

Chương VI

Tính bền thanh khi ứng suất không đổi

Nguyễn Thanh Nhã

Bộ môn Cơ Kỹ Thuật – Khoa Khoa Học Ứng Dụng – 106B4

ĐT: 08.38660568 – 0908568181

Email: thanhnhanguyendem@gmail.com

6.1. Khái niệm

6.1.1. Khái niệm

- Là tính toán thanh đảm bảo điều kiện bền.
- Tính mức độ chịu lực thanh sao cho không bị phá vỡ khi làm việc

$$\max |\sigma| \leq [\sigma]; \quad \max |\tau| \leq [\tau]$$

Trong chương này chỉ xét ứng suất là **hằng số** (không thay đổi theo thời gian, nhiệt độ, sự hoạt động của chi tiết máy...)

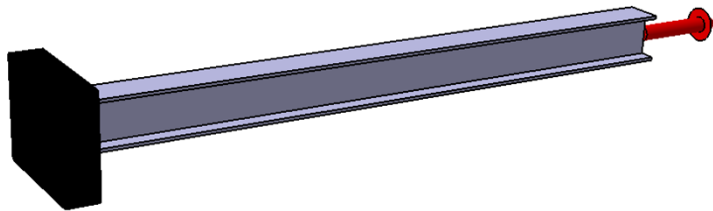
6.1. Khái niệm

6.1.2. Phân loại các trường hợp chịu lực của thanh

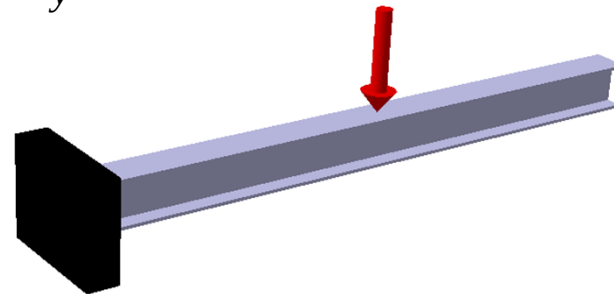
a. Trường hợp chịu lực đơn giản

Khi trên mặt cắt của thanh chỉ có **một** thành phần **nội lực**

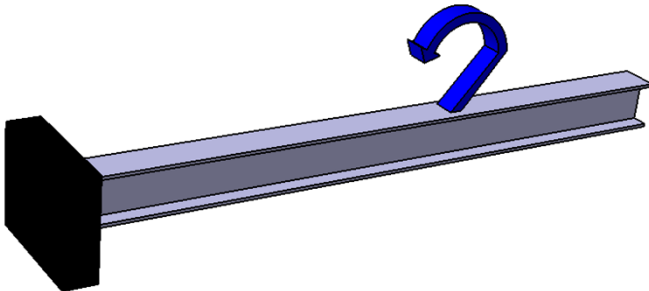
1. N_z (lực dọc trục): thanh chịu kéo nén đúng tâm



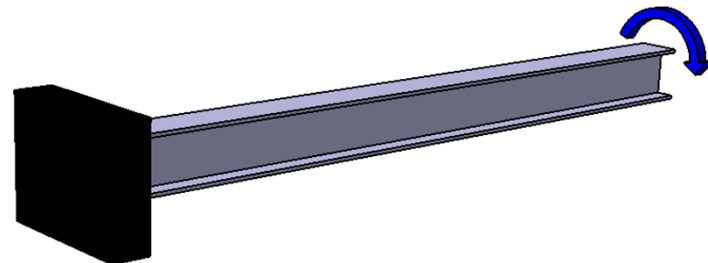
2. Q_y (lực cắt): thanh chịu cắt



3. M_x (moment uốn): thanh chịu uốn thuần túy



4. M_z (moment xoắn): thanh chịu xoắn thuần túy



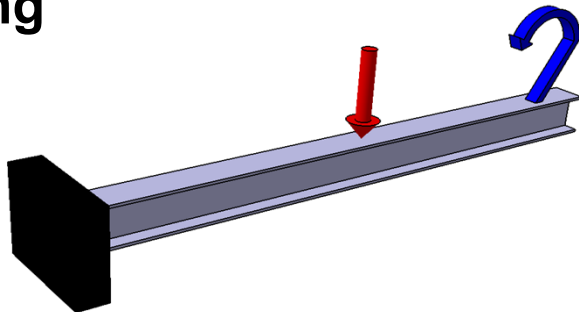
6.1. Khái niệm

6.1.2. Phân loại các trường hợp chịu lực của thanh

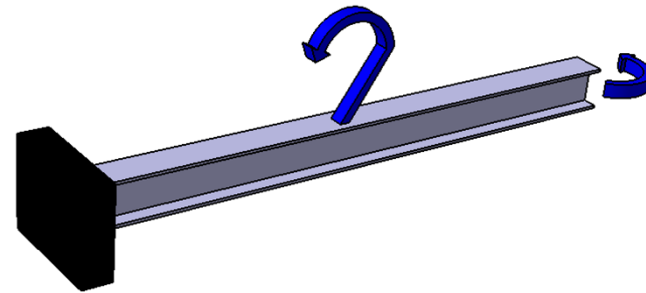
a. Trường hợp chịu lực phức tạp

Khi trên mặt cắt của thanh chỉ có từ **hai** thành phần nội lực trở lên

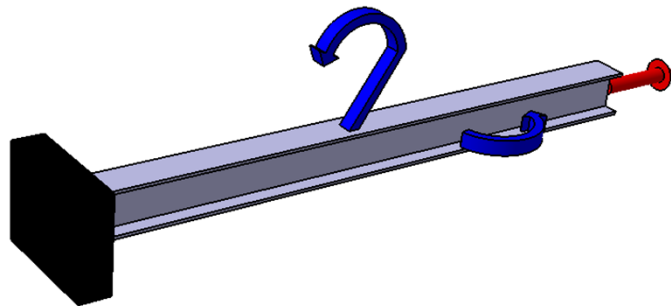
1. Q_y, M_x : thanh chịu uốn ngang phẳng



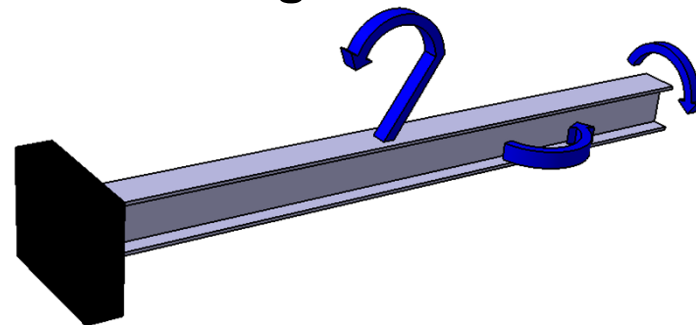
2. M_x, M_y : thanh chịu uốn xiên



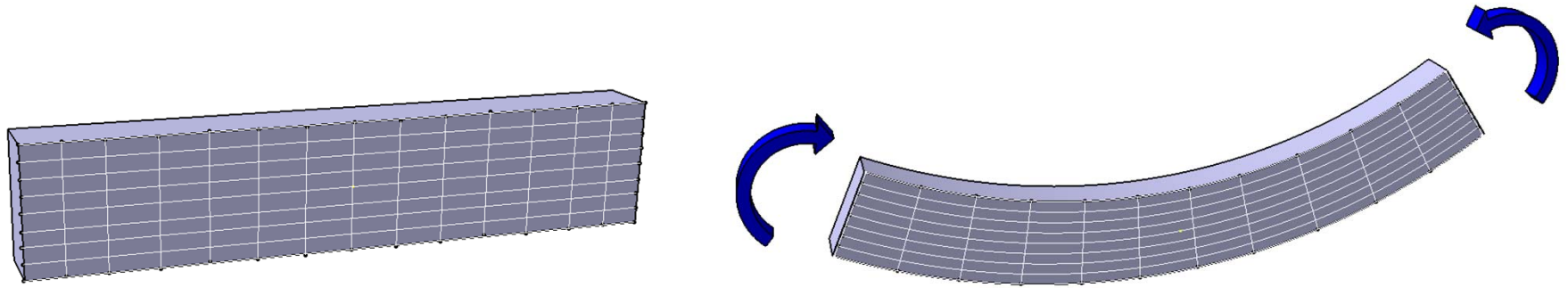
3. M_x, M_y, N_z : thanh chịu uốn và kéo nén đồng thời



4. M_x, M_y, M_z : thanh chịu uốn và xoắn đồng thời



6.2. Thiết lập công thức tính ứng suất pháp tổng quát



Hai giả thiết về mặt cắt ngang

Giả thiết về các thớ dọc:

Trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không xô đẩy lẫn nhau, tức là

$\sigma_x = \sigma_y = 0$, chỉ tồn tại σ_z theo phương song song trục thanh

Giả thiết về mặt cắt ngang:

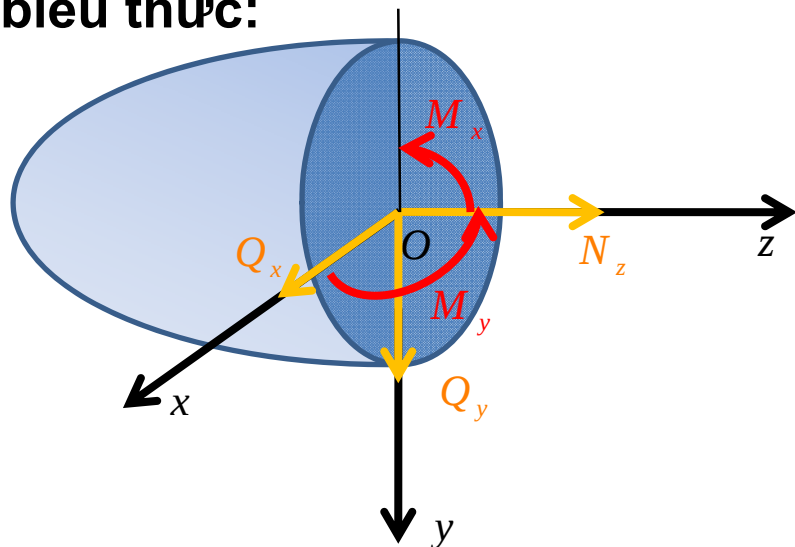
Trong quá trình biến dạng, các mặt cắt ngang luôn phẳng và vuông góc với trục thanh. Không có ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{xy} = 0$$

6.2. Thiết lập công thức tính ứng suất pháp tổng quát

Từ những giả thiết trên, có thể chứng minh rằng để thiết lập công thức tính ứng suất pháp tổng quát cho thanh, ta chỉ cần tính một ứng suất pháp σ_z theo phương song song trục thanh.

Giả sử xét 1 thanh chịu lực sao cho trên mặt cắt ngang của thanh có các thành phần nội lực N_z, M_x, M_y liên hệ vi phân với σ_z bằng các biểu thức:



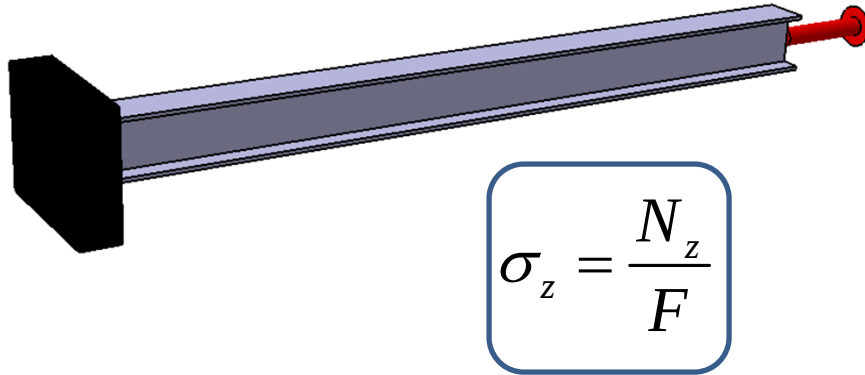
$$\begin{cases} N_z = \int_F \sigma_z dF \\ M_x = \int_F \sigma_z y dF \\ M_y = \int_F \sigma_z x dF \end{cases}$$

Từ định luật Hooke $\sigma_z = E \varepsilon_z$ ta chứng minh được công thức:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (*)$$

6.3. Tính bền khi thanh chịu kéo nén đúng tâm

Khi thanh chịu kéo nén đúng tâm, trên mặt cắt ngang chỉ có thành phần σ_z



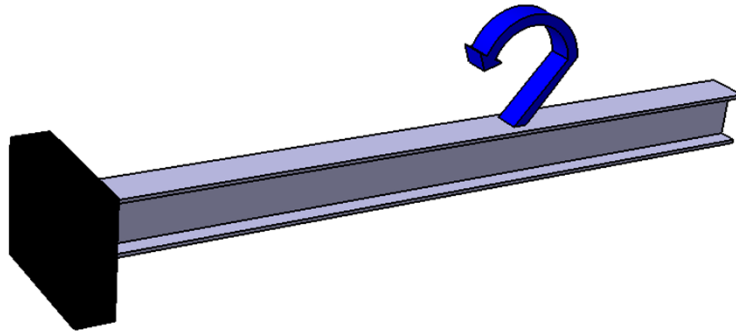
Ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt ngang của thanh

Điều kiện bền của thanh:

$$|\sigma_z|_{\max} = \max \left| \frac{N_z}{F} \right| \leq [\sigma]$$

6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy

Khi thanh chịu uốn thuần túy thì trên mặt cắt ngang **chỉ có thành phần moment uốn** M_x , nên công thức tính ứng suất pháp là



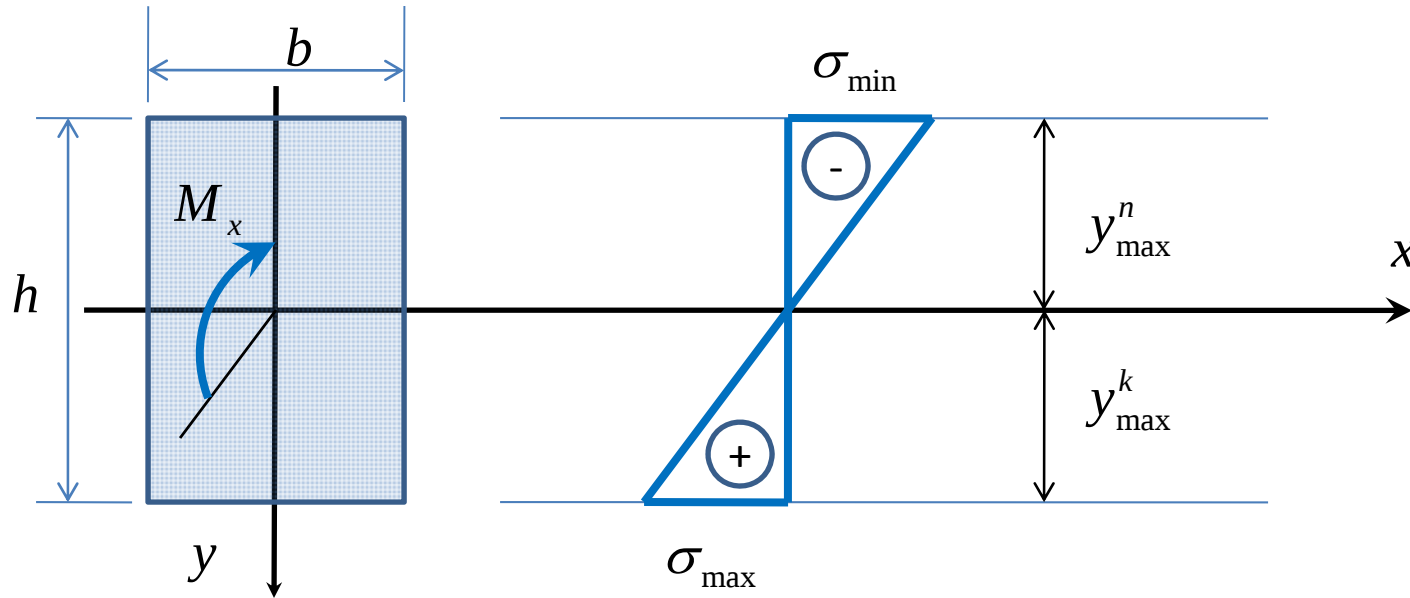
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

Ứng suất pháp là hàm phân bố bậc nhất theo phương y .

Những điểm nằm trên đường song song với trục x có cùng giá trị σ_z

Những điểm có $y = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0$, ta có lớp trung hòa, trên mặt cắt ngang là trục trung hòa x , chia mặt cắt ra thành 2 vùng bị kéo $\sigma_z > 0$ và bị nén $\sigma_z < 0$

6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy



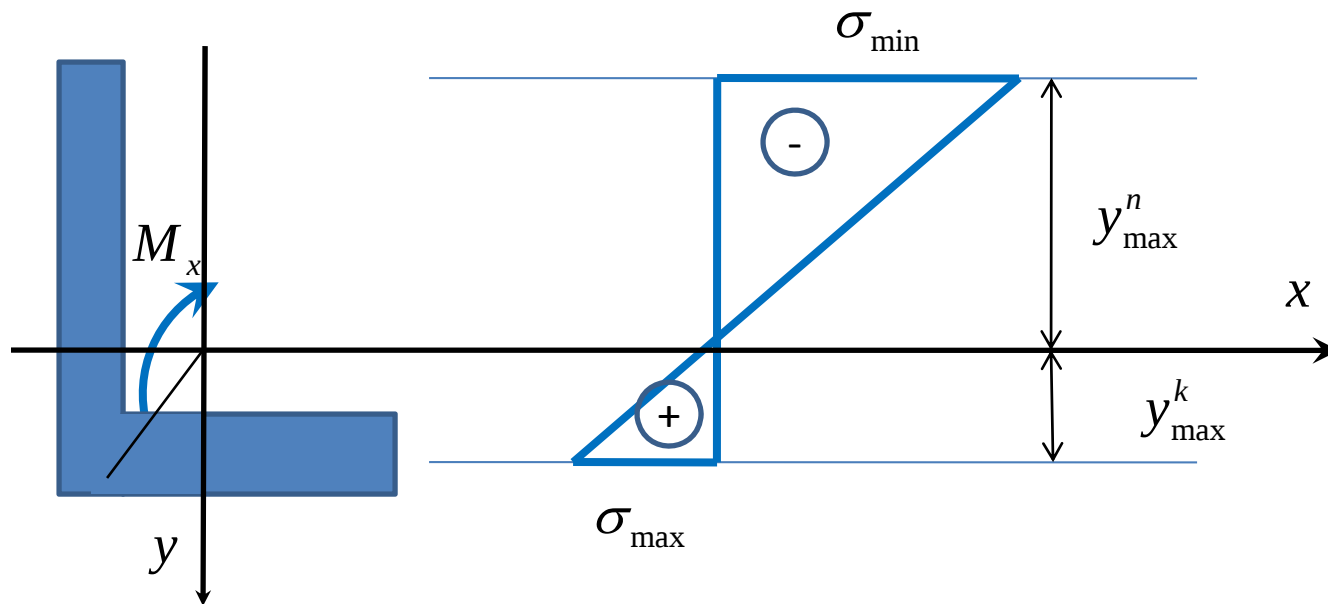
Tại lớp biên: ứng suất pháp đạt cực trị (min hoặc max)

Đối với những mặt cắt có trục trung hòa trùng với trục đối xứng (mặt cắt hình tròn, hcn, hình chữ I...):

$$y_{\max}^k = y_{\max}^n \Rightarrow |\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$$

Chương VI: Tính bền thanh khi ứng suất không đổi

6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy



Đối với những mặt cắt có trục trung hòa không trùng với trục đối xứng (mặt cắt hình L, hình chữ T...):

$$y_{\max}^k \neq y_{\max}^n \Rightarrow |\sigma_{\max}| \neq |\sigma_{\min}| \Rightarrow |\sigma_z|_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y|_{\max}$$

Đặt $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$ gọi là moment chống uốn của mặt cắt, đặc trưng cho khả năng chịu uốn của dầm.

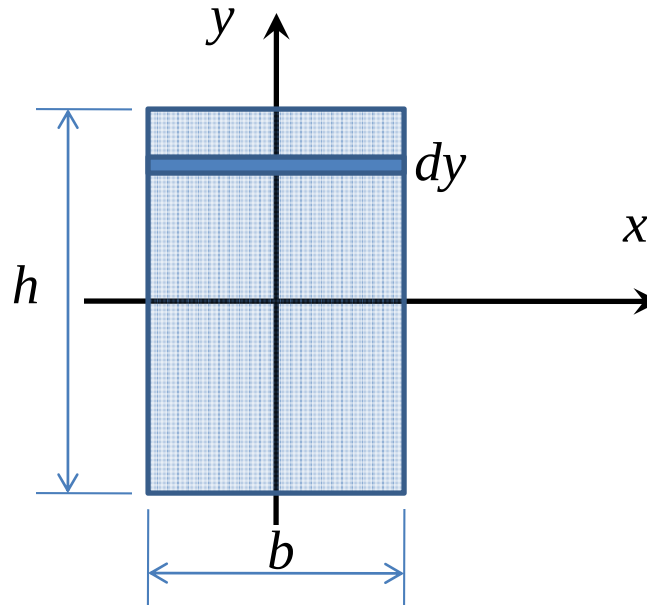
6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy

Moment chống uốn W_x của một số hình phẳng thường gặp

1. Mặt cắt hình chữ nhật

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$



$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2} \Rightarrow W_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$J_y = \int_F x^2 dF = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{b^3h}{12}; \quad x_{\max} = \frac{b}{2} \Rightarrow W_y = \frac{b^2h}{6}$$

6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy

Moment chống uốn W_x của một số hình phẳng thường gặp

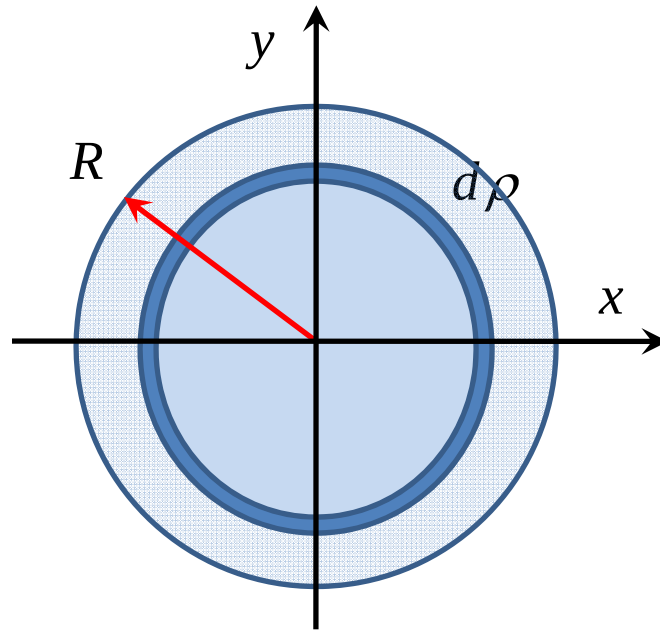
2. Mặt cắt hình tròn

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$

$$J_x = J_y = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$y_{\max} = R \Rightarrow W_x = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3$$



6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy

Moment chống uốn W_x của một số hình phẳng thường gặp

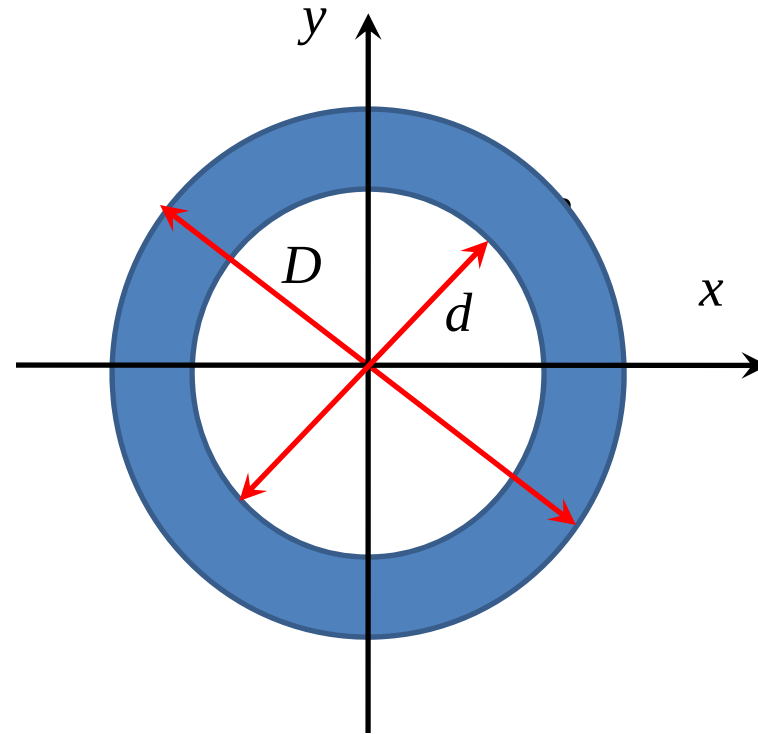
3. Mặt cắt hình vành khăn

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$

$$J_x = J_y = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \eta^4)$$

$$y_{\max} = R \Rightarrow W_x = 0,1D^3(1 - \eta^4)$$



6.4. Tính bền khi thanh chịu uốn thuần túy

Điều kiện bền tổng quát của thanh chịu uốn thuần túy

$$\max |\sigma| = \frac{|M_x|_{\max}}{J_x} |y_{\max}| = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

1. Thanh làm bằng vật liệu dẻo: $[\sigma] = [\sigma]_k = [\sigma]_n$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

2. Thanh làm bằng vật liệu giòn: $[\sigma]_k < [\sigma]_n$

Mặt cắt ngang có trục trung hòa trùng với trục đx $|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]_k$

Mặt cắt ngang có trục trung hòa khác trục đx $|\sigma_{\max}| \neq |\sigma_{\min}|$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{\max}^k \quad \sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} y_{\max}^n$$

$$\sigma_{\max}^k \leq [\sigma]_k; \quad \sigma_{\max}^n = |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$$

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Khi thanh chịu uốn ngang phẳng, trên mặt cắt ngang có hai thành phần nội lực M_x và Q_y , tạo ra ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

1. Tính ứng suất pháp:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

Ứng suất pháp là hàm phân bố bậc nhất theo phương y . *Tương tự như khi thanh chịu uốn thuần túy.*

2. Tính ứng suất tiếp:

$$\tau_{zy} = \frac{S_x(y).Q_y}{J_x.b(y)}$$

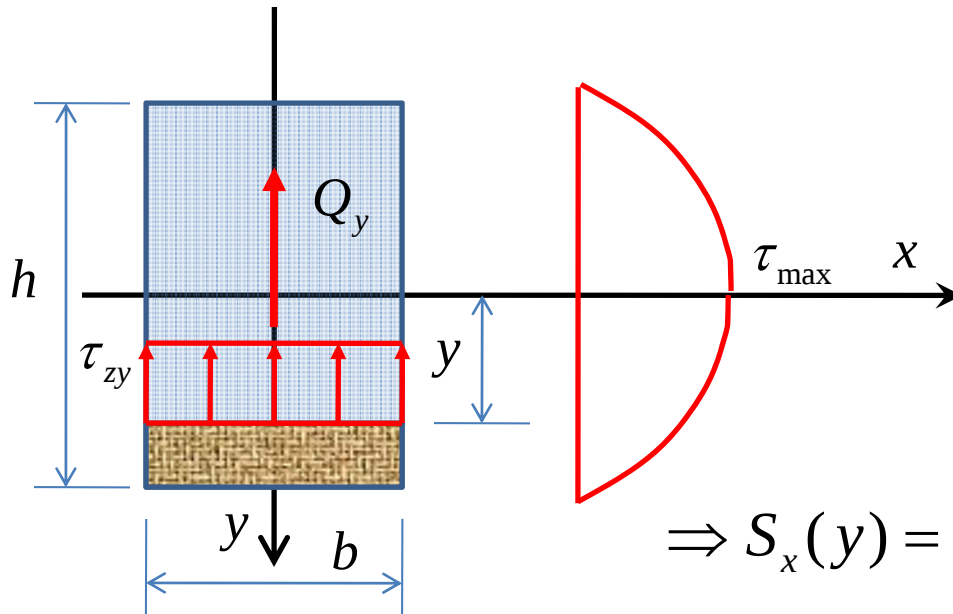
$S_x(y) = f(y)$: Moment tĩnh của phần diện tích tính từ điểm muốn tính ứng suất đối với trục trung hòa.

$b(y) = f(y)$: Chiều rộng của mặt cắt ngang đi qua điểm muốn tính ứng suất và song song với trục trung hòa.

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Công thức tính $\tau_{\max}$ cho một số mặt cắt thường gặp

1. Mặt cắt ngang là hình chữ nhật:



$$S_x = F_c y_c$$

$$F_c = b(h/2 - y)$$

$$y_c = y + \frac{h/2 - y}{2} = \frac{h/2 + y}{2}$$

$$\Rightarrow S_x(y) = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

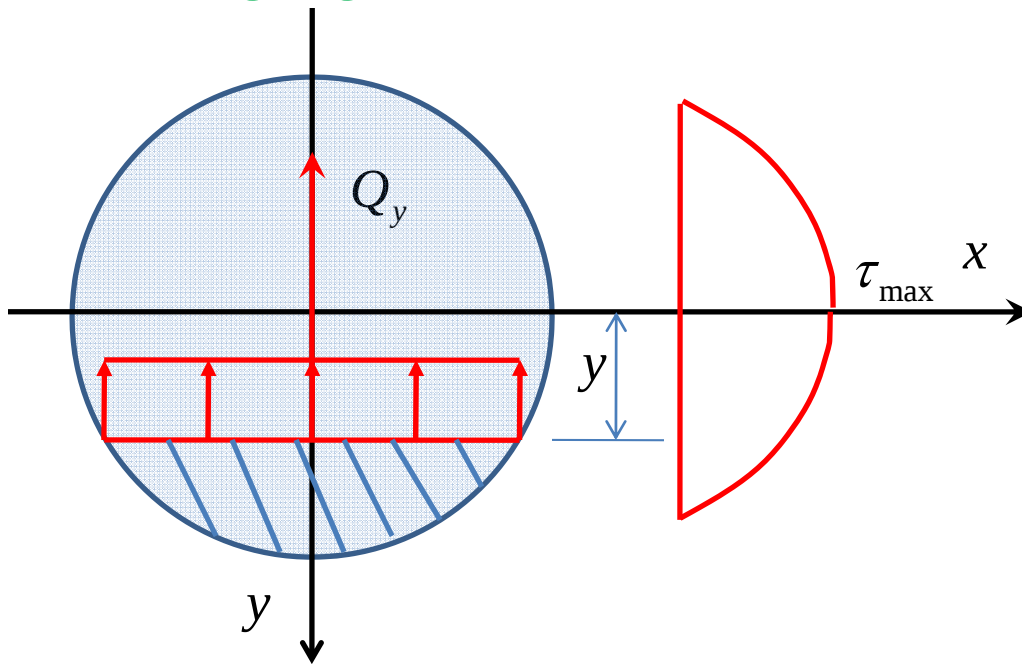
$$J_x = bh^3 / 12; \quad b(y) = b$$

Thay vào $\tau_{zy} = \frac{S_x(y) \cdot Q_y}{J_x \cdot b(y)} \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_y|_{\max}}{bh}$

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Công thức tính $\tau_{\max}$ cho một số mặt cắt thường gặp

2. Mặt cắt ngang là hình tròn:

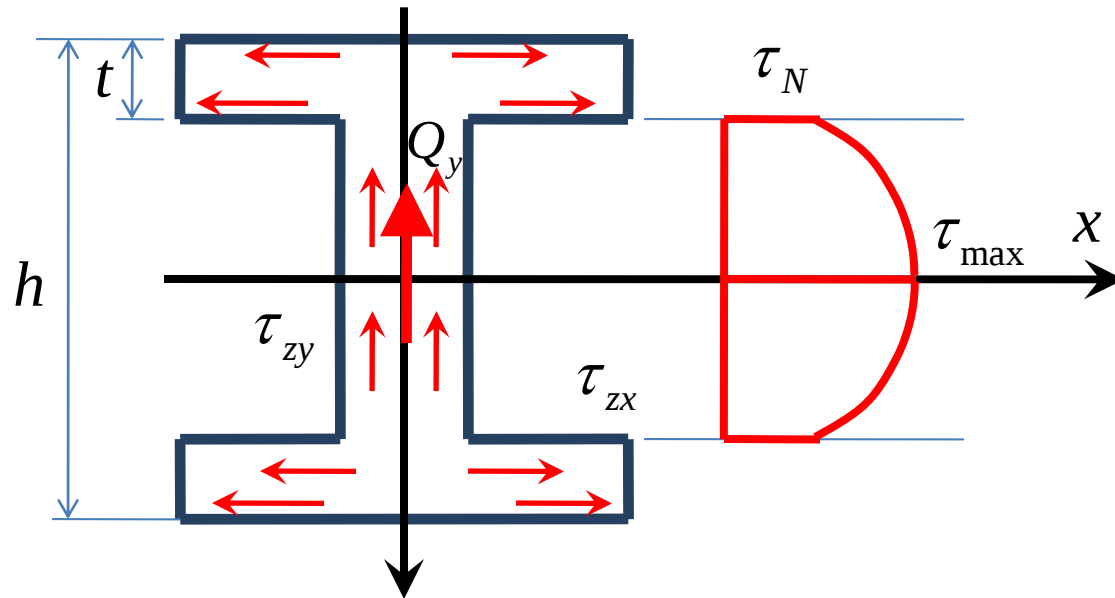


$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{3J_x} (R^2 - y^2) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{|Q_y|_{\max}}{\pi R^2}$$

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Công thức tính $\tau_{\max}$ cho một số mặt cắt thường gặp

3. Mặt cắt ngang định hình:



$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x \cdot d}$$

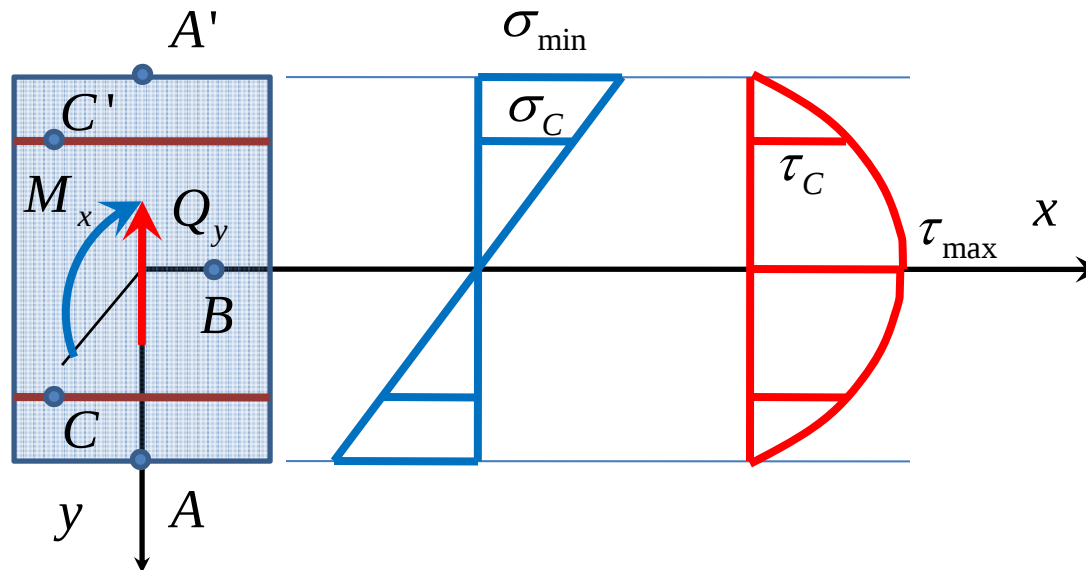
$$\tau_N = \frac{Q_y \cdot S_x^D}{J_x \cdot d}$$

$$S_x^D = S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \quad \rightarrow \quad \text{Moment tĩnh của phần đế đối với trục x}$$

Ứng suất tiếp τ_{zx} phân bố trên phần đế theo quy luật bậc nhất nhưng giá trị thường rất nhỏ so với τ_{zy} nên có thể bỏ qua.

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Trạng thái ứng suất và cách tính bền



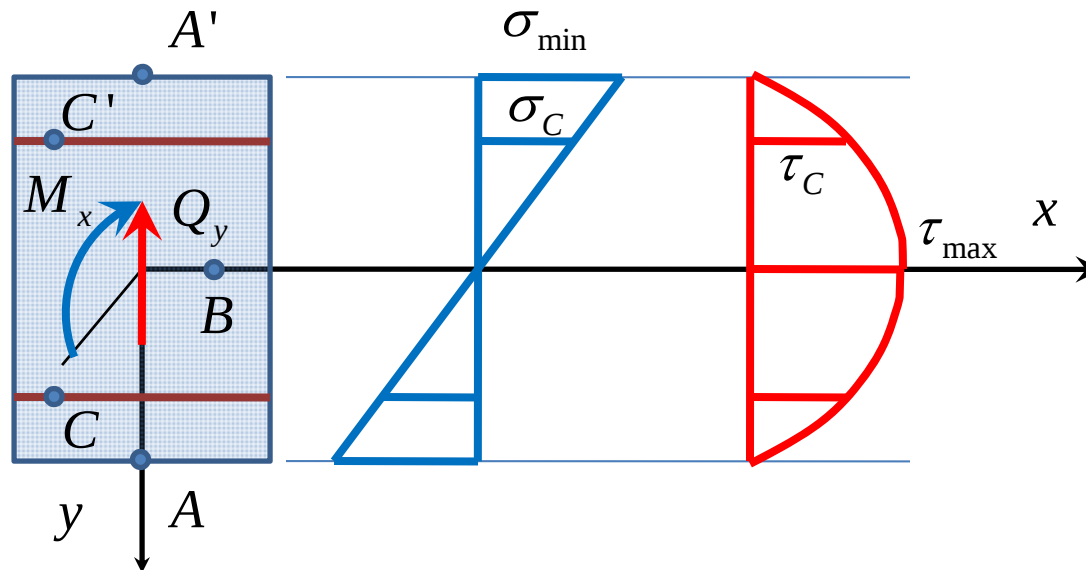
1. Lớp biên (A, A')

Ứng suất pháp đạt cực trị, ứng suất tiếp bằng 0 → **Trạng thái U'S đơn**

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Trạng thái ứng suất và cách tính bền



2. Lớp trung hòa (B)

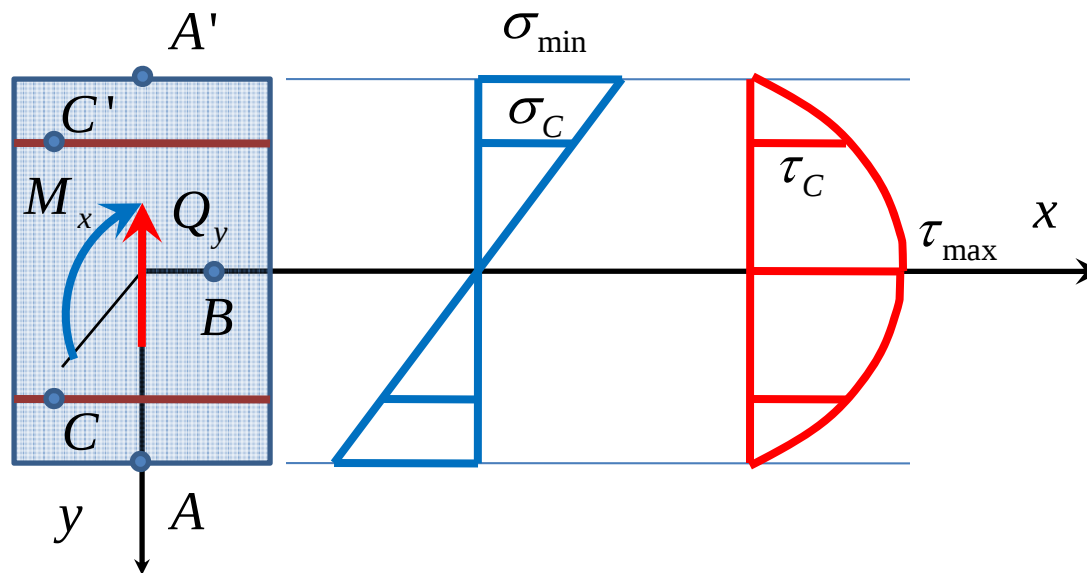
ƯS tiếp đạt cực trị, ƯS pháp bằng 0 $\rightarrow$ **Trạng thái ƯS trượt thuần túy**

$$|\tau|_{\max} \leq [\tau]$$

- Thuyết bền ƯS tiếp lớn nhất (TB3) $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$
- Thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (TB4) $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

6.5. Tính bền khi thanh chịu uốn ngang phẳng

Trạng thái ứng suất và cách tính bền



3. Lớp trung gian (C, C')

Có cả U'S pháp và U'S tiếp $\rightarrow$ **Trạng thái U'S phẳng đặc biệt**

- Thuyết bền U'S tiếp lớn nhất

$$\sigma_{td_max} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4\tau_C^2} \leq [\sigma]$$

- Thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng

$$\sigma_{td_max} = \sqrt{\sigma_C^2 + 3\tau_C^2} \leq [\sigma]$$

Ba dạng bài toán tính bền

1. Bài toán kiểm tra bền

- Kiểm tra lớp biên trước
- Kiểm tra lớp trung hòa
- Kiểm tra lớp trung gian (nếu là mặt cắt định hình I, T, L, U...)

2. Bài toán xác định kích thước mặt cắt ngang

- Dựa vào lớp biên để tính sơ bộ kích thước mặt cắt ngang
- Kiểm tra bền lớp trung hòa
- Kiểm tra lớp trung gian (nếu là mặt cắt định hình I, T, L, U...)

3. Bài toán xác định tải trọng cho phép

Tương tự dạng 2

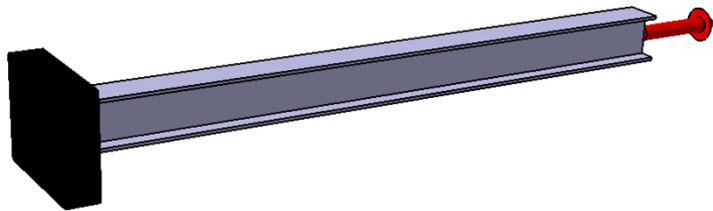
Tính bền thanh khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

Một số trường hợp chịu lực của thanh

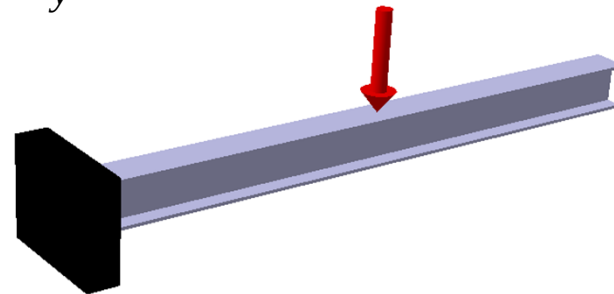
a. Trường hợp chịu lực đơn giản

Khi trên mặt cắt của thanh chỉ có **một** thành phần **nội lực**

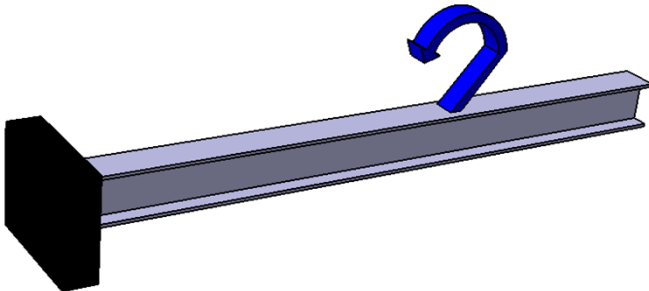
1. N_z (lực dọc trục): thanh chịu kéo nén đúng tâm



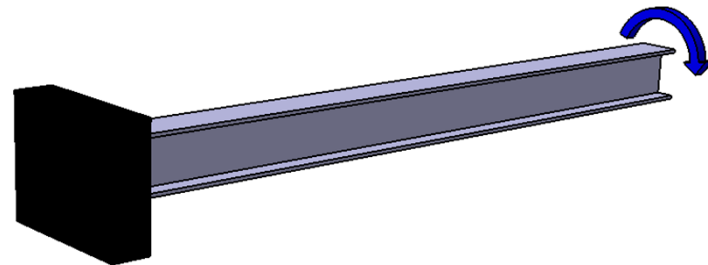
2. Q_y (lực cắt): thanh chịu cắt



3. M_x (moment uốn): thanh chịu uốn thuần túy



4. M_z (moment xoắn): thanh chịu xoắn thuần túy

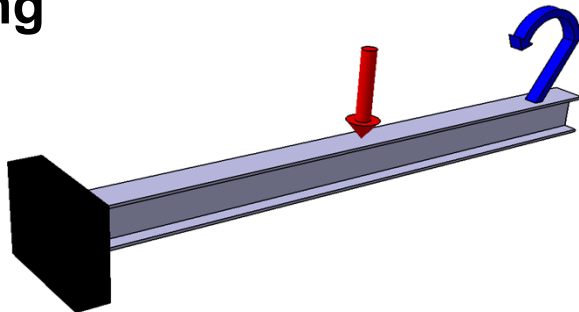


Một số trường hợp chịu lực của thanh

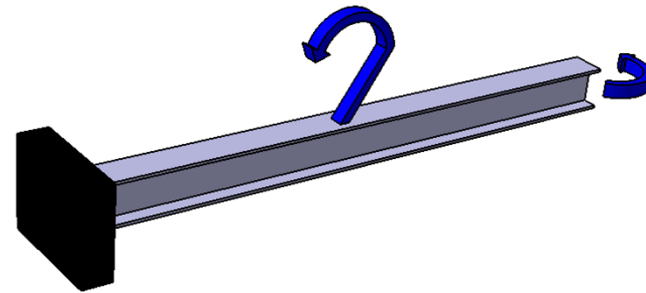
b. Trường hợp chịu lực phức tạp

Khi trên mặt cắt của thanh chỉ có từ **hai** thành phần nội lực trở lên

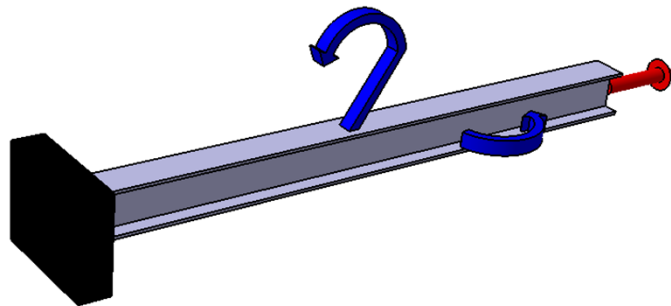
1. Q_y, M_x : thanh chịu uốn ngang phẳng



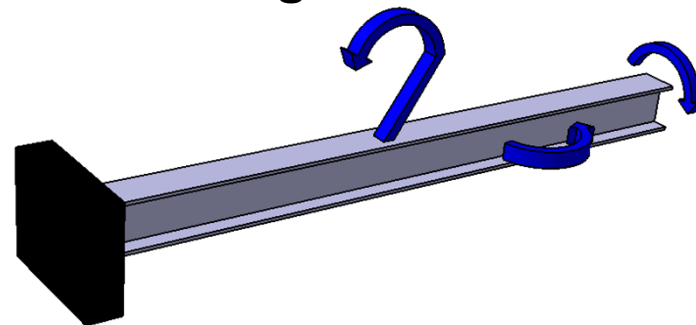
2. M_x, M_y : thanh chịu uốn xiên



3. M_x, M_y, N_z : thanh chịu uốn và kéo nén đồng thời

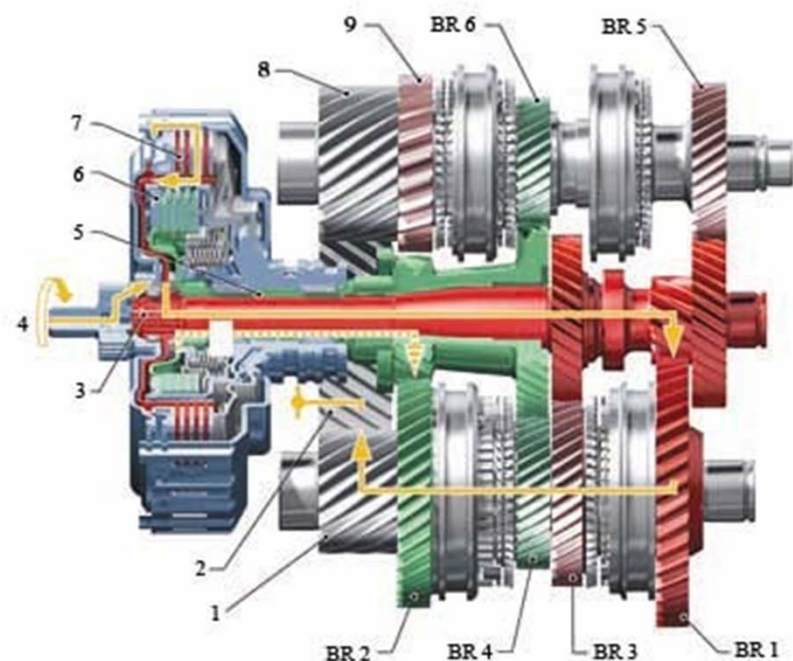
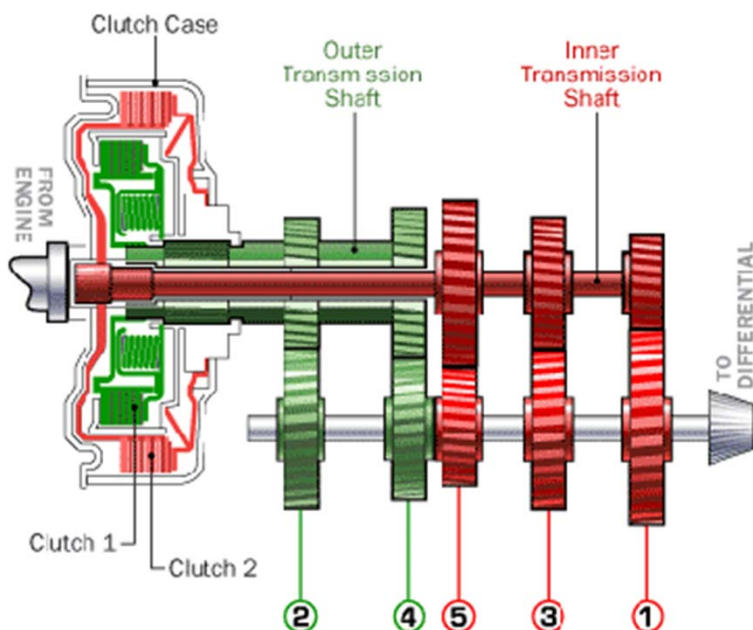


4. M_x, M_y, M_z : thanh chịu uốn và xoắn đồng thời



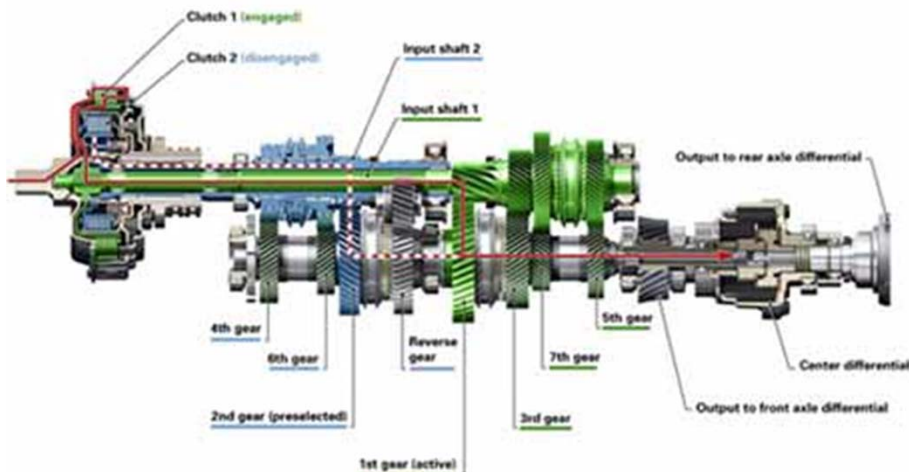
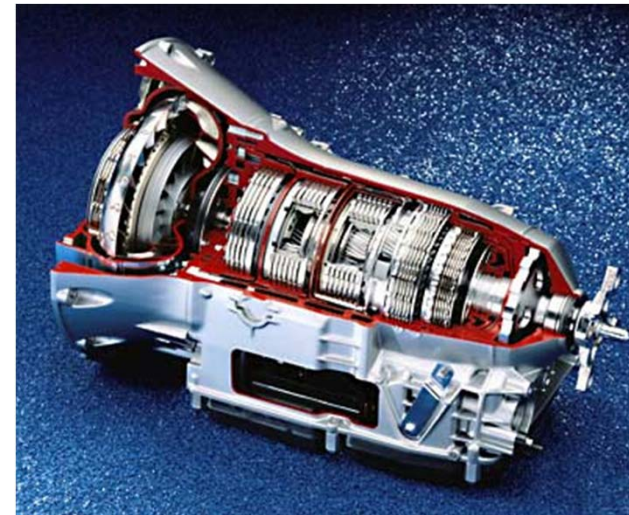
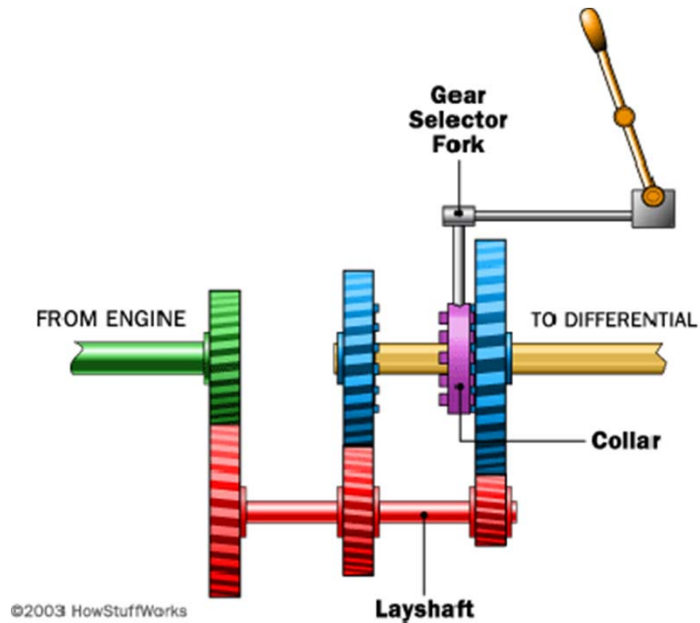
6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

- Thanh chịu uốn và xoắn đồng thời thường xảy ra ở các trục quay của máy.
- Trên thanh thường có lắp các chi tiết bánh răng, ổ đỡ, ổ đỡ chặn.
- Tiết diện trục thường là **hình tròn** hay hình **vành khăn**.



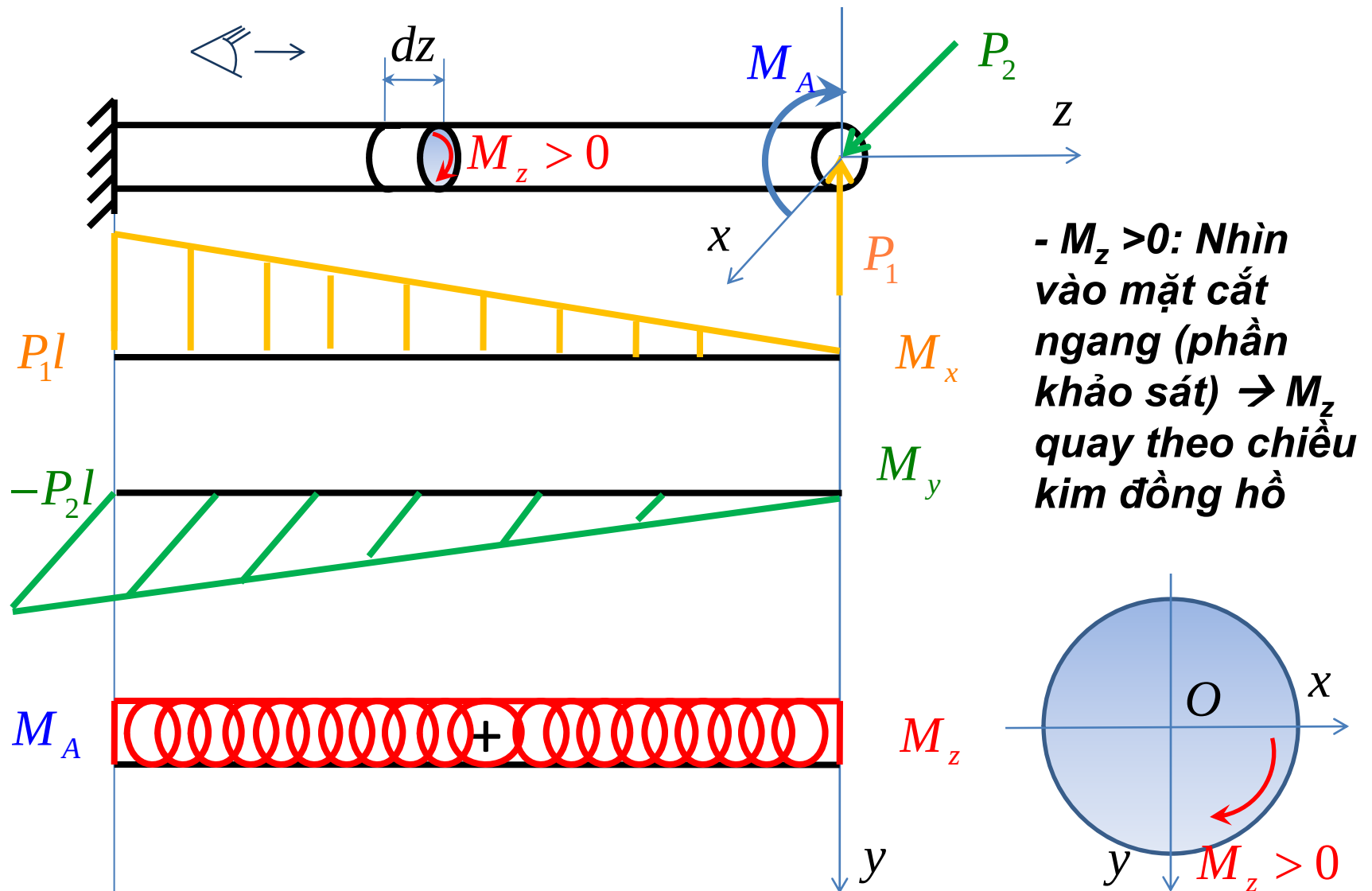
Chương VI: Tính bền thanh khi ứng suất không đổi

6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời



6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

1. Thiết lập công thức tính ứng suất tiếp cho thanh chịu xoắn



6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

1. Thiết lập công thức tính ứng suất tiếp cho thanh chịu xoắn

$$\sum M_{Oz} = M_z - M_A = 0 \Rightarrow M_z = M_A$$

- Mặt cắt ngang chuyển động tròn quanh O

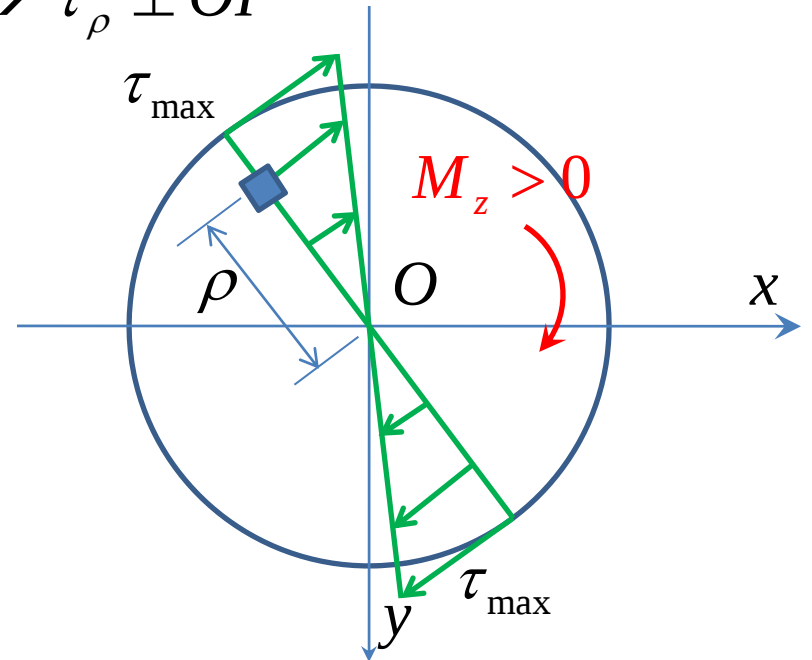
→ Trạng thái US trượt thuần túy → $\tau_\rho \perp OI$

$$M_z = \int_F \tau_\rho \rho dF$$

- Định luật Hooke: $\tau_\rho = G\gamma_\rho$

γ_ρ : Độ biến dạng góc

$$\gamma_\rho \approx \tan(\gamma_\rho)$$



6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

1. Thiết lập công thức tính ứng suất tiếp cho thanh chịu xoắn

Xét phân tố:

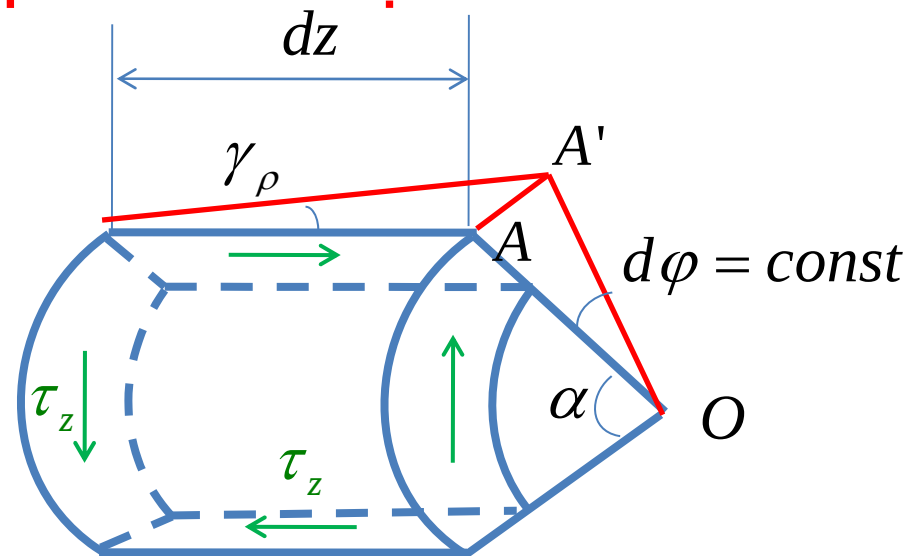
$$\gamma_\rho \approx \operatorname{tg}(\gamma_\rho) = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\Rightarrow \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\Rightarrow M_z = \int_F G\rho \frac{d\varphi}{dz} \rho dF = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = GJ_0 \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_0}$$

$$\Rightarrow \tau_\rho = \frac{M_z}{J_0} \rho$$



Moment chống xoắn: $W_0 = \frac{J_0}{\rho_{\max}} = \frac{J_0}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} \approx 0,2D^3 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_0}$

6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

2. Cách tính bền

Công thức tính ứng suất pháp tổng quát:

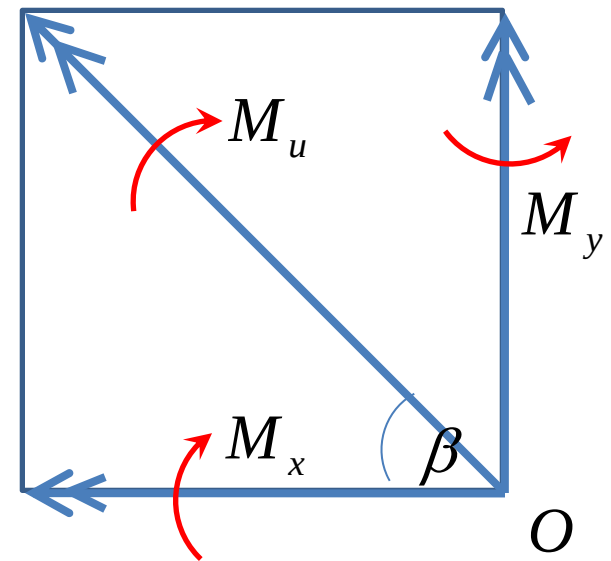
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

$$\vec{M}_x \perp \vec{M}_y \Rightarrow \vec{M}_u = \vec{M}_x + \vec{M}_y$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|M_y|}{|M_x|}$$

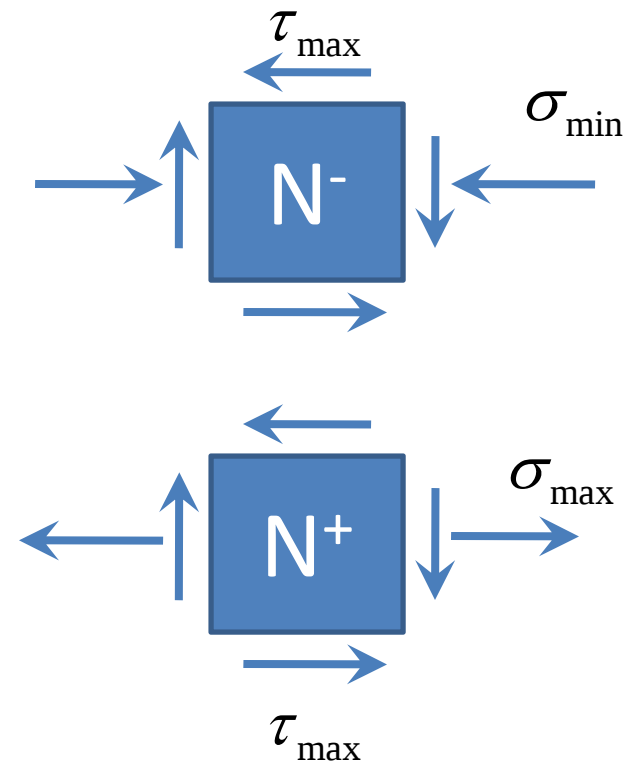
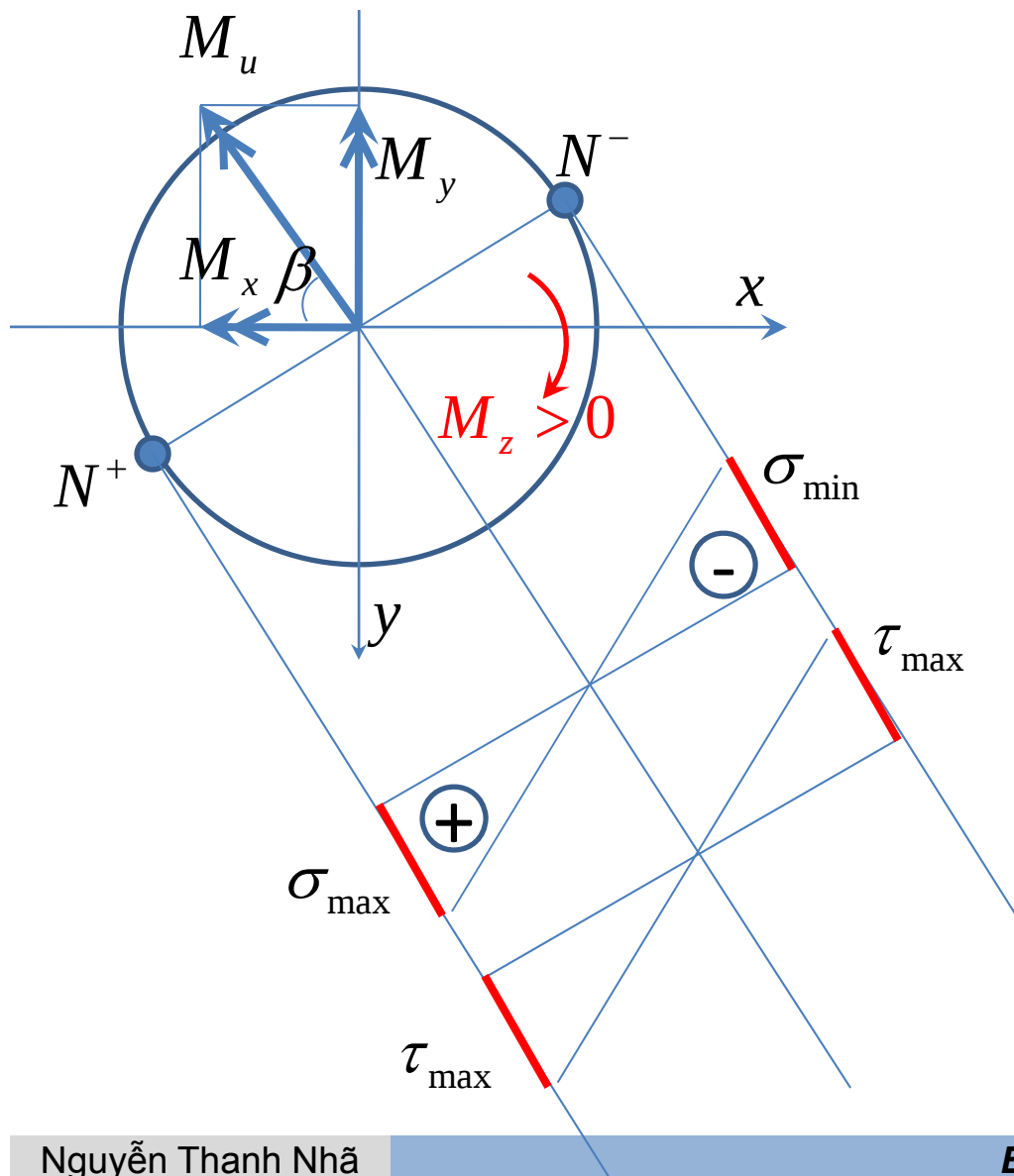
$$|\sigma_z|_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_u}$$

$$W_x = W_y = W_u = 0,1D^3$$



6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

2. Cách tính bền



6.6. Tính bền khi thanh chịu uốn và xoắn đồng thời

Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (TB3)

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{\frac{M_u^2}{W_u^2} + 4\frac{M_z^2}{W_o^2}} \quad W_o = 2W_x$$

$$\sigma_{td} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{W_x^2} + \frac{4M_z^2}{4W_x^2}} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}{W_x^2}} = \frac{M_{td}}{W_x}$$

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (TB4)

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} = \sqrt{\frac{M_u^2}{W_u^2} + 3\frac{M_z^2}{W_o^2}} \quad W_o = 2W_x$$

$$\sigma_{td} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{W_x^2} + \frac{3M_z^2}{4W_x^2}} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}{W_x^2}} = \frac{M_{td}}{W_x}$$

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}$$