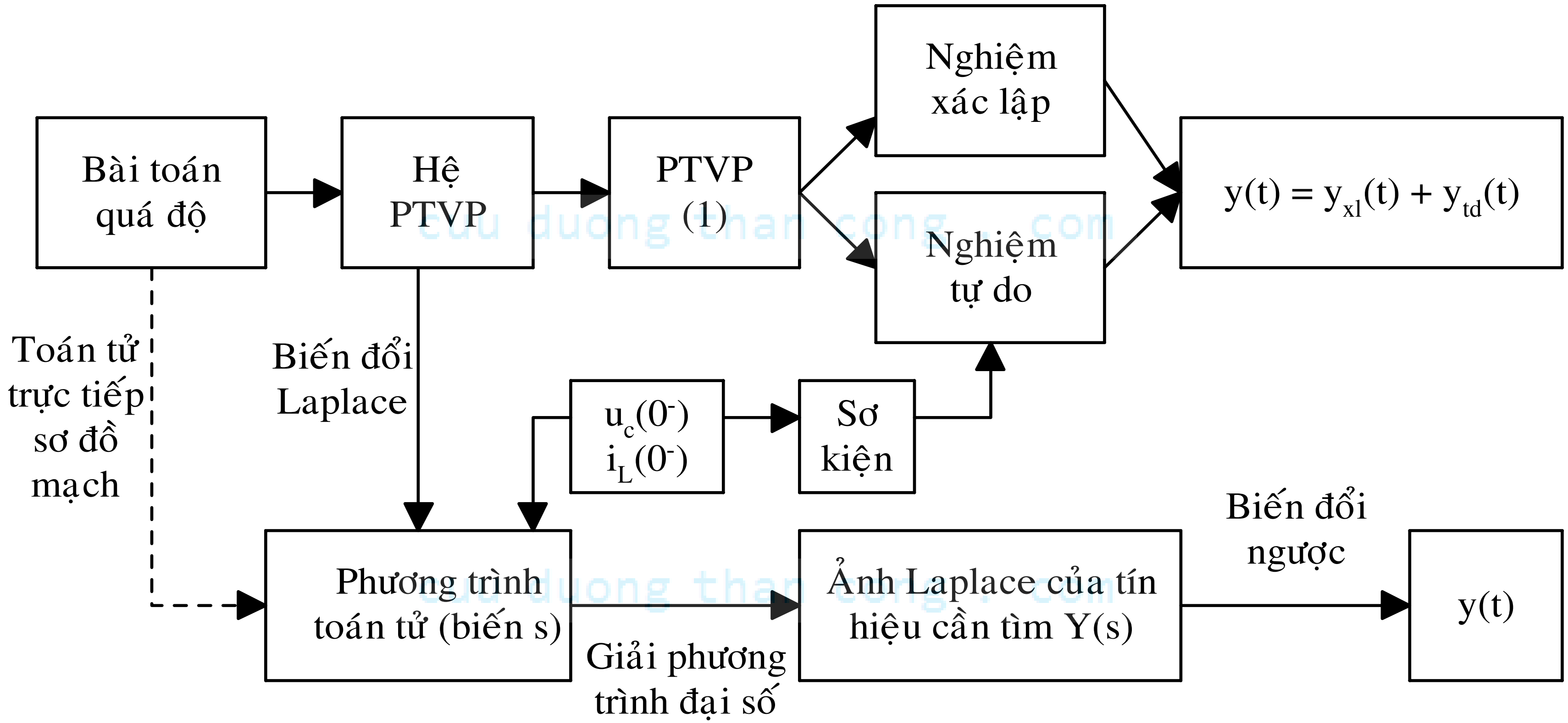
4.3

Phân tích quá độ dùng toán tử Laplace

4.3.1 Giới thiệu phương pháp



❖ Áp dụng cho phân tích mạch :

Steps in applying the Laplace transform:

1. Transform the circuit from the time domain to the *s* domain.
2. Solve the circuit using nodal analysis, mesh analysis, source transformation, superposition, or any circuit analysis technique with which we are familiar.
3. Take the inverse transform of the solution and thus obtain the solution in the time domain.

4.3.2 Biến đổi Laplace và tính chất

❖ **Biến đổi Laplace:**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ảnh Laplace **hàm gốc**

❖ **Biến đổi ngược Laplace:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st}ds \;=\; \pounds^{-1}\{F(s)\}$$

(σ : số thực tùy ý để đệm)

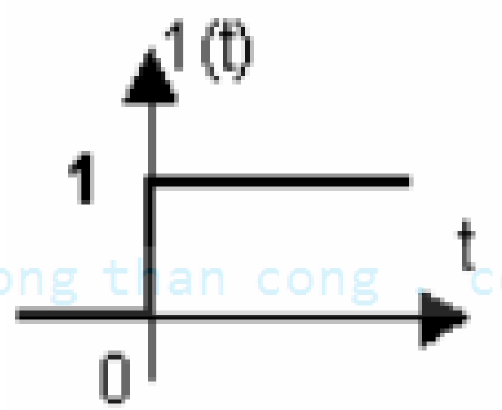
❖ **Xác định F(s) = dùng bảng tra gốc – ảnh + t/c bđổi Laplace .**

❖ **Xác định f(t) = dùng định lý Heaviside + bảng tra gốc – ảnh + tính chất của biến đổi Laplace .**

❖ Các hàm cơ bản & ảnh Laplace

- **Hàm đơn vị 1(t) :**

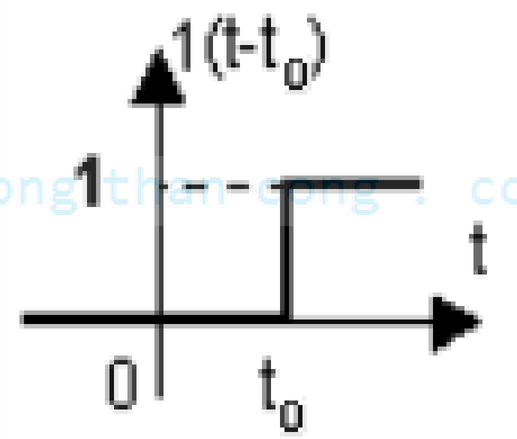
$$1(t) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow khi: t > 0 \\ 0 \leftrightarrow khi: t < 0 \end{cases}$$



$$\boxed{\pounds\{1(t)\} = \frac{1}{s}}$$

- **Hàm trễ đơn vị $1(t-t_0)$:**

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow khi: t > t_0 \\ 0 \leftrightarrow khi: t < t_0 \end{cases}$$

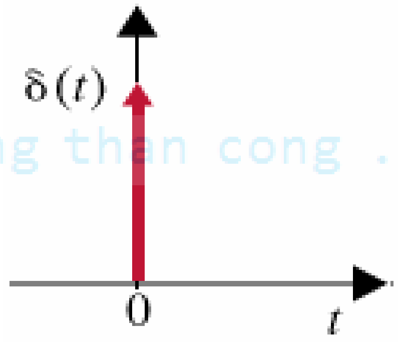


$$\boxed{\pounds\{1(t-t_0)\} = \frac{1}{s}e^{-st_0}}$$

❖ Các hàm cơ bản & ảnh Laplace

- **Hàm xung Dirac δ(t) : đạo hàm của hàm 1(t) .**

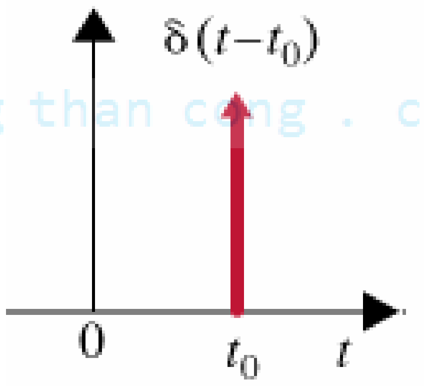
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \leftrightarrow khi : t \neq 0 \\ \infty \leftrightarrow khi : t = 0 \end{cases}$$



$\pounds\{\delta(t)\} = 1$

- **Hàm trễ Dirac $\delta(t\text{-}t_0)$:**

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 \leftrightarrow khi : t \neq t_0 \\ \infty \leftrightarrow khi : t = t_0 \end{cases}$$



$\pounds\{\delta(t\text{-}t_0)\} = e^{-st_0}$

❖ Bảng tính chất của biến đổi Laplace

1. £{f(t).1(t)} = £{f(t)}
2. £{$f_1(t) \pm f_2(t)$} = $F_1(s) \pm F_2(s)$
3. £{k.f(t)} = k.F(s)
4. £{$e^{-at}f(t)$} = F(s+a)
5. £{t.f(t)} = $-\dfrac{dF(s)}{ds}$
6. £{$f(t-t_0).1(t-t_0)$} = $F(s).e^{-st0}$
7. £{df(t)/dt} = $sF(s)- f(0^-)$
8. £$\{\int_0^t f(t)dt\} = \dfrac{F(s)}{s}$
9. $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[s.F(s)]$
10. $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0}[s.F(s)]$

4.3.3 Toán tử hóa các phần tử mạch

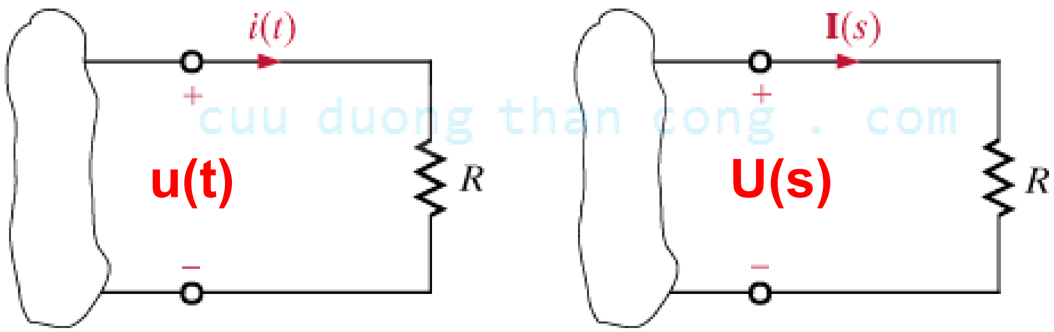
❖ Dùng biến đổi Laplace lên phương trình mô tả cho các phần tử mạch trong miền thời gian :

➡ Ta có mô hình phần tử mạch trong miền Laplace (miền s) .

➡ Dựng được sơ đồ tương đương của phần tử mạch trong miền s.

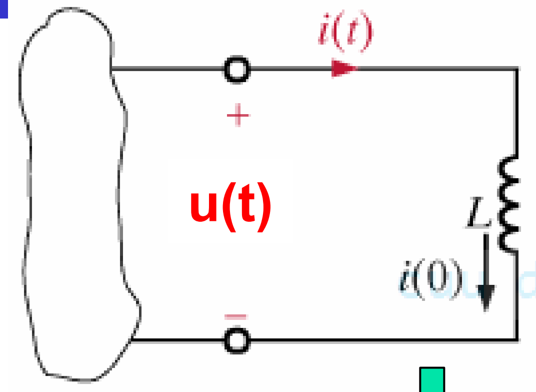
1. Phần tử điện trở :

Resistor



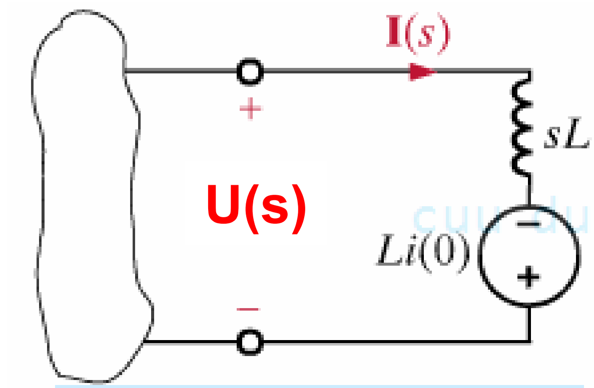
$$u(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = RI(s)$$

2. Phần tử điện cảm : Inductor Models

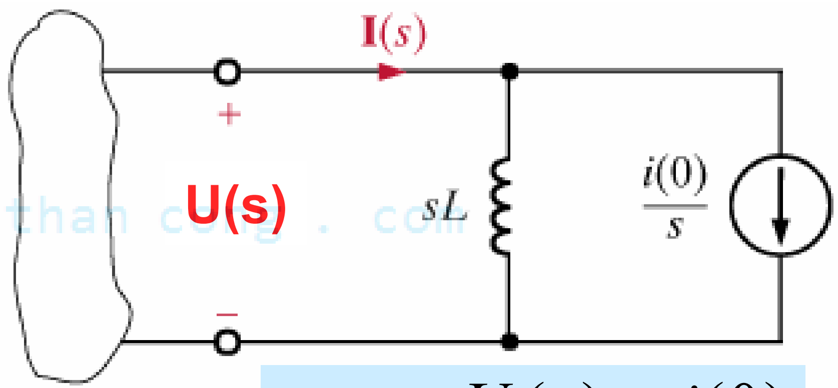


$$u(t) = L\frac{di}{dt}(t) \Rightarrow U(s) = L(sI(s) - i(0))$$

(sL= cảm kháng toán tử)

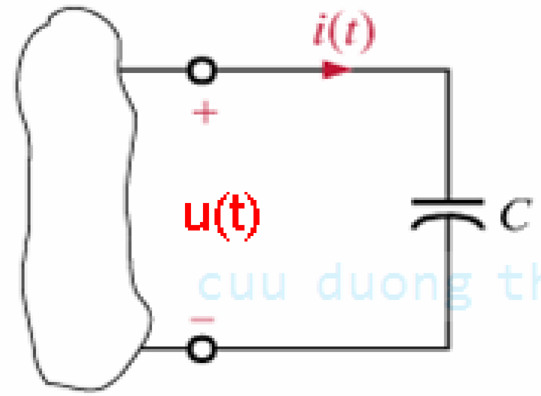


$$U(s) = sL.I(s) - Li(0)$$



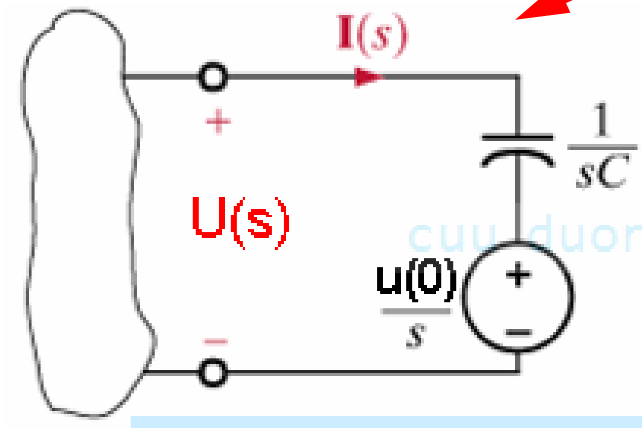
$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$$

3. Phần tử điện dung : Capacitor: Models

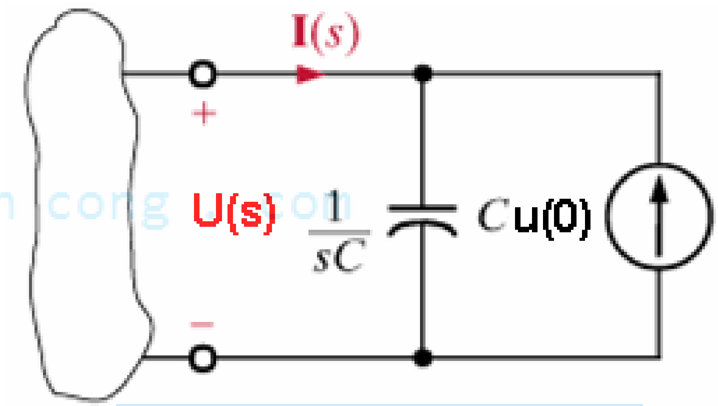


$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx + u(0)$$

(1/sC= dung kháng toán tử)

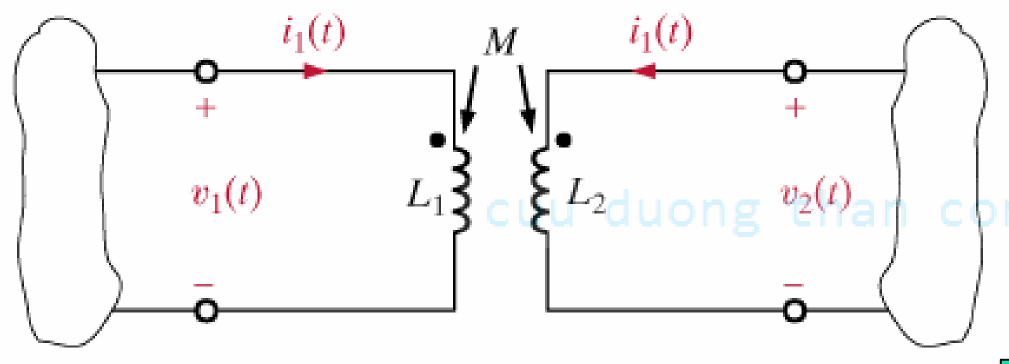


$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u(0)}{s}$$



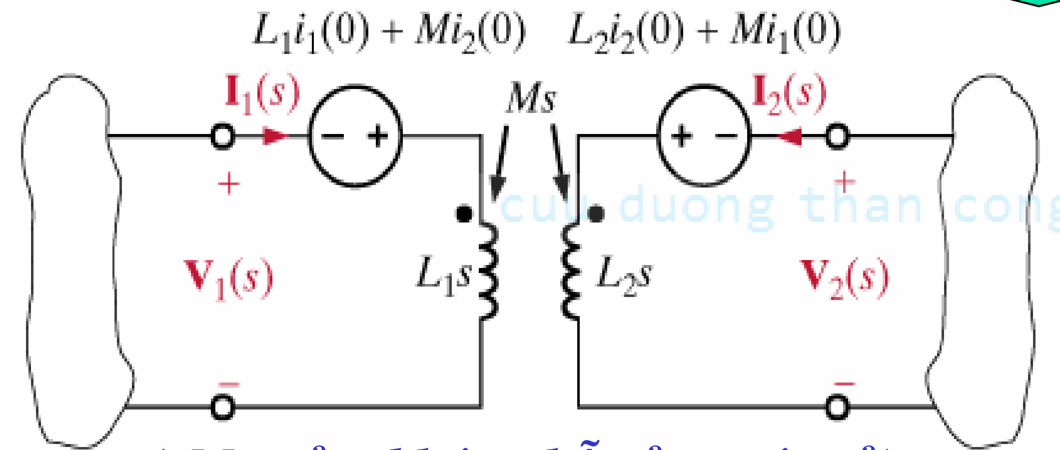
$$I(s) = sCU(s) - Cu(0)$$

4. Phần tử hỗ cảm : Mutual Inductance



$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M\frac{di_2}{dt}(t)$$

$$v_2(t) = M\frac{di_1}{dt}(t) + L_2\frac{di_2}{dt}(t)$$



$$U_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(0) + sMI_2(s) - Mi_2(0)$$

$$U_2(s) = sMI_1(s) - Mi_1(0) + sL_2I_2(s) - L_2i_2(0)$$

(sM= cảm kháng hỗ cảm toán tử)

5. Phần tử nguồn :

❖ **Chỉ thay thế bằng ảnh Laplace tương ứng .**

a) Independent sources

$$e_S(t) \rightarrow E_S(s)$$

$$j_S(t) \rightarrow J_S(s)$$

b) Dependent sources

$$e_D(t) = k_4 i_C(t) \rightarrow E_D(s) = k_4 I_C(s)$$

$$j_D(t) = k_3 u_C(t) \rightarrow J_D(s) = k_3 U_C(s)$$

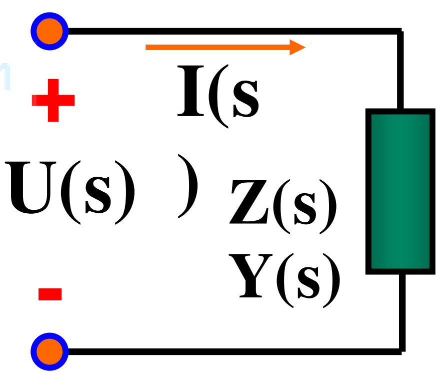
...

4.3.4 Các luật mạch dạng toán tử

a) Luật Ohm dạng toán tử :

❖ **Phát biểu:**

$$U(s) = Z(s).I(s) \qquad I(s) = Y(s).U(s)$$

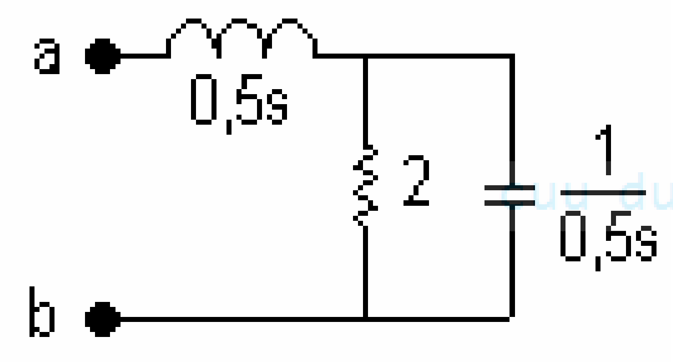


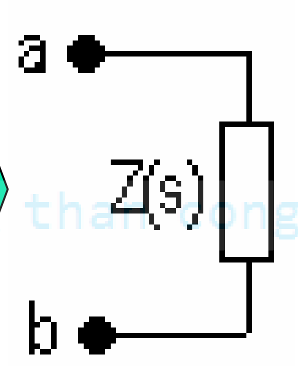
Với : $Y = \dfrac{1}{Z}$ $\begin{cases} \textbf{Z(s) : trở kháng , tổng trở toán tử } (\Omega) \\ \textbf{Y(s) : dẫn nạp , tổng dẫn toán tử } (S)\ (\mho) \end{cases}$

❖ Đặc điểm của Z(s) & Y(s) :

Z(s) và Y(s) đều tuân theo các phép biến đổi tương đương như điện trở và điện dẫn.

❖ **<u>Ví dụ :</u> Xác định trở kháng toán tử tương đương :**





$$Z = 0,5s + \frac{\frac{2}{0,5s}}{2 + \frac{1}{0,5s}}$$

$$\Rightarrow Z = 0,5s + \frac{2}{s+1}$$

b) Luật Kirchhoff dạng toán tử:

- **Luật KCL :** $\sum_{node} \pm I_k(s) = 0$

(Xét dấu như mạch điện trở)

- **Luật KVL :** $\sum_{loop} \pm U_k(s) = 0$

- **Do các luật Ohm và Kirchhoff viết cho mạch toán tử cũng tương tự viết cho mạch phức nên ta có thể áp dụng các phương pháp phân tích mạch xác lập đã học cho sơ đồ toán tử khi tìm ảnh Laplace bất kỳ.**

4.3.5 Biến đổi ngược Laplace

❖ **Rút gọn ảnh Laplace Y(s) về phân thức hữu tỉ tối giản:**

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

➢ **Phương trình A(s) = 0 vẫn gọi là PTĐT.**

❖ **Ta có các trường hợp :**

1. PTĐT có nghiệm thực , đơn:

❖ **Các nghiệm : s_i : i = 1 ÷ n .**

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{s_i t}.1(t)$$

❖ **Với các hệ số :** $K_i = \lim_{s \to s_i} \left(\frac{B(s)}{A(s)}(s - s_i) \right) = \left. \frac{B(s)}{A'(s)} \right|_{s=s_i}$

2. PTĐT có nghiệm bội :

❖ Các nghiệm : s_1 bội r , s_{r+1}, … , s_n .

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_{1,1}}{(s-s_1)} + \frac{K_{1,2}}{(s-s_1)^2} + \ldots + \frac{K_{1,r}}{(s-s_1)^r} + \frac{K_{r+1}}{s-s_{r+1}} + \ldots + \frac{K_n}{s-s_n}$$

✓ **Trong đó :** $K_{1,k} = \frac{1}{(r-k)!} \frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s-s_1)^r \right] \Bigg|_{s=s_1 ; k=1 \div r}$

❖ **Khi tìm hàm gốc ta dùng công thức :**

$$L^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-s_1)^r} \right\} = \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} e^{s_1 t} .1(t)$$

3. PTĐT có nghiệm phức :

- **Các nghiệm : $s_{1,2} = -\alpha + j\beta$, s_2 , ... , s_n .**

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{B(s_1)}{A'(s_1)}e^{s_1 t}\right\} + \sum_{i=3}^{n} K_i e^{s_i t}$$

- **<u>Lưu ý :</u> Các hệ số K_i trong phần 2. và 3. xác định như cho nghiệm thực , đơn trong phần 1. .**

4.3.6 Áp dụng cho bài toán quá độ:

1. Xác định $u_C(0^-)$ và $i_L(0^-)$.

2. Xây dựng sơ đồ toán tử cho mạch tại t > 0 .Chú ý xác định ảnh Laplace của tác động và của tín hiệu cần tìm.

3. Áp dụng các phương pháp phân tích mạch để xác định ảnh Laplace Y(s) của tín hiệu cần tìm.
   - (P^2 bđtđ; P^2 dòng nhánh; P^2 thế nút; P^2 dòng mắc lưới ...)

4. Biến đổi ngược Laplace tìm y(t) từ Y(s).