

Môn học

CƠ HỌC ỨNG DỤNG

Chương V

Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang

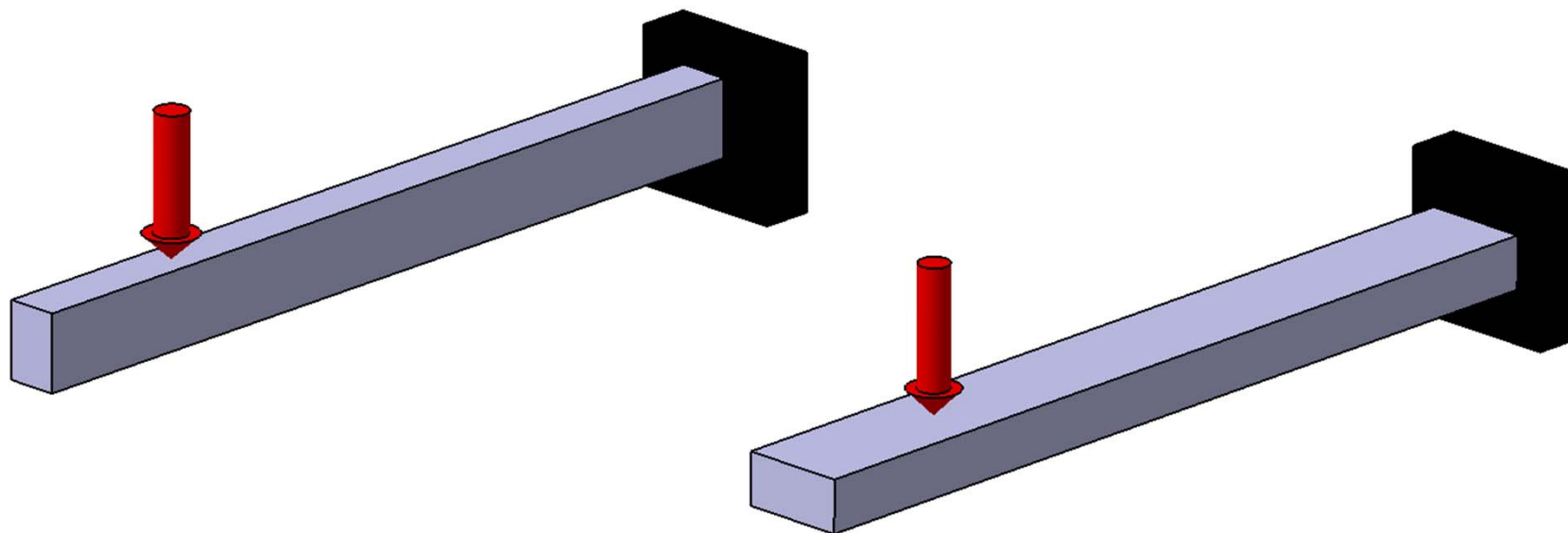
GV: ThS. Nguyễn Thanh Nhã

Bộ môn Cơ Kỹ Thuật – Khoa Khoa Học Ứng Dụng – 106B4

ĐT: 08.38660568 – 0908568181

Email: thanhhanguyendem@gmail.com

5.1. Khái niệm chung



Trường hợp nào chịu tải tốt hơn?

Sức chịu đựng của 1 thanh không chỉ tùy thuộc vào vật liệu mà còn tùy thuộc vào hình dạng của mặt cắt ngang, cũng như phương của tải trọng đối với mặt cắt ngang.

→ **Khảo sát những đặc trưng hình học chính của mặt cắt ngang**

5.2. Moment tĩnh

5.2.1. Moment tĩnh đối với một trục

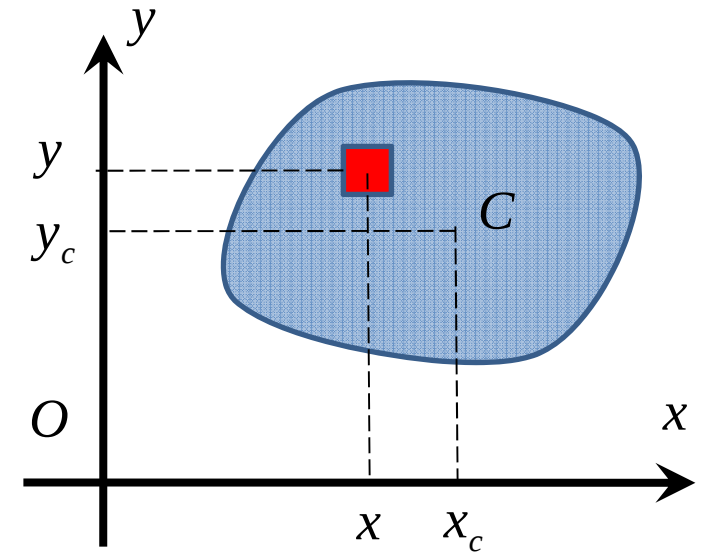
$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF$$

S_x, S_y : Moment tĩnh của diện tích mặt cắt ngang đối với trục x, y

Khi moment tĩnh của diện tích đối với 1 trục bằng 0 thì trục đó gọi là trục **trung tâm**.

Giao điểm của 2 trục trung tâm gọi là **trọng tâm** của mặt cắt

Tọa độ trọng tâm mặt cắt: $x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}$

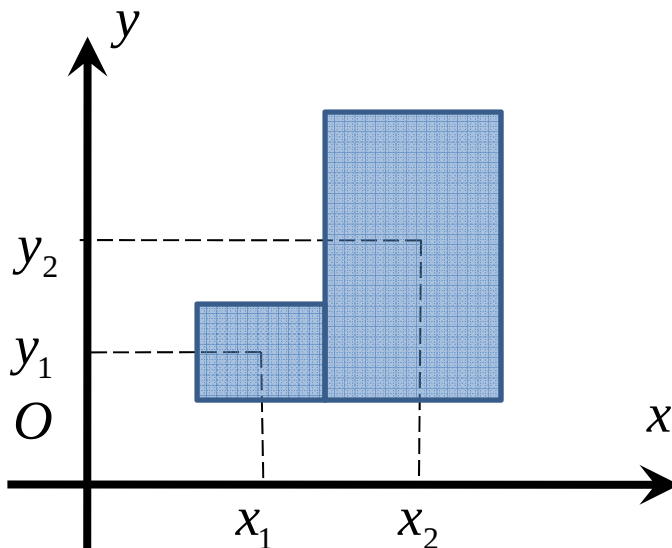


5.2. Moment tĩnh

5.2.2. Moment tĩnh của các hình phức tạp

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i$$



$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

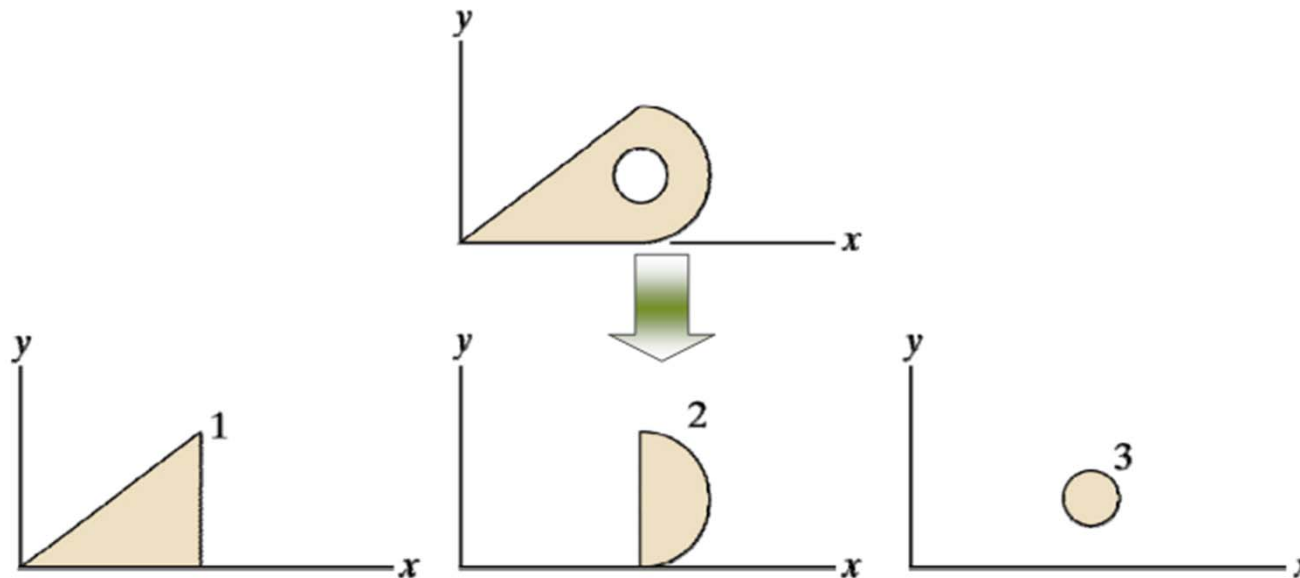
$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

5.2. Moment tĩnh

5.2.2. Moment tĩnh của các hình phức tạp

Chú ý:

- Chọn hệ trục tọa độ ban đầu hợp lý: nếu hình có trục đối xứng thì chọn trục đối xứng làm một trục của hệ trục tọa độ ban đầu, trục còn lại đi qua trọng tâm của càng nhiều hình đơn giản càng tốt.
- Nếu hình bị khoét thì diện tích phần bị khoét mang giá trị âm.

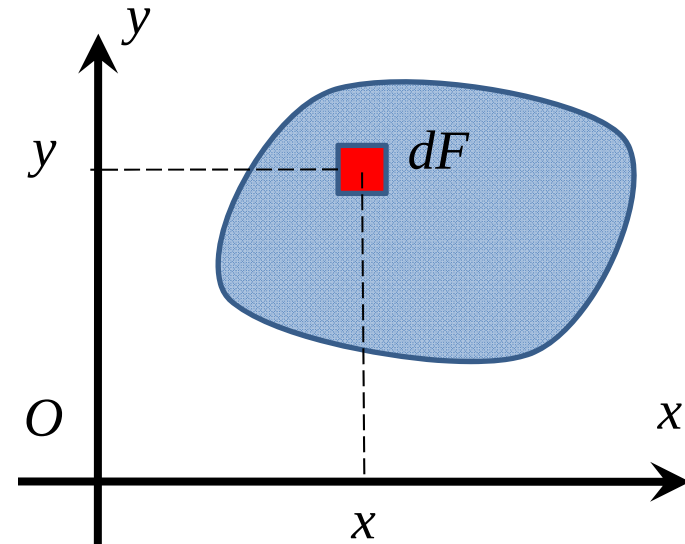


5.3. Moment quán tính của mặt cắt ngang

5.3.1. Moment quán tính đối với 1 trục

$$J_x = \int_F y^2 dF \geq 0$$

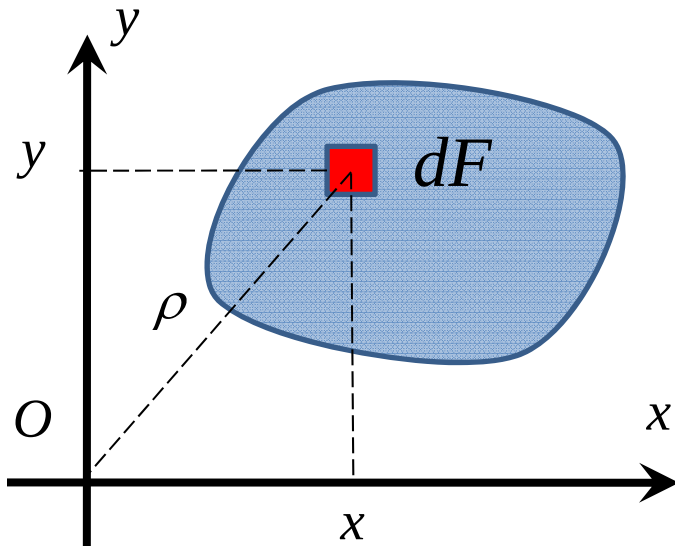
$$J_y = \int_F x^2 dF \geq 0$$



Thứ nguyên của moment quán tính là **[chiều dài]⁴**, giá trị không âm.

5.3. Moment quán tính của mặt cắt ngang

5.3.2. Moment quán tính độ cực



$$J_P = \int_F \rho^2 dF \geq 0$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow J_P = J_x + J_y$$

Thứ nguyên của moment quán tính độ cực là **[chiều dài]⁴**, giá trị không âm.

5.3. Moment quán tính của mặt cắt ngang

5.3.3. Moment quán tính ly tâm đối với hệ trục (x,y)

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$

Thứ nguyên của moment quán tính ly tâm là **[chiều dài]⁴**, giá trị có thể dương, âm hoặc bằng không.

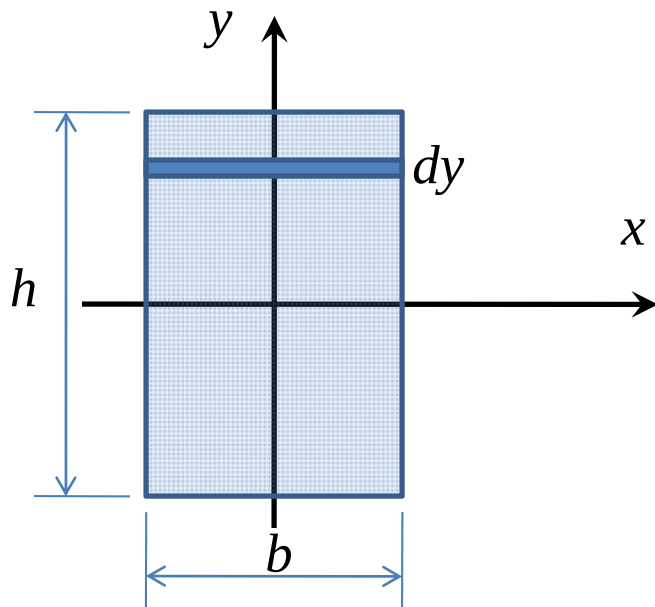
Khi moment quán tính ly tâm đối với 1 trục nào đó bằng 0 thì hệ trục đó gọi là **hệ trục quán tính chính**. Nếu hệ trục quán tính chính đi qua **trọng tâm** mặt cắt thì được gọi là **hệ trục quán tính chính trung tâm**.

Tại bất kỳ điểm nào trên mặt phẳng của mặt cắt ta cũng có thể xác định được một hệ trục quán tính chính.

Nếu mặt cắt có một trục đối xứng thì bất kỳ trục nào vuông góc với trục đối xứng đó cũng lập với nó thành một hệ trục quán tính chính

5.4. Moment quán tính một số hình đơn giản

5.4.1. Moment quán tính hình chữ nhật

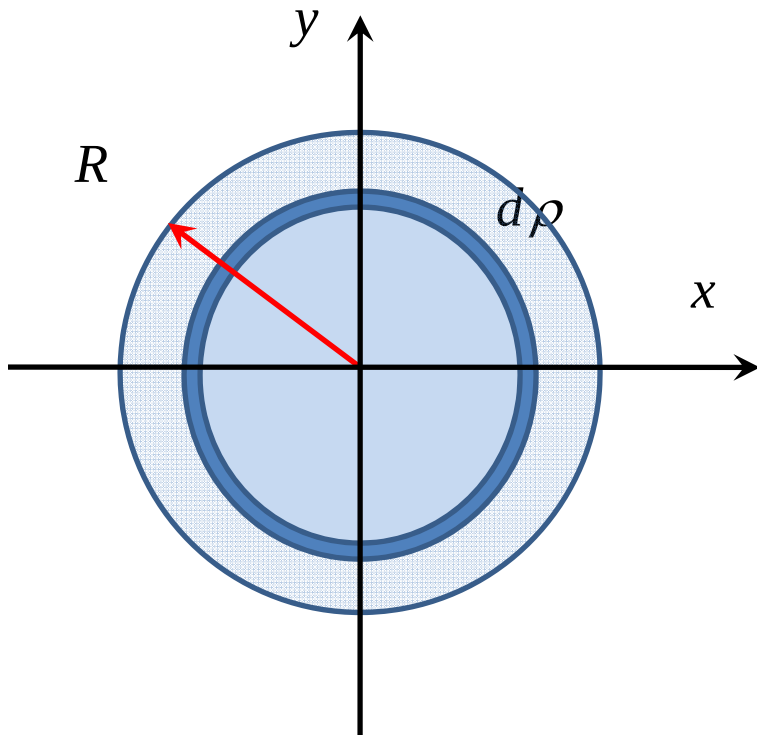


$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{b^3 h}{12}$$

5.4. Moment quán tính một số hình đơn giản

5.4.2. Moment quán tính hình tròn



$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$$

$$\Rightarrow J_x = J_y = 0,05D^4$$

$$dF = 2\pi\rho d\rho$$

$$J_P = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}$$

Do tính chất đối xứng, ta có:

$$J_x = J_y$$

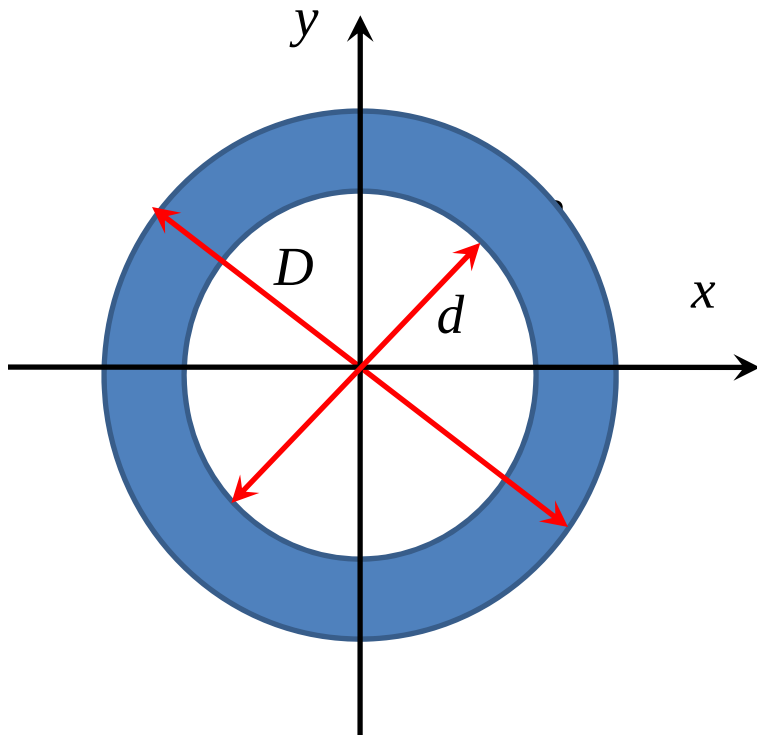
$$\Rightarrow J_P = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$$

$$\Rightarrow J_x = J_y = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Với D là đường kính

5.4. Moment quán tính một số hình đơn giản

5.4.3. Moment quán tính hình vành khăn

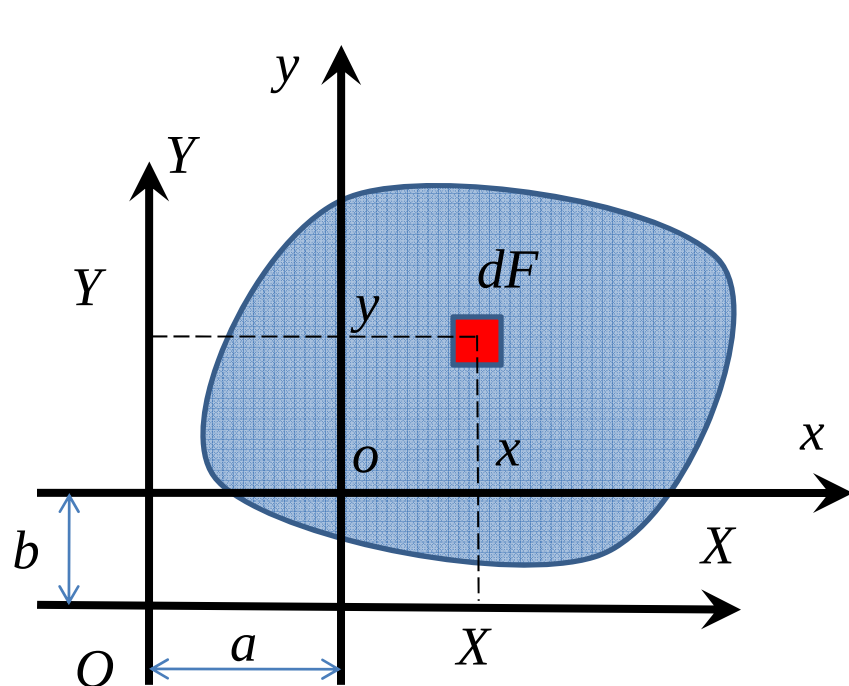


$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \eta^4)$$

$$\Rightarrow J_x = J_y = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4)$$
$$= 0,05 D^4 (1 - \eta^4)$$

$$\text{Với } \eta = \frac{d}{D}$$

5.5. Moment quán tính đối với hệ trục song song



$$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_X = \int_F Y^2 dF = \int_F (y + b)^2 dF \\ J_Y = \int_F X^2 dF = \int_F (x + a)^2 dF \\ J_{XY} = \int_F XY dF = \int_F (x + a)(y + b) dF \end{cases}$$

Khai triển, ta được:

$$\begin{cases} J_X = J_x + b^2 F + 2bS_x \\ J_Y = J_y + a^2 F + 2aS_y \\ J_{XY} = J_{xy} + abF + aS_x + bS_y \end{cases}$$

Khi Oxy là hệ trục trung tâm, ta có: $S_x = S_y = 0$

$$\begin{cases} J_X = J_x + b^2 F \\ J_Y = J_y + a^2 F \\ J_{XY} = J_{xy} + abF \end{cases}$$

5.6. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho mặt cắt ngang có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Xác định các **moment quán tính chính trung tâm** của mặt cắt.

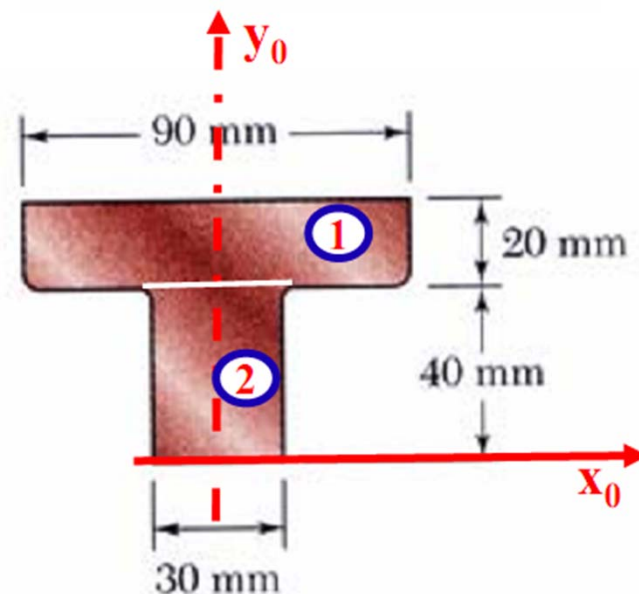
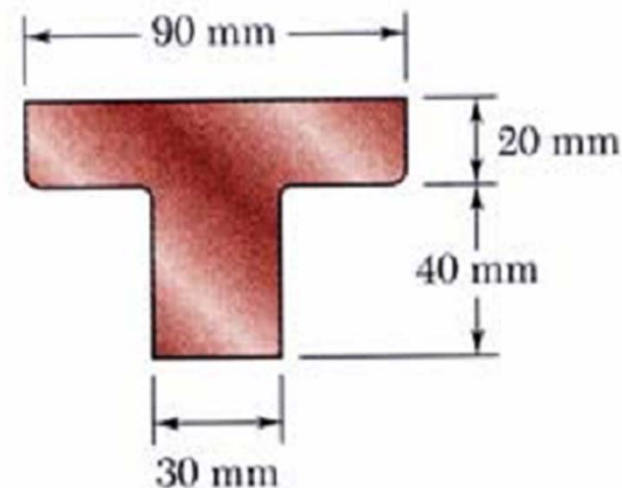
Giải: Chọn hệ trục tọa độ ban đầu x_0y_0 như hình vẽ. Chia mặt cắt ngang làm hai hình đơn giản ① và ②

1. Xác định tọa độ trọng tâm, ta có:

- $x_C = 0$ (y_0 - trục đối xứng)

$$y_{C1} = 50 \text{ mm}; \quad y_{C2} = 20 \text{ mm}$$

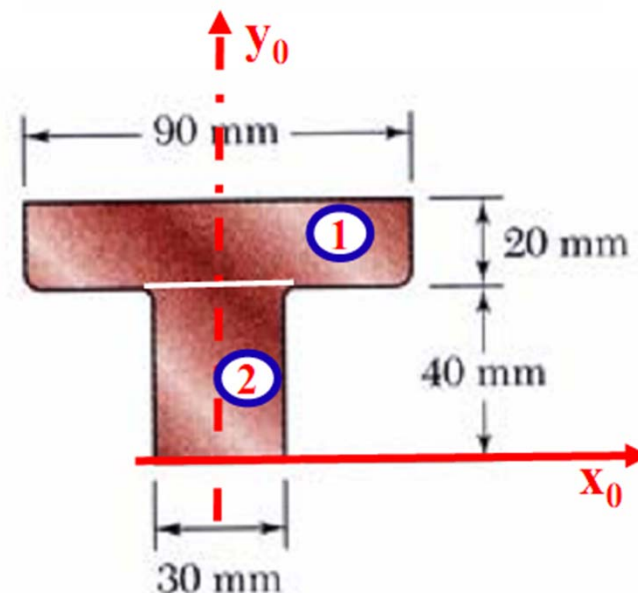
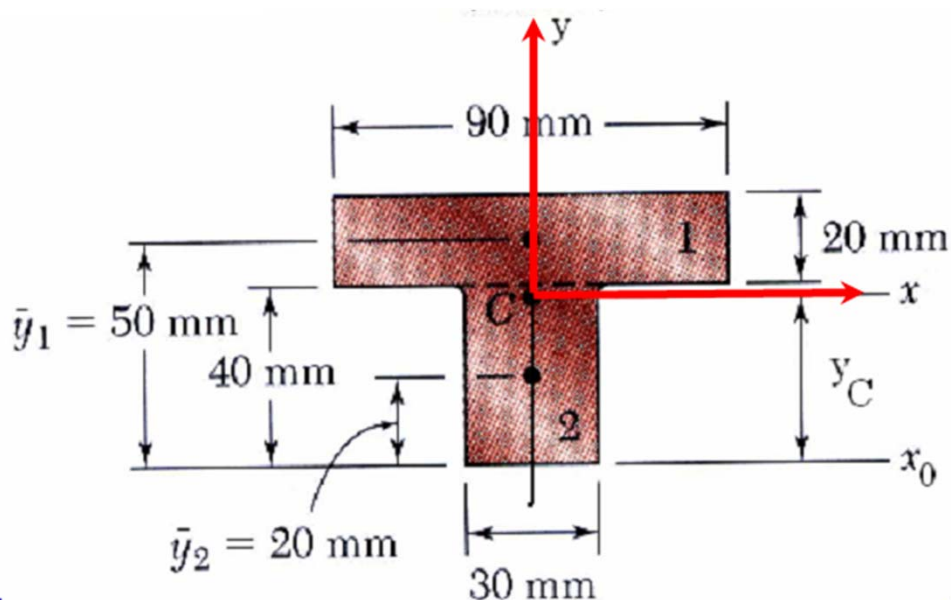
$$y_C = \frac{\sum y_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{C1} A_1 + y_{C2} A_2}{A_1 + A_2} = 38 \text{ mm}$$



5.6. Một số ví dụ

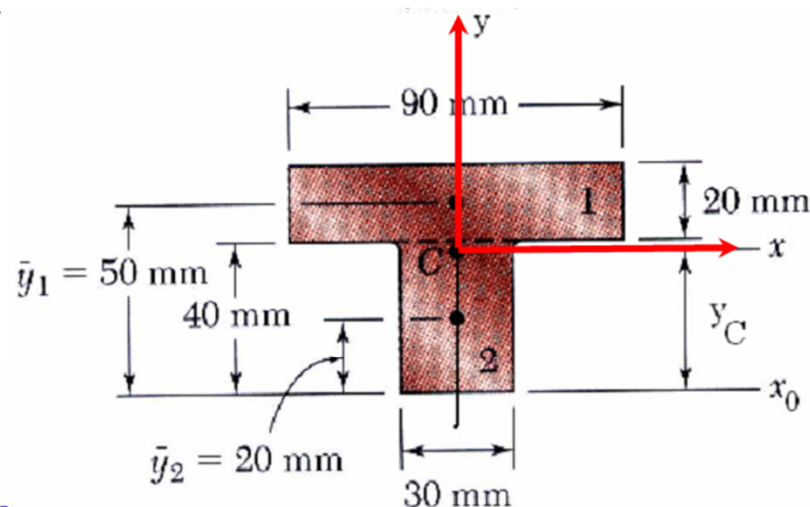
Ví dụ 1: Cho mặt cắt ngang có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Xác định các **moment quán tính chính trung tâm** của mặt cắt.

- Dựng hệ trục quán tính chính trung tâm Cxy



5.6. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho mặt cắt ngang có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Xác định các **moment quán tính chính trung tâm** của mặt cắt.



- Các mô men quán tính chính trung tâm:

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^1 + I_x^2 = \left(\frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 a_1^2 \right) + \left(\frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 a_2^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{12} 90 \times 20^3 + 1800 \times 12^2 \right) + \left(\frac{1}{12} 30 \times 40^3 + 1200 \times 18^2 \right) \end{aligned}$$

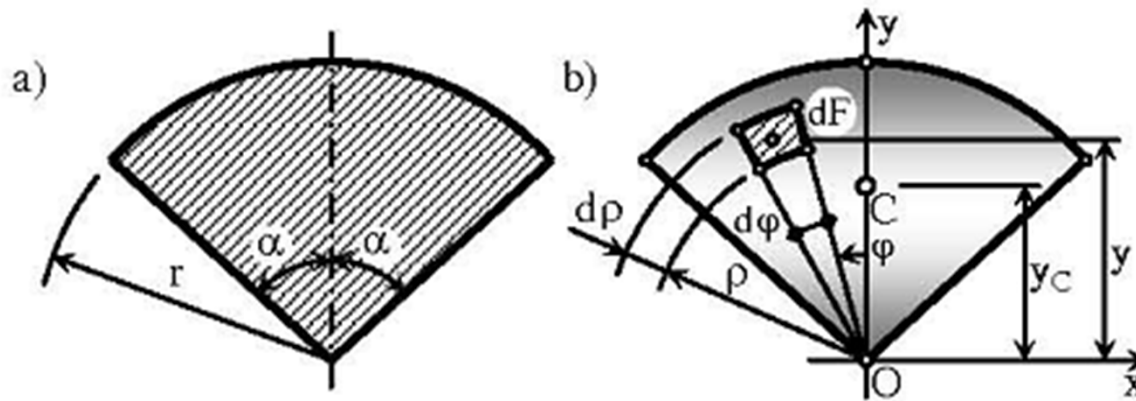
$$I_x = 868 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned} I_y &= I_y^1 + I_y^2 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + \frac{1}{12} h_2 b_2^3 \\ &= \left(\frac{1}{12} 20 \times 90^3 \right) + \left(\frac{1}{12} 40 \times 30^3 \right) \end{aligned}$$

$$I_y = 1305 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 1305 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

5.6. Một số ví dụ

Ví dụ 2: Xác định **tọa độ trọng tâm** mặt cắt như hình vẽ



Xét vi phân diện tích dF

$$dF = \rho d\varphi d\rho; y = \rho \cos \varphi$$

Moment tĩnh:

$$S_x = \int_F y dF = 2 \int_0^r \int_0^\alpha \rho \cos \varphi \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

Suy ra

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin \alpha}{r^2 \alpha} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$