2.1. BIẾN DẠNG

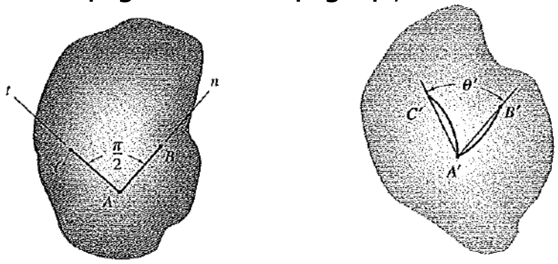
2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

- Khi vật chịu tác dụng của lực, vật có khuynh hướng thay đổi kích thước và hình dáng. Sự thay đổi này gọi là biến dạng.

- Chuyển vị là đại lượng có hướng dùng để chỉ sự dịch chuyển của một điểm từ vị trí này đến vị trí khác.

- Xét vật ở trạng thái ban đầu chưa chịu lực. Các điểm A, B, C trên vật được tính từ một hệ trục cố định. Khi ngoại lực tác dụng làm biến dạng vật, các điểm A, B, C dịch chuyển đến vị trí mới là A′, B′, C′.



Undeformed body Deformed body

- Chuyển vị của điểm A được biểu diễn bằng vecto.

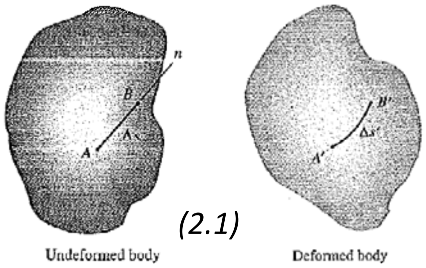
- Do bị biến dạng nên các đoạn thẳng AB và AC biến thành các đường cong A′B′ và A′C′. Nên các chiều dài AB $\neq$ A′B′; AC $\neq$ A′C′ và $\theta \neq \theta'$

<u>Kết luận:</u> khi có sự biến dạng phải tính đến sự thay đổi của chiều dài các đoạn thẳng và thay đổi các góc của chúng.

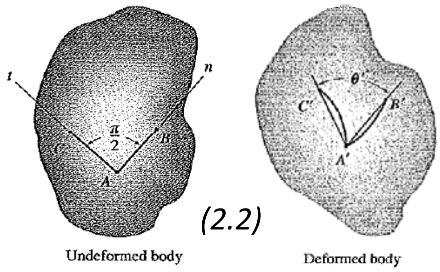
2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

a) Biến dạng dài: là độ dãn dài hoặc độ co lại của một đoạn thẳng trên một đơn vị chiều dài.

- Xét đoạn AB của vật chưa biến dạng như (2.1)



(2.1)



(2.2)

- Khi biến dạng: A → A′ ; B → B′ ; C → C′.
- Biến dạng dài trung bình: $\epsilon_{avg} = \dfrac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$ $\quad \boxed{\Delta s' \approx (1+\epsilon)\,\Delta s}$

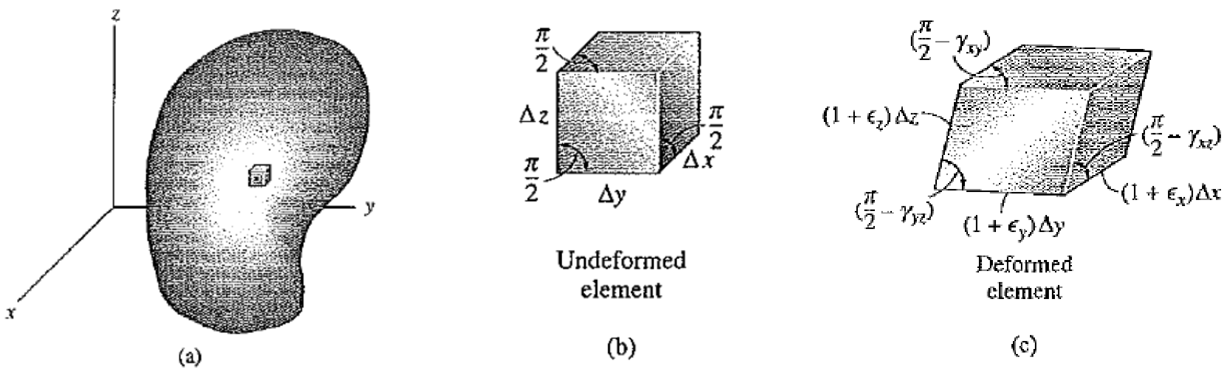
b) Biến dạng góc: là sự thay đổi vuông góc giữa hai đoạn thẳng sau khi biến dạng. Góc thay đổi được ký hiệu là γ và được đo bằng radian.

- Xét đoạn thẳng AB ⊥ AC khi vật chưa biến dạng như hình (2.2).
- Sau khi biến dạng, các đoạn thẳng trở thành đường cong và góc giữa chúng là θ' :

$$\boxed{\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ along } n \\ C \to A \text{ along } t}} \theta'}$$

2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

c) Xét một phần tử biến dạng trong không gian:



- Như vậy, biến dạng dài của phần tử theo các trục x, y , z là:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta y' - \Delta y}{\Delta y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta z' - \Delta z}{\Delta z}$$

$$\Delta x' = (1+\epsilon_x)\Delta x \qquad \Delta y' = (1+\epsilon_y)\Delta y \qquad \Delta z' = (1+\epsilon_z)\Delta z$$

- Sự thay đổi của các góc sau khi biến dạng theo các trục oxyz :

$$\gamma'_{xy} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \qquad \gamma'_{yz} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \qquad \gamma'_{zx} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{zx}$$

2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

<u>Ví dụ 01:</u>

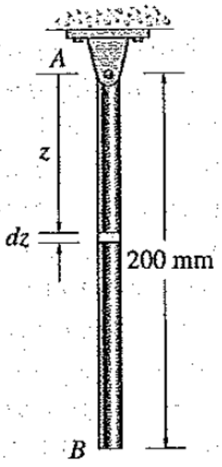


Fig. 8–31

The slender rod shown in Fig. 8–31 is subjected to an increase of temperature along its axis, which creates a normal strain in the rod of $\epsilon_z = 40(10^{-3})z^{1/2}$, where z is given in meters. Determine (*a*) the displacement of the end *B* of the rod due to the temperature increase, and (*b*) the average normal strain in the rod.

Part (a). Since the normal strain is reported at each point along the rod, a differential segment dz, located at position z, Fig. 8–31, has a deformed length that can be determined from Eq. 8–12; that is,

$$dz' = [1 + 40(10^{-3})z^{1/2}]\, dz$$

The sum total of these segments along the axis yields the *deformed length* of the rod, i.e.,

$$z' = \int_0^{0.2\text{ m}} [1 + 40(10^{-3})z^{1/2}]\, dz$$

$$= z + 40(10^{-3})(\tfrac{2}{3}z^{3/2})\Big|_0^{0.2\text{ m}}$$

$$= 0.20239 \text{ m}$$

The displacement of the end of the rod is therefore

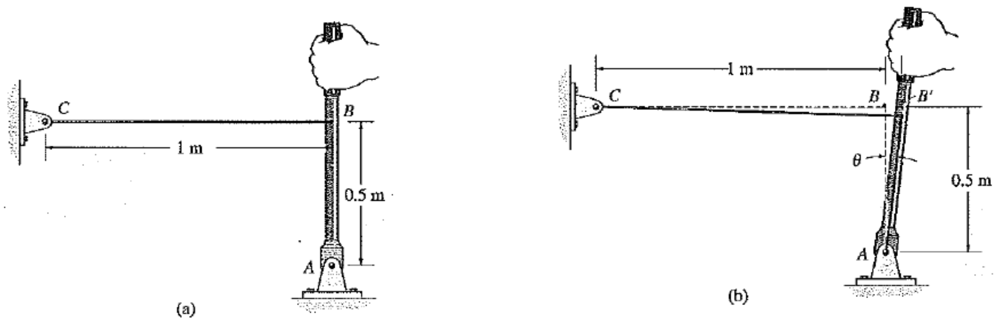
$$\Delta_B = 0.20239 \text{ m} - 0.2 \text{ m} = 0.00239 \text{ m} = 2.39 \text{ mm} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

Part (b). The average normal strain in the rod is determined from Eq. 8–10, which assumes that the rod or "line segment" has an original length of 200 mm and a change in length of 2.39 mm. Hence,

$$\epsilon_{avg} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{2.39 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.0119 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Ans.}$$

2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

<u>Ví dụ 02:</u> A force acting on the grip of the lever arm shown in Fig. 8–32*a* causes the arm to rotate clockwise through an angle of $\theta = 0.002$ rad. Determine the average normal strain developed in the wire *BC*.



Solution

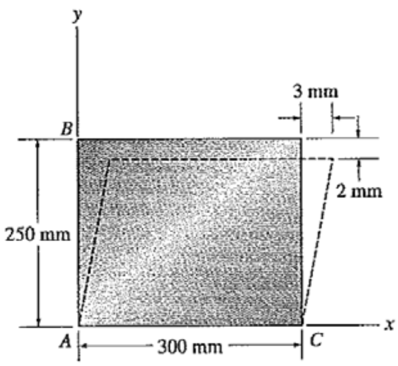
Since $\theta = 0.002$ rad is small, the stretch in the wire *CB*, Fig. 8–32*b*, is $BB' = \theta\,(0.5 \text{ m}) = (0.002 \text{ rad})(0.5 \text{ m}) = 0.001$ m. The average normal strain in the wire is therefore,

$$\epsilon_{avg} = \frac{BB'}{CB} = \frac{0.001}{1 \text{ m}} = 0.001 \text{ m/m} \qquad \textit{Ans.}$$

2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

<u>Ví dụ 03:</u>

The plate is deformed into the dashed shape shown in Fig. 8–33*a*. If in this deformed shape horizontal lines on the plate remain horizontal and do not change their length, determine (*a*) the average normal strain along the side *AB*, and (*b*) the average shear strain in the plate relative to the *x* and *y* axes.



(a)

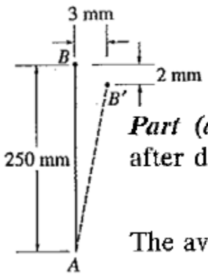
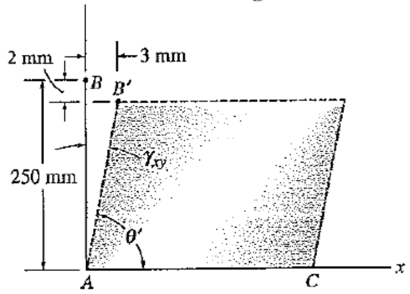


Fig. 8–33



(c)

Part (a). Line *AB*, coincident with the *y* axis, becomes line *AB'* after deformation, as shown in Fig. 8–33*b*. The length of this line is

$$AB' = \sqrt{(250-2)^2 + (3)^2} = 248.018 \text{ mm}$$

The average normal strain for *AB* is therefore

$$(\epsilon_{AB})_{avg} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{248.018 \text{ mm} - 250 \text{ mm}}{250 \text{ mm}}$$
$$= -7.93(10^{-3}) \text{ mm/mm} \qquad \textit{Ans.}$$

The negative sign indicates the strain causes a contraction of AB.

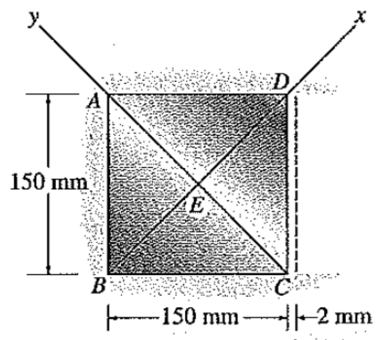
Part (b). As noted in Fig. 8–33*c*, the once 90° angle *BAC* between the sides of the plate, referenced from the *x*, *y* axes, changes to θ' due to the displacement of *B* to *B'*. Since $\gamma_{xy} = \pi/2 - \theta'$, then γ_{xy} is the angle shown in the figure. Thus,

$$\gamma_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{3 \text{ mm}}{250 \text{ mm} - 2 \text{ mm}}\right) = 0.0121 \text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

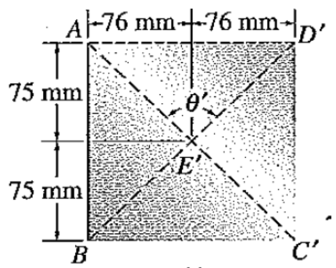
2.2. BIẾN DẠNG DÀI & BIẾN DẠNG GÓC

<u>Ví dụ 04:</u>

The plate shown in Fig. 8–34*a* is held in the rigid horizontal guides at its top and bottom, *AD* and *BC*. If its right side *CD* is given a uniform horizontal displacement of 2 mm, determine (*a*) the average normal strain along the diagonal *AC*, and (*b*) the shear strain at *E* relative to the *x*, *y* axes.



(a)



(b)

Part (a). When the plate is deformed, the diagonal *AC* becomes *AC'*, Fig. 8–34*b*. The length of diagonals *AC* and *AC'* can be found from the Pythagorean theorem. We have

$$AC = \sqrt{(0.150)^2 + (0.150)^2} = 0.21213 \text{ m}$$
$$AC' = \sqrt{(0.150)^2 + (0.152)^2} = 0.21355 \text{ m}$$

Therefore the average normal strain along the diagonal is

$$(\epsilon_{AC})_{avg} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{0.21355 \text{ m} - 0.21213 \text{ m}}{0.21213 \text{ m}}$$
$$= 0.00669 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Ans.}$$

Part (b). To find the shear strain at *E* relative to the *x* and *y* axes, it is first necessary to find the angle θ', which specifies the angle between these axes after deformation, Fig. 8–34*b*. We have

$$\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{76 \text{ mm}}{75 \text{ mm}}$$
$$\theta' = 90.759° = \frac{\pi}{180°}(90.759°) = 1.58404 \text{ rad}$$

Applying Eq. 8–13, the shear strain at *E* is therefore

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 1.58404 \text{ rad} = -0.0132 \text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

According to the sign convention, the *negative sign* indicates that the angle θ' is *greater than* 90°. Note that if the *x* and *y* axes were horizontal and vertical, then due to the deformation $\gamma_{xy} = 0$ at point *E*.