5.2: Chuỗi Fourier & Bài toán xác lập không sin:

5.2.1 Chuỗi Fourier dạng lượng giác.

5.2.2 Tính đối xứng và chuỗi Fourier.

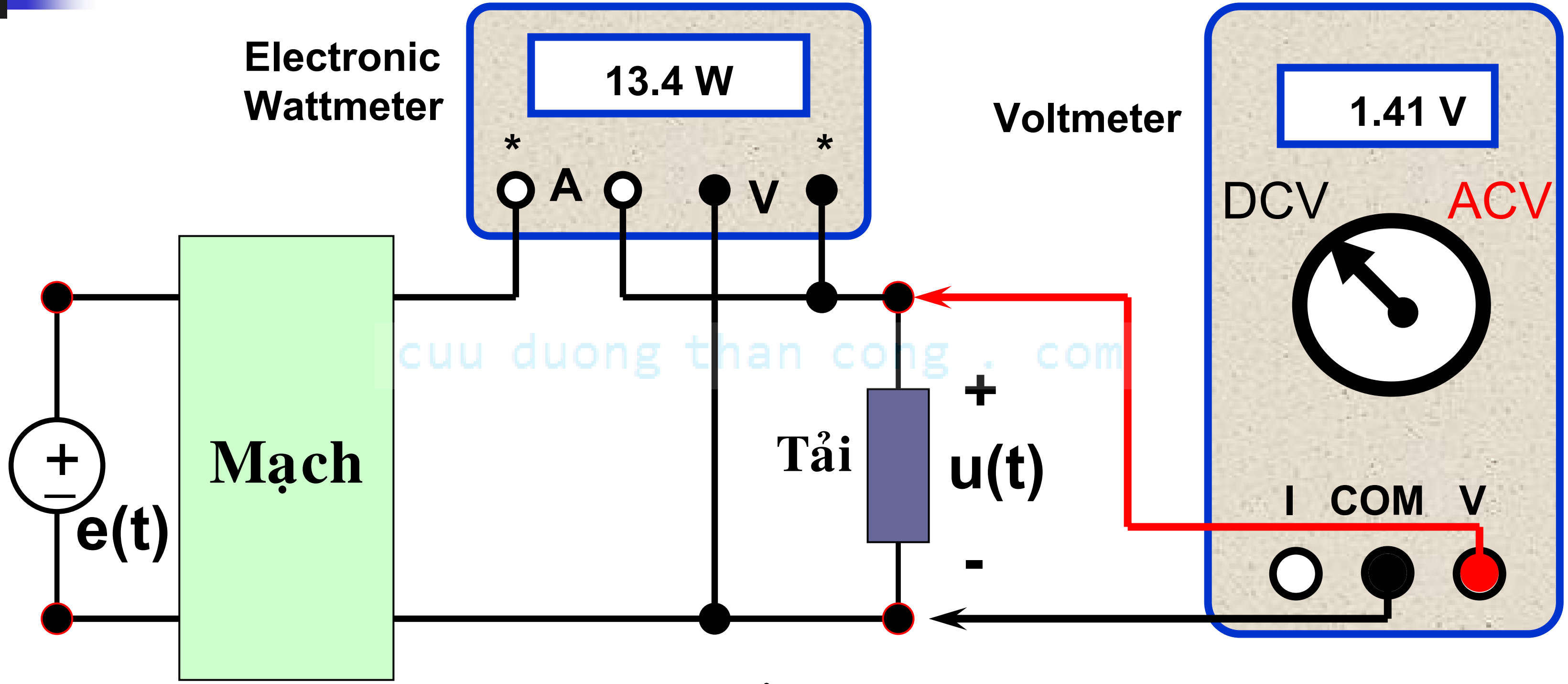
5.2.3 Chuỗi Fourier dạng mũ.

5.2.4 Phổ tần số.

5.2.5 Giải tích xác lập không sin.

5.2.6 Công suất trong mạch không sin.

❖Bài toán :



Tác động e(t) là tín hiệu tuần hoàn không sin.

- Xác định biểu thức xác lập u(t) ?
- Xác định chỉ số các dụng cụ đo ?

5.2.1 Chuỗi Fourier dạng lượng giác

❖ Chuỗi Fourier dạng lượng giác của tín hiệu tuần hoàn không sin f(t) thoả điều kiện Dirichlets (đơn điệu và bị chặn trên một chu kỳ) có dạng:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \quad (1)$$

Trigonometric series

Với : n = 1,2 ...

$\omega_0 = 2\pi/T$ = tần số cơ bản

a_0 , a_n , b_n = các hệ số khai triển Fourier .

Các hệ số khai triển Fourier

❖ Tín hiệu có chu kỳ T (s)	❖ Tín hiệu có chu kỳ 2π (rad)
$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$	$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)d(\omega t)$
$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$	$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(n\omega_0 t)d(\omega t)$
$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$	$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin(n\omega_0 t)d(\omega t)$

Chuỗi Fourier và hài (harmonic)

❖ **Từ Phương trình (1) , ta biến đổi :**

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \qquad (2)$$

Cosine expansion

➢ **Với :**

d_0 = thành phần DC (trung bình).

$D_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ = Tp hài cơ bản.

$D_k\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ = Tp hài thứ k.

$$\begin{cases} d_0 = a_0 \\ D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -arctg\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

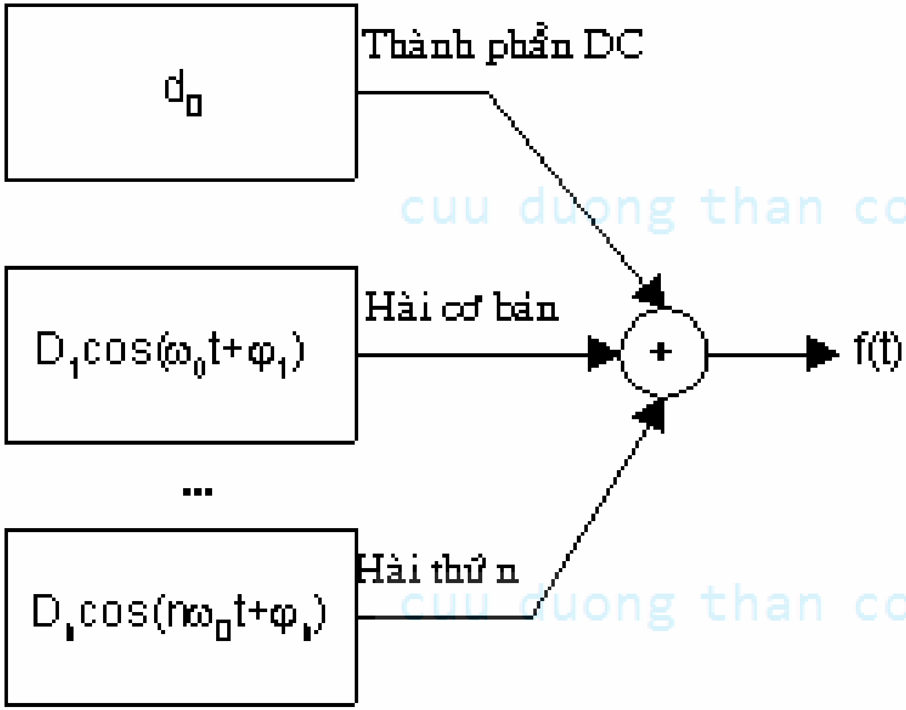
Ứng dụng chuỗi Fourier

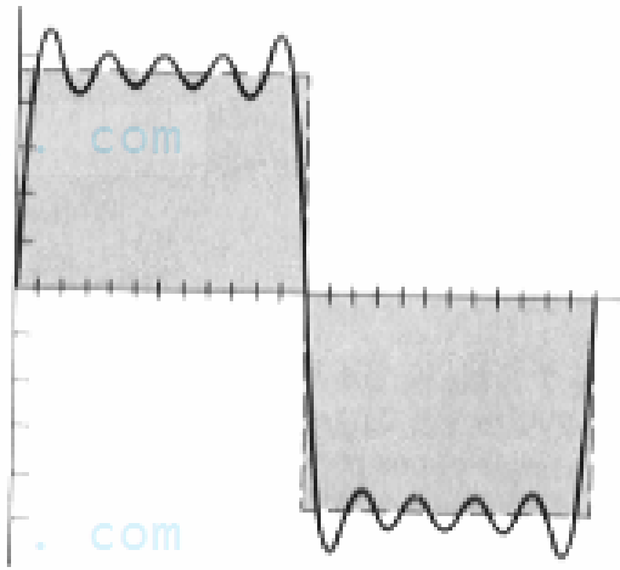
1. Ý nghĩa xếp chồng : tín hiệu tuần hoàn không sin là tổng của tín hiệu DC và các điều hòa , có tần số là bội số của tần số cơ bản.

$$f(t) = TpDC + \sum_{n=1}^{\infty} har_n$$

2. Tín hiệu tuần hoàn không sin f(t) có thể tạo ra từ các tín hiệu : tín hiệu DC và các tín hiệu điều hòa , có tần số là bội số của tần số tín hiệu muốn tạo.

❖ Tạo tín hiệu không sin từ các hài

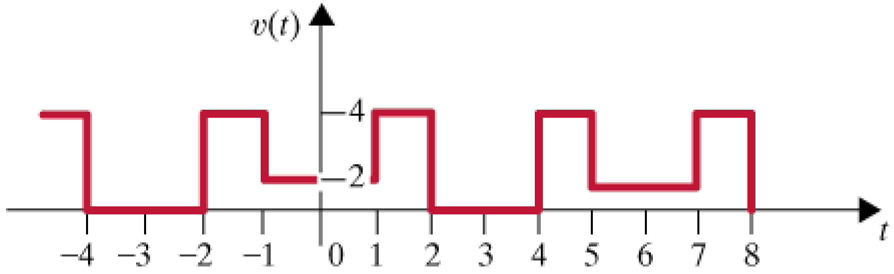




Tổng hợp từ 9 hài đầu tiên

5.2.2 Tính đối xứng của hàm và các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

a) **Hàm chẵn f(t) = f(-t) : Tín hiệu nhận trục tung làm trục đối xứng.**



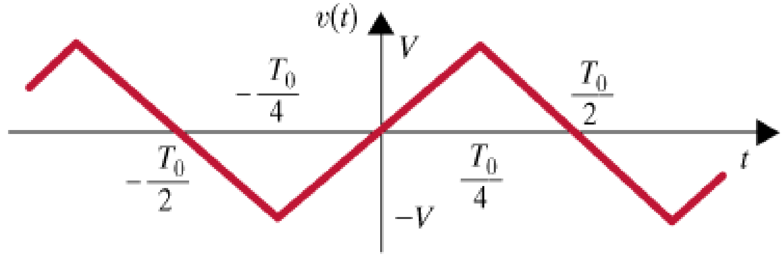
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = 0$$

b) Tính đối xứng lẻ :

Hàm lẻ f(t) = - f(-t) : Tín hiệu nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



(a)

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

c) Đối xứng nửa sóng

❖ **Hàm đối xứng nửa sóng :**

f(t) = - f(t ± T/2) :

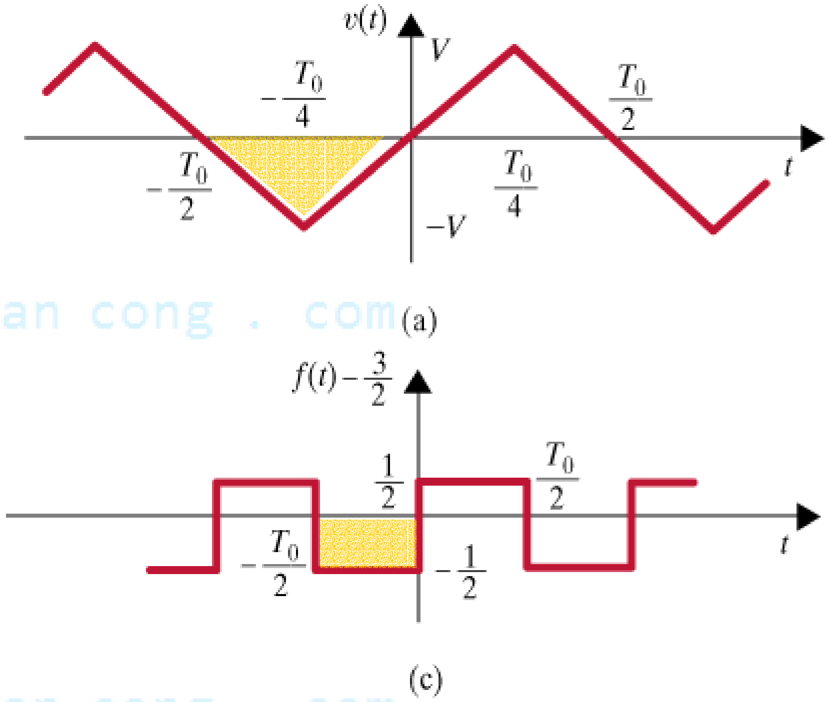
✓ **TP DC :** $\boxed{a_0 = 0}$

✓ **Khi n chẵn :** $\boxed{a_n = b_n = 0}$

✓ **Khi lẻ :**

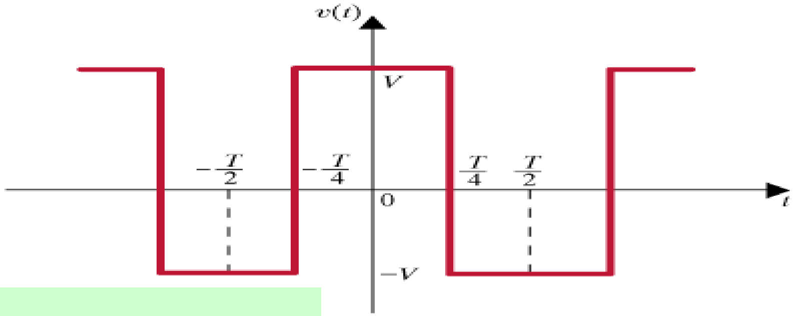
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$



Examples of signals with half-wave symmetry

d) Chẵn & đối xứng nửa sóng



even $\Rightarrow b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots$

half-wave symmetry $\Rightarrow a_n = \dfrac{4}{T_0}\displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ for n odd

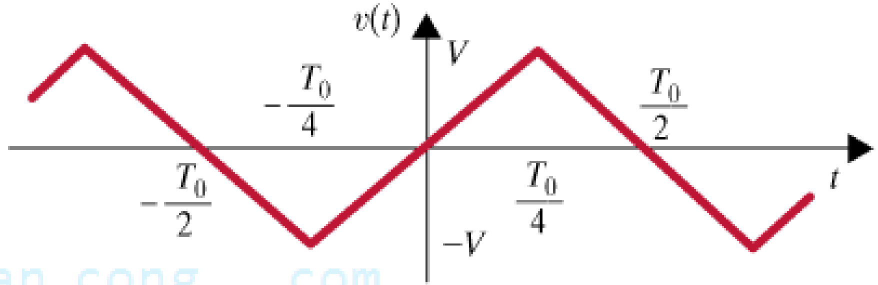
$a_n = 0$ for n even

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt\right] = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} V\cos(2k+1)\omega_0 t\,dt$$

$$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad \text{(n:odd)}$$

e) Lẻ & đối xứng nửa sóng

odd $\Rightarrow \quad a_n = 0; \; n = 0,1,2,\ldots$



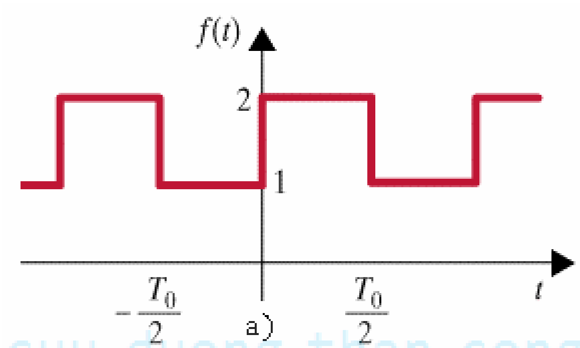
half - wave symmetry $\Rightarrow b_n = \dfrac{4}{T_0}\displaystyle\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$ for n odd

$b_n = 0$ for n odd

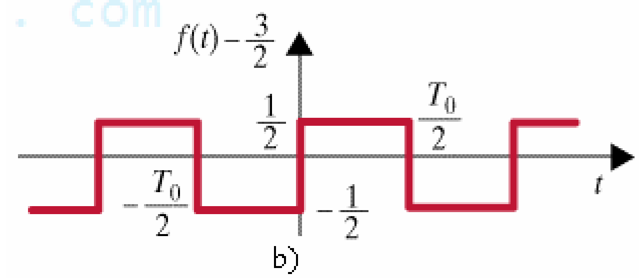
$$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad \text{(n:odd)}$$

f) Nếu không đối xứng :

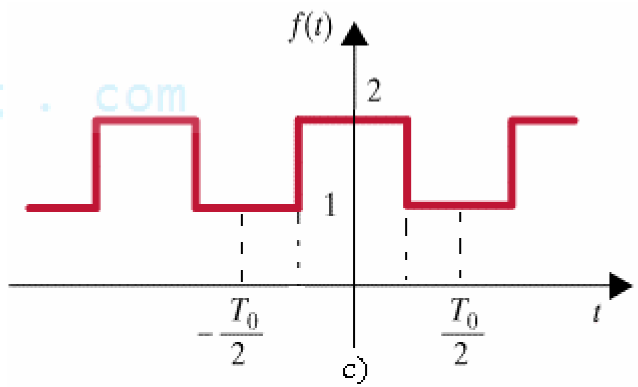
f_1) Dời trục :



→ **Không đối xứng**



❖ **Dời tín hiệu theo trục tung : thay đổi Thành phần DC của tín hiệu .**



❖ **Dời tín hiệu theo trục hoành : thay đổi góc pha của các hài.**

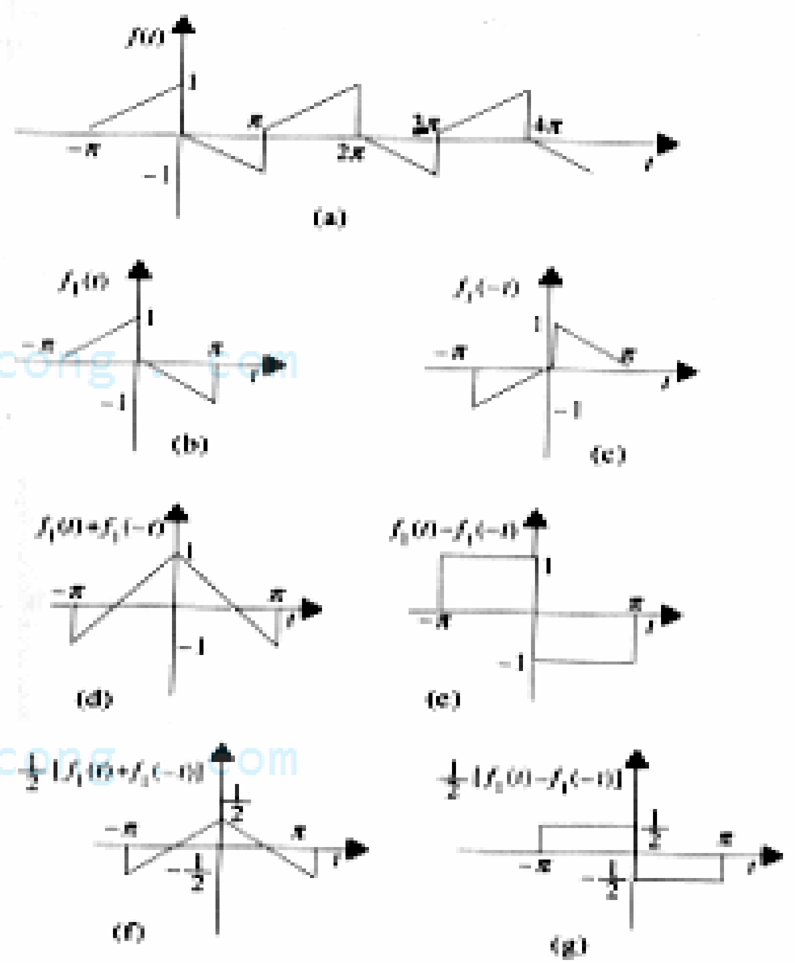
f_2) Phân tích chẵn – lẻ

❖ Phân tích thành các thành phần chẵn và lẻ :

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

[*Hàm f(-t) xác định bằng đồ thị*]



❖ Và ta có :

$a_0 = a_{0e}$	$a_n = a_{ne}$	$b_n = b_{no}$

5.2.3 Chuỗi Fourier dạng mũ

❖ Nếu sử dụng các công thức biến đổi Euler vào phương trình (1) , ta nhận được chuỗi Fourier dạng số mũ (dạng số phức) như sau :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (3)$$

➢ Với số phức C_n :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).e^{-jn\omega_0 t}dt$$

➢ Và :

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = a_0 = d_0$$

▪ Chuỗi dạng mũ và chuỗi lượng giác

❖ **Chuỗi dạng mũ quan hệ với các dạng khác :**

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \angle - arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{D_n}{2} \angle \varphi_n$$

❖ **Và như vậy :**

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|C_n\right| \cos(n\omega_0 t + \angle C_n) \quad (4)$$

Time Shifting :

❖ It is easier to study the effect of time-shift with the exponential series expansion .

❖ Nếu hàm f(t) bị làm trễ đi t_0 , ta có :

$$f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t-t_0)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(C_n.e^{-jn\omega_0 t_0})e^{jn\omega_0 t}$$

➢ Tức là ở miền tần số , góc pha hài thứ n bị thay đổi : $n\omega_0 t_0$.

$$\begin{aligned} t_0 &= \text{time shift for } f(t) \\ -n\omega_0 t_0 &= \text{phase shift for } c_n \end{aligned}$$

5.2.4 Phổ tần số (fre. spectrum)

❖ **Phổ tần số : biểu diễn đồ thị các hệ số chuỗi Fourier.**

a) ***Phổ tần số một phía*** **biểu diễn chuỗi Fourier dạng :**

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2)$$

Cosine expansion

➢ **Phổ biên độ : biểu diễn D_n theo n .**

➢ **Phổ pha : biểu diễn φ_n theo n .**

b) Phổ tần số hai phía

❖ *Phổ tần số hai phía* **biểu diễn chuỗi Fourier dạng :**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (3)$$

- **Phổ biên độ : biểu diễn $|C_n|$ theo n . Phổ biên độ nhận trục tung làm trục đối xứng.**
- **Phổ pha : biểu diễn $\angle C_n$ theo n . Phổ pha nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.**

✓ *Cả hai loại phổ có cùng thông tin*

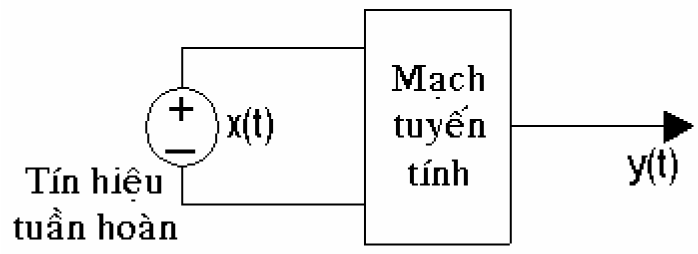
❖ Xác định và vẽ phổ tần số 2 phía

1. Xác định chu kỳ , tần số cơ bản.
2. Xác định hàm f(t) trong một chu kỳ .
3. Xác định C_0 dùng tích phân hay trung bình diện tích.
4. Xác định C_n bằng công thức tích phân. Biểu diễn số phức này dưới dạng số mũ .
5. Vẽ $|C_n|$ theo số hài tồn tại n : phổ biên độ .
6. Vẽ $\angle C_n$ theo số hài tồn tại n : phổ pha .

5.2.5 Truyền tín hiệu tuần hoàn qua mạch tuyến tính.

Bài toán: Cho mạch :

Tìm đáp ứng xác lập y(t) ?



Phương pháp phân tích : Xếp chồng trong miền tần số.

1. Tìm chuỗi Fourier của x(t) :

$$x(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Xếp chồng trong miền tần số

2. Tìm Y_0 : đáp ứng DC.

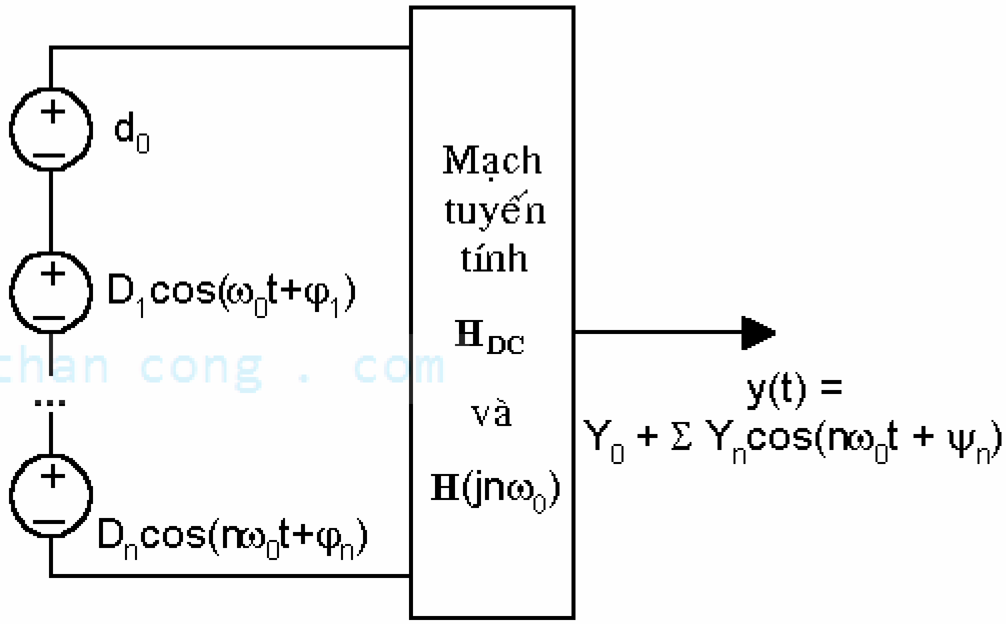
- **Có thể thay ω = 0 trong biểu thức hàm truyền đạt tần số H(jω) hay tiến hành bài toán giải tích mạch xác lập DC.**

Xếp chồng trong miền tần số

3. Tìm vecto phức của hài:

➢ **Thay $\omega = n\omega_0$ trong biểu thức hàm truyền đạt tần số $H(j\omega)$ hay giải tích mạch phức khi cho $\omega = n\omega_0$.**

$$\dot{Y}_n = H(jn\omega_0).\dot{X}_n = Y_n \angle \psi_n$$



➢ **Đáp ứng cần tìm có dạng :**

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n)$$

Using Frequency Response for Harmonic Analysis (AC analysis) :

- **Circuit Elements:** $R \quad L \quad C \rightarrow R \quad jn\omega_0 L \quad \dfrac{1}{jn\omega_0 C}$
- **Determine Frequency Response: $H(jn\omega_0) = I(jn\omega_0)/V(jn\omega_0)$.**

- **From Fourier Series $\rightarrow V(jn\omega_0) \rightarrow I(jn\omega_0)$.**

$$H(jn\omega_0) = M(n\omega_0)\angle\theta(n\omega_0) \ \ \& \ \ V(jn\omega_0) = V_n\angle\varphi_n$$

$$\Rightarrow \boxed{I(jn\omega_0) = V_n.M(n\omega_0)\angle\varphi_n + \theta(n\omega_0) \ = I_n\angle\psi_n}$$

❖ Find Frequency Response H(jω) * :

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

i. **Using the basic laws in the phasor domain .**

ii. **Assuming Y(jω) = 1 → Find X(jω) → then calculate H(jω) .**

iii. **Determine the Transfer Function H(s) (See chapter 6) → then replace s by jω .**

(*): very important to Electronic Engineering .

5.2.6 Công suất ở mạch không sin.

❖ Cho một nhánh có áp , dòng là tín hiệu không sin :

$$u(t) = U_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{un})$$

$$i(t) = I_{DC} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m \cos(m\omega_0 t + \varphi_{im})$$

a) Công suất tác dụng P (W) :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t)dt \Rightarrow P = U_{DC} I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_n I_n \cos(\varphi_{un} - \varphi_{in})$$

$$\mathbf{P = P_{DC} + \Sigma P(hài)}$$

b) Trị hiệu dụng của tín hiệu:

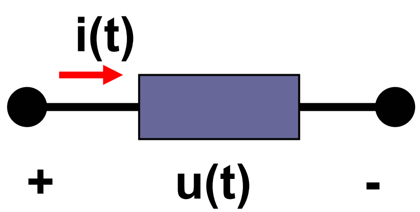
- Cho tín hiệu không sin có khai triển chuỗi Fourier :

$$u(t) = U_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{un})$$

- Trị hiệu dụng (RMS value) :

$$U_{RMS} = \sqrt{U_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{U_n}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

- Trên phần tử mạch:



$$\boxed{P_R = RI_{RMS}^2 = \frac{U_{RMS}^2}{R}}$$

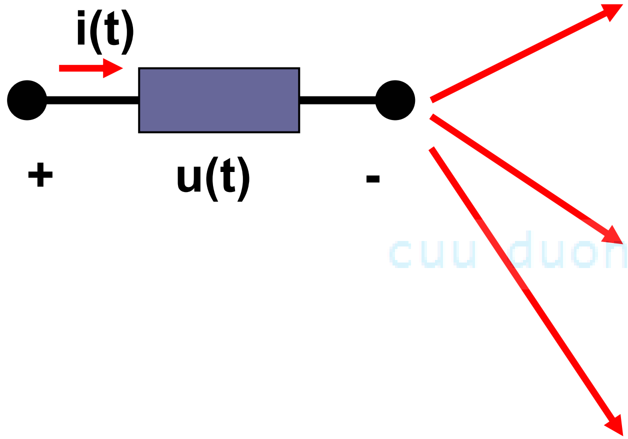
$$\boxed{P_L ; P_C = 0}$$

c) Công suất phản kháng Q (Var):

❖ **Trên một nhánh bất kỳ :**

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} U_n I_n \sin(\varphi_{un} - \varphi_{in}) \quad (\text{Var})$$

❖ **Trên phần tử mạch:**



$$Q_L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (n\omega_0 L) I_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{U_n^2}{n\omega_0 L} \quad (\text{Var})$$

$$Q_C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{I_n^2}{n\omega_0 C} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (n\omega_0 C) U_n^2 \quad (\text{Var})$$

$$Q_R = 0$$

d) Công suất S và T :

❖ **Công suất biểu kiến S (VA) :** $S = U_{RMS} I_{RMS}$

❖ **Công suất méo dạng T (VA) : có một số hài chỉ tồn tại ở u(t) hay i(t), mà khi thay đổi biên độ của chúng , S thay đổi nhưng P và Q không đổi. Người ta đưa ra khái niệm công suất méo dạng.**

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

e) Các hệ số đặc trưng :

- **Hệ số công suất cosφ (p.f):** $$\cos\varphi = \text{p.f} = \frac{P}{S}$$
- **Hệ số dạng k_f :** $$k_f = \frac{F_{RMS}}{F_0} = \frac{\text{RMS Value}}{\text{Average Value}}$$
- **Hệ số đỉnh k_p :** $$k_p = \frac{F_{max}}{F_{RMS}} = \frac{\text{peak Value}}{\text{RMS Value}}$$
- **Hệ số méo dạng:** $$k = \frac{F_{1(RMS)}}{F_{RMS}}$$
- **Hệ số hàm lượng hài thứ n :** $$k_n = \frac{F_{n(RMS)}}{F_{RMS}}$$