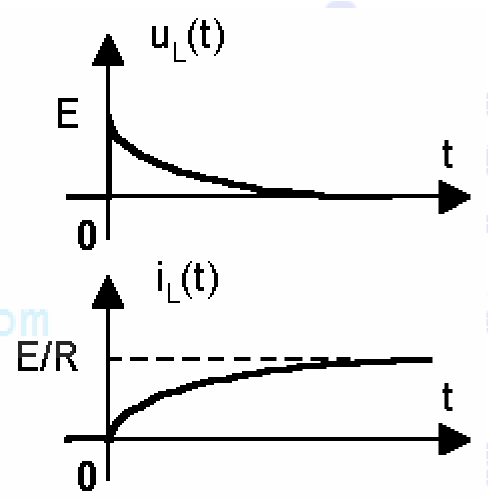
$$u_L(t) = Ee^{(-t/\tau)}$$

$$i_L(t) = E/R(1- e^{(-t/\tau)})$$



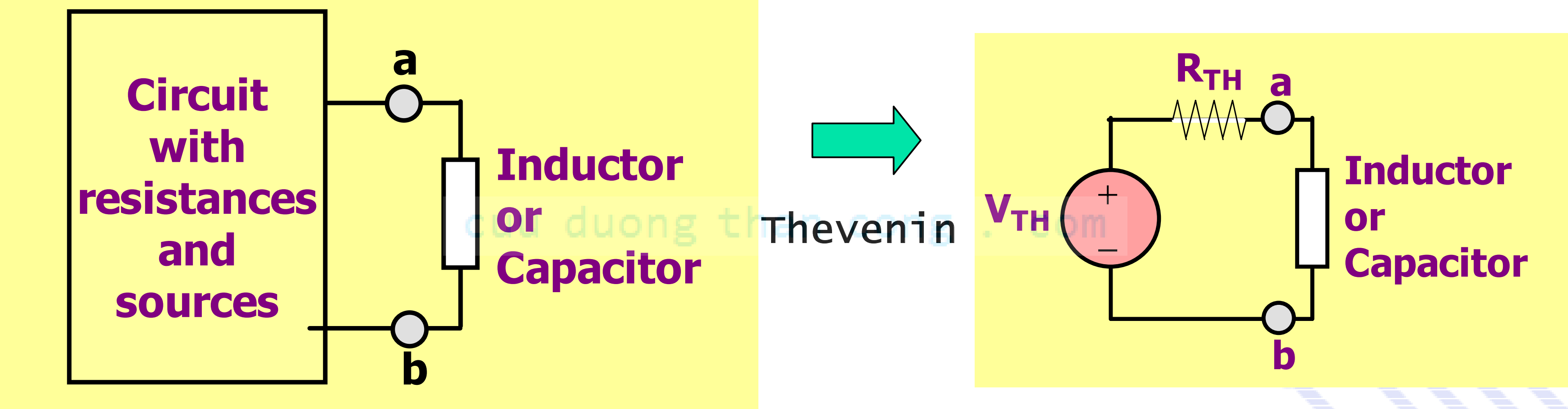
❖ Với $\tau = L/R$ = thời hằng của mạch RL. Và thời gian quá độ cũng là :

$$t_{qđ} = 3\tau$$



3. Mô hình Thévenin & quá độ cấp I:

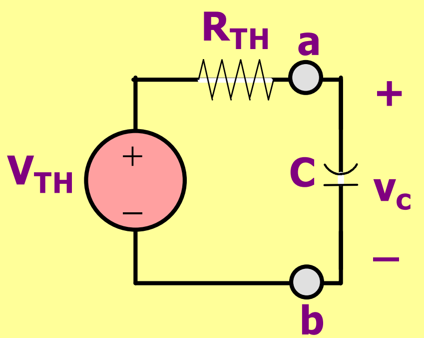
a) Rút gọn sơ đồ :



Representation of an arbitrary circuit with one storage element

b) Lời giải :

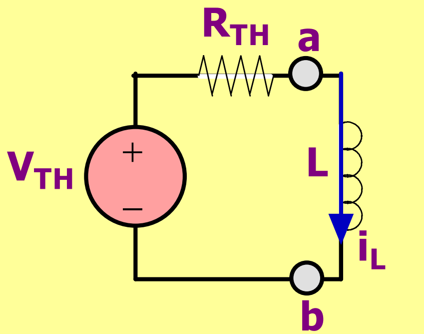
Giới hạn → Obtain the voltage across the capacitor or the current through the inductor



Case 1.1
Voltage across capacitor

$$R_{TH}C\frac{du_C}{dt}+u_C=v_{TH}$$

→ $\begin{cases} u_{c\_forced} \\ u_{c\_transient} \end{cases}$



Case 1.2
Current through inductor

$$L\frac{di_L}{dt}+R_{TH}i_L=v_{TH}$$

→ $\begin{cases} i_{L\_forced} \\ i_{L\_transient} \end{cases}$

c) Qui trình Phương pháp :

❖ **Solve the** DC steady-state **circuit before switching (on/off) : Find values of** $u_c(0^-)$ **and** $i_L(0^-)$ **.**

❖ **Write** a differential equation **for the circuit at time t > 0 :**

a) **Reduce the circuit to its** Thévenin or Norton equivalent **(The energy storage element (capacitor or inductor) is the load) .**

b) **The differential equation will be either in terms of** $u_C(t)$ **or** $i_L(t)$.

c) **Solve for the** *forced response* **:** $y_{forced}(t)$ **.**

d) **Write the** *transient response* **:** $y_{transient}(t) = K.e^{(-t/\tau)}$ **.**

(Capacitive circuits: $\tau = R_{TH}.C$; **Inductive circuits:** $\tau = L/R_{TH}$)

The complete response **in the form:** $y(t) = y_{forced}(t) + K.e^{(-t/\tau)}$ **.**

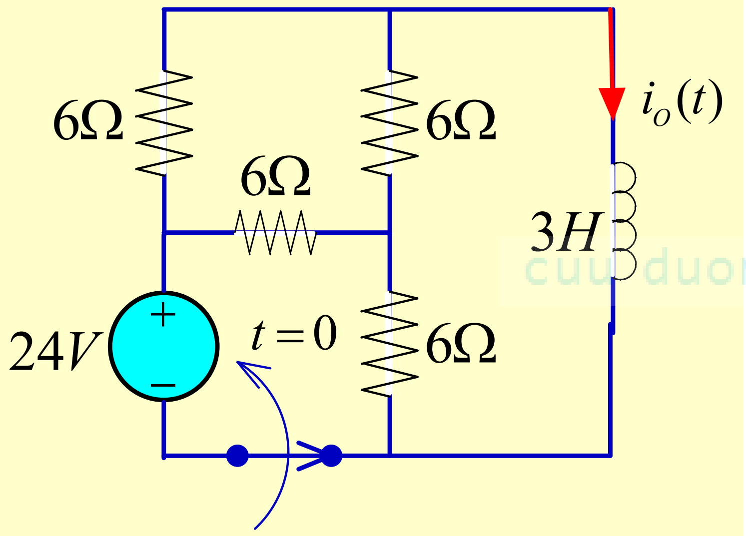
❖ **Identify the circuit** initial conditions $y(0^+)$: **by using on-off laws .**

❖ **Solve for the value of K .**

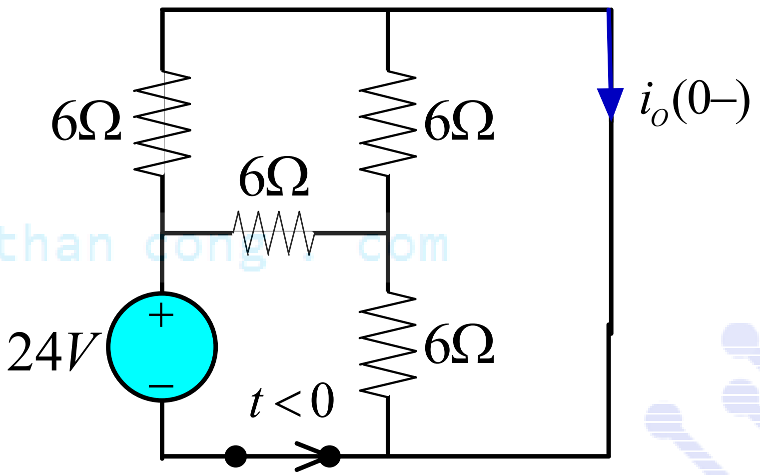
❖ Ví dụ1: Dùng mô hình Thévenin

EXAMPLE

Find $i_o(t); t > 0$



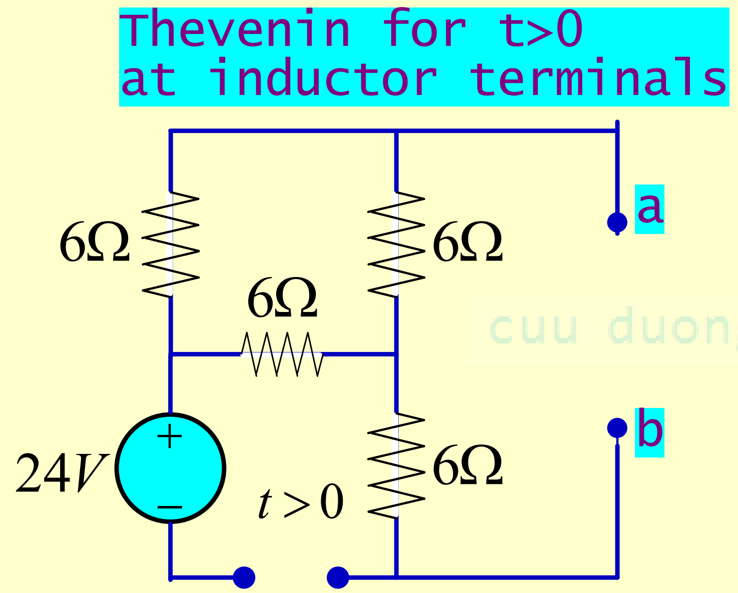
❖ **for t < 0:**



solution: $i_0(0^-) = \dfrac{16}{3}$

❖ Ví dụ1: Dùng mô hình Thévenin (tt)

❖ **For t > 0:**



$$v_{TH} = 0$$

$$R_{TH} = 6 + (6 \| (6+6))$$

$$\Rightarrow \quad i_O(t) = K_1 e^{-\frac{t}{0.3}}\,;\ t > 0$$

❖ **Initial conditions :**

solution: $\quad i_0(0^+) = i_0(0^-) = \dfrac{16}{3}\,\mathrm{A}$

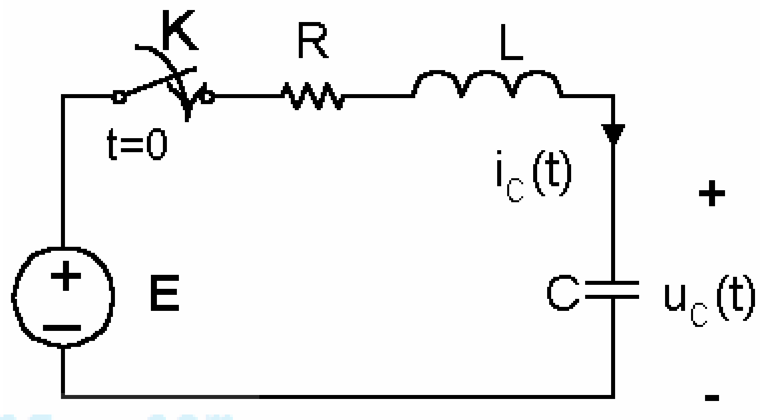
❖ **Evaluating at 0⁺:**

$$K_1 = \frac{16}{3}$$

Ans: $i_O(t) = \dfrac{16}{3} e^{-\frac{t}{0.3}}\,;\ t > 0$

4. Mạch quá độ cấp II – RLC nối tiếp :

- Đóng nguồn áp DC , giá trị E , tại t = 0 , vào mạch RLC nối tiếp , tìm điện áp trên tụ $u_C(t)$ và dòng qua tụ $i_C(t)$ khi t > 0 ?



Giải

❖ Khi t < 0 : Ta có $u_C(0^-) = 0$; $i_L(0^-) = 0$

❖ Khi t > 0 :

a) Nghiệm xác lập : $u_{Cxl} = E$

4. Mạch quá độ cấp II – RLC nối tiếp :

b) Nghiệm tự do : Đại số hóa sơ đồ , ta có PTĐT :

$$p^2 + (R/L)p + 1/LC = 0$$

Giả sử PTĐT có 2 nghiệm : $p_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta'}$

(Trong đó : $\Delta' = (R/2L)^2 - 1/LC$)

$$\Rightarrow \quad u_C(t) = E + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

❖ **Sơ kiện :** $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ $\quad u_C'(0^+) = \dfrac{i_C(0^+)}{C} = \dfrac{i_L(0^+)}{C} = 0$

❖ **Tìm K_1 , K_2 :**

$$u_C(0^+) = E + K_1 + K_2 = 0$$

$$u_C'(0^+) = K_1 p_1 + K_2 p_2 = 0.$$

❖ Dạng tín hiệu ở mạch quá độ cấp II

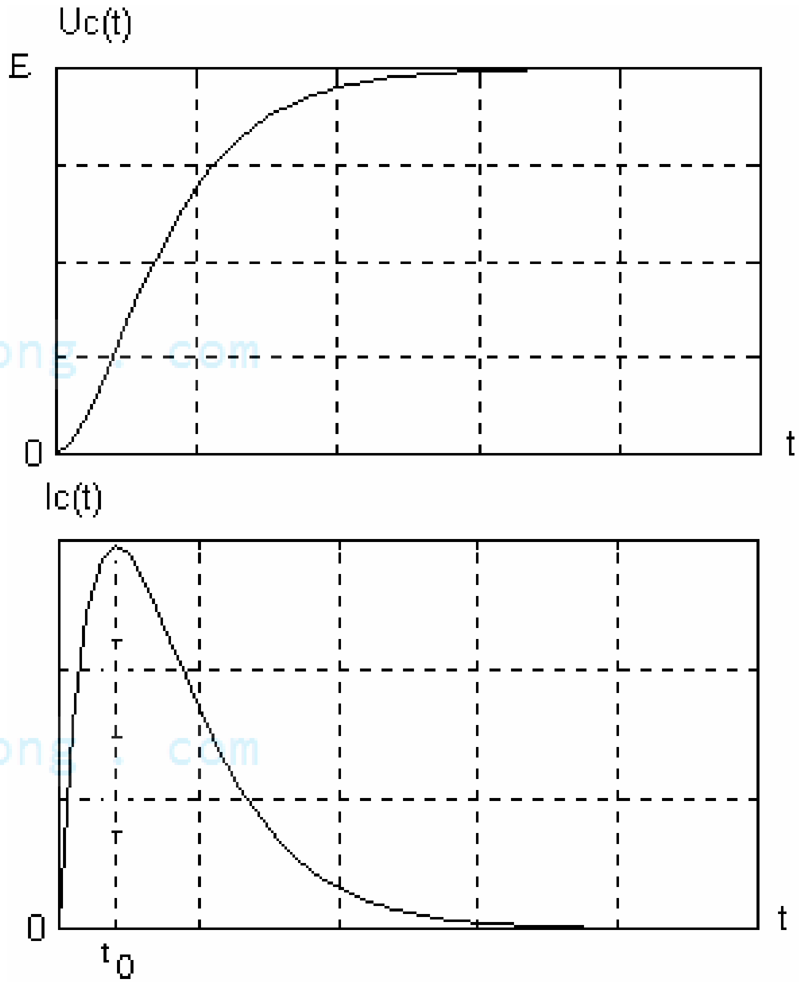
➢ **Ta giải ra :** $K_1 = \dfrac{Ep_2}{2\sqrt{\Delta'}}; K_2 = -\dfrac{Ep_1}{2\sqrt{\Delta'}}$

➢ **Nghiệm bài toán quá độ :**

$$u_C(t) = E + \frac{E}{2\sqrt{\Delta'}}\left[p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right]$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{2L\sqrt{\Delta'}}\left[e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right]$$

$$t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}}\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$



Nhận xét trên mạch cấp II – RLC :

- Điện trở tới hạn R_{th} (Ω):

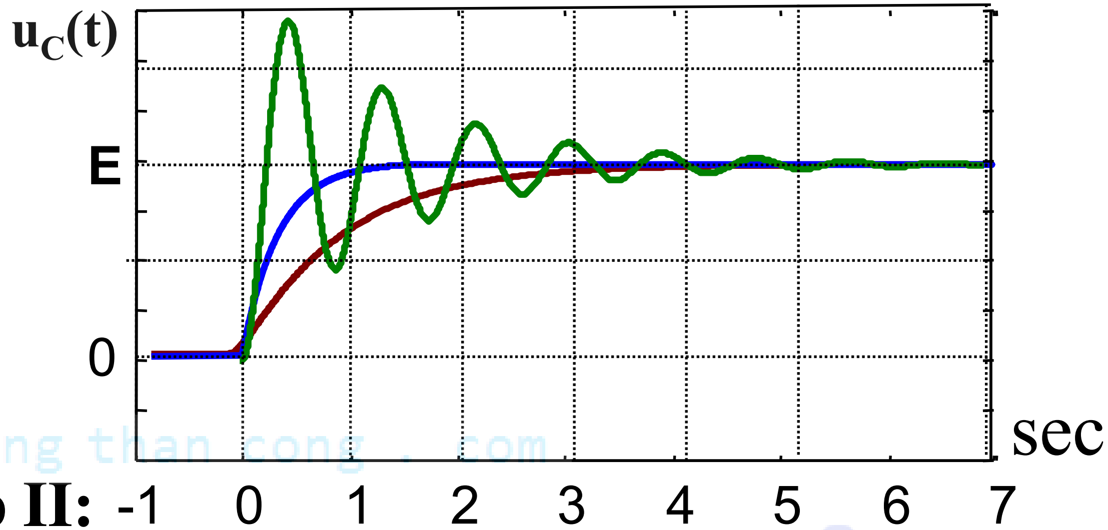
$$R_{th} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\ (\Omega)$$

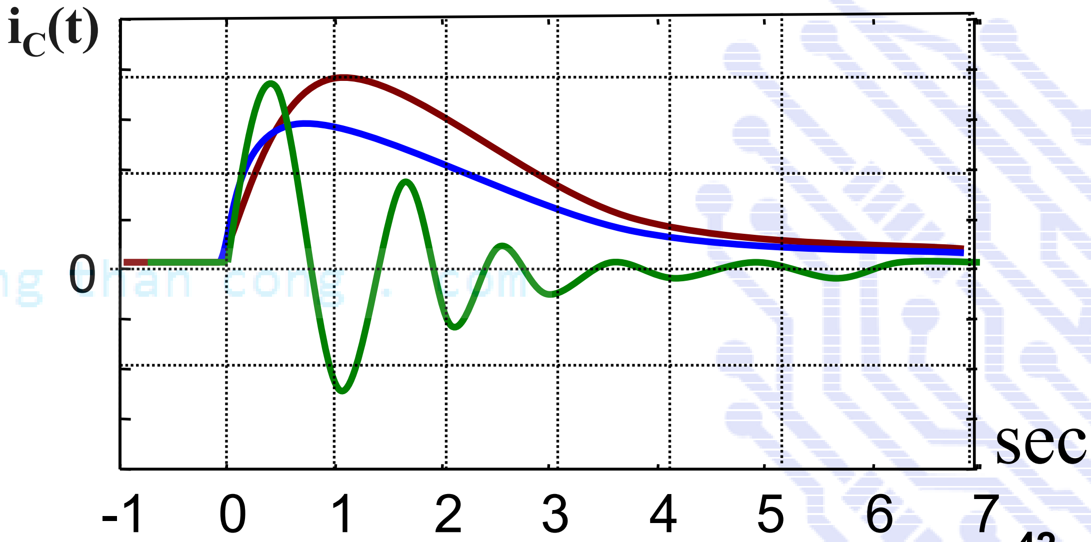
- Các chế độ của mạch cấp II:

  i. Không dao động : ($R > R_{th}$)

  ii. Dao động : ($R < R_{th}$)

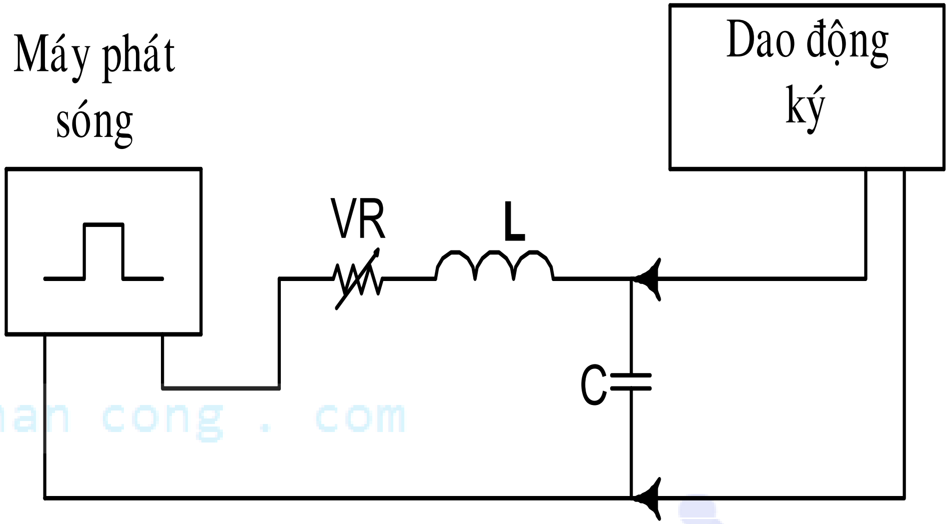
  iii. Tới hạn : ($R = R_{th}$)





❖ Đo điện trở tới hạn R_{th}

1. **Dùng mạch như hình bên:**



2. **Chọn VR rất bé để mạch ở chế độ dao động.**

3. **Tăng dần dần VR để có dạng sóng tới hạn . Giá trị điện trở tới hạn :**

$$R_{th} = VR$$