

Chương III: VECTƠ NGẪU NHIÊN

(ĐẠỊ LƯỢNG NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU)

III.1. Khái niệm.

Nếu các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \dots, X_n$ cùng xác định trên các kết quả của một phép thử thì ta nói $Z = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ là một vectơ ngẫu nhiên n chiều.

III.2. Vectơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều (X, Y) .

III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời.

III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lẻ).

III.2.3 PP XS có điều kiện.

III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y .

III.2.5 Hàm phân phối XS của (X, Y) .

III.3. Vector ngẫu nhiên liên tục 2 chiều (X,Y).

III.3.1 Hàm mật độ đồng thời.

III.3.2 Hàm mật độ của các BNN thành phần X, Y
(Hàm mật độ lẻ).

III.3.3 Điều kiện độc lập của X và Y.

III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y).

III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện. CuuDuongThanCong.com

III.4 Một số tham số đặc trưng của vector ngẫu nhiên.

- * Kỳ vọng toán
- * Kỳ vọng của hàm $\varphi(X,Y)$.
- * Kỳ vọng có điều kiện
- * Covarian (Hiệp phương sai)
- * Ma trận tương quan
- * Hệ số tương quan & ý nghĩa.
- * Sử dụng máy tính bỏ túi để tính một số tham số đặc trưng.

III.5. Hàm của vector ngẫu nhiên (X,Y).

III.2 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN RỜI RẠC 2 CHIỀU

III.2.1 Bảng phân phối XS đồng thời:

Cho $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$; $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Đặt $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$; $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Dưới đây là bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) :

X \ Y	Y			
	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Khi đó $0 \leq p_{ij} \leq 1$ và $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

III.2.2 Phân phối XS theo các BNN thành phần X, Y (PP lề).

Đặt:
$$p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} = P(X = x_i), i = \overline{1, m}$$

Ta được bảng phân phối xác suất của X:

X	x_1	x_2	...	x_m
P^X	p_1	p_2	...	p_m

Đặt:
$$q_j = \sum_{i=1}^m p_{ij} = P(Y = y_j), j = \overline{1, n}$$

Ta được bảng phân phối xác suất của Y:

X	y_1	y_2	...	y_n
P^Y	q_1	q_2	...	q_n

III.2.3 Phân phối xác suất có điều kiện:

Bảng PPXS của X với điều kiện $Y = y_j (j = \overline{1, n})$ là:

X	x_1	x_2	...	x_m
P^{X/y_j}	$\frac{p_{1j}}{q_j}$	$\frac{p_{2j}}{q_j}$	...	$\frac{p_{mj}}{q_j}$

tức là $P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}$

Bảng PPXS của Y đối với điều kiện $X = x_i (i = \overline{1, m})$ là:

Y	y_1	y_2	...	y_n
P^{Y/x_i}	$\frac{p_{i1}}{p_i}$	$\frac{p_{i2}}{p_i}$	...	$\frac{p_{in}}{p_i}$

III.2.4 Điều kiện độc lập của X và Y.

X và Y độc lập

$$\Leftrightarrow P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j) \quad \forall i, j \text{ hay } p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i, j.$$

$$\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x).F_Y(y);$$

(F_X, F_Y là các hàm *PPXS* của X, Y, hay gọi là các hàm phân phối lẻ..)

III.2.5 Hàm phân phối đồng thời của (X, Y) .

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$$

Lưu ý:

- $F(x, y)$ chính là xác suất để điểm ngẫu nhiên $M(X, Y)$ rơi vào hình chữ nhật vô hạn có đỉnh phía trên, bên phải là (x, y) .

III.3 PHÂN PHỐI XÁC SUẤT của VTNN LIÊN TỤC (X,Y)

III.3.1 Hàm mật độ XS đồng thời: của VTNN (X,Y) là hàm xác định trên toàn mặt phẳng, thỏa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(x, y) \geq 0; \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \bullet \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1 \end{array} \right.$$

• Tính chất: $P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$

III.3.2 Hàm mật độ lề:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{là hàm mật độ theo } X;$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{là hàm mật độ theo } Y.$$

III.3.3 Điều kiện độc lập của X, Y:

$$X \text{ và } Y \text{ độc lập} \Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

III.3.4 Hàm phân phối XS của (X,Y):

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f(u, v) dv$$

- Từ đó suy ra:

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- Trong trường hợp riêng, khi miền D là hình chữ nhật:

$$P(a \leq X < b; c \leq Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

III.3.5 Hàm mật độ có điều kiện VTNN liên tục (X,Y).

Hàm mật độ của X với điều kiện $Y = y$ là: $f_{X/Y} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$

Hàm mật độ của Y với điều kiện $X = x$ là: $f_{Y/X}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

III.4 MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG của BNN hai chiều:

* **Kỳ vọng toán:** $E(X,Y) = (E(X), E(Y))$

* **Hiệp phương sai (Covarian, mômen tương quan):**

$$\text{cov}(X,Y) = E[(X-E(X)).(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X).E(Y)$$

* **Ma trận tương quan (ma trận hiệp phương sai) của (X,Y):**

$$D(X,Y) = \begin{bmatrix} \text{cov}(X,X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & D(Y) \end{bmatrix}$$

* **Hệ số tương quan của X và Y:**

$$R_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

Hệ số tương quan và covarian dùng để đặc trưng cho mức độ chặt chẽ của mối liên hệ phụ thuộc giữa các BNN X và Y .

Nếu $R_{XY} = 0$ thì ta nói X, Y không tương quan, ngược lại khi $R_{XY} \neq 0$ ta nói X, Y có tương quan.

Nếu X, Y độc lập thì $\text{cov}(X,Y) = R_{XY} = 0$.

Điều ngược lại không đúng, tức là nếu $\text{cov}(X,Y) = 0$ thì hoặc X, Y độc lập, hoặc X, Y phụ thuộc ở một dạng thức nào đó. Khi (X,Y) có phân phối chuẩn thì X,Y độc lập $\Leftrightarrow R_{XY} = 0$.

Hệ số tương quan không có đơn vị đo và $|R_{XY}| \leq 1$.

Nếu $R_{XY} = \pm 1$ thì X, Y có tương quan tuyến tính (thuận /nghịch).

Khi $R_{XY} \approx \pm 1$ thì X, Y có tương quan “gần” tuyến tính.

Ví dụ 1

Một hộp đựng 5 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm mà không kiểm tra thì không biết. Các sản phẩm được lấy ra kiểm tra cho đến khi phát hiện thấy 2 phế phẩm thì dừng lại.

Kí hiệu X là BNN chỉ số lần kiểm tra cho tới khi phế phẩm đầu tiên được phát hiện. Y là BNN chỉ số lần kiểm tra thêm cho tới khi phế phẩm thứ hai được phát hiện.

Hãy :

- a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính $\text{cov}(X, Y)$ và hệ số tương quan của X, Y .
- c) X, Y có độc lập hay không ?
- d) Tìm phân phối XS và kỳ vọng có điều kiện của X khi $Y=2$.



X \ Y	1	2	3
1	3/10	2/10	1/10
2	2/10	1/10	0
3	1/10	0	0

$$p_{11} = P(X=1;Y=1) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$p_{12} = P(X=1;Y=2) = P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{13} = P(X=1;Y=3) = P(\overline{A_1}.A_2.A_3.\overline{A_4}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{21} = P(X=2;Y=1) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$p_{22} = P(X=2;Y=2) = P(A_1.\overline{A_2}.A_3.\overline{A_4}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{31} = P(X=3;Y=1) = P(A_1.A_2.\overline{A_3}.\overline{A_4}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

$$p_{23} = P(X=2;Y=3) = 0$$

$$p_{32} = P(X=3;Y=2) = 0$$

$$p_{33} = P(X=3;Y=3) = 0$$

b) Tính $\text{Cov}(X,Y)$

và R_{XY} :

$\begin{matrix} \text{Y} \\ \text{X} \end{matrix}$	1	2	3	p^X
1	3/10	2/10	1/10	6/10
2	2/10	1/10	0	3/10
3	1/10	0	0	1/10
p^Y	6/10	3/10	1/10	

Viết lại các bảng PPXS thành phần của X và Y (phân phối lề):

X	1	2	3
p^X	6/10	3/10	1/10

Y	1	2	3
p^Y	6/10	3/10	1/10

$$E(X) = E(Y) = 1,5$$

$$D(X) = D(Y) = 0,45$$

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 1.1. \frac{3}{10} + 1.2. \frac{2}{10} + 1.3. \frac{1}{10} + 2.1. \frac{2}{10} + 2.2. \frac{1}{10} + 3.1. \frac{1}{10} = 2,1$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = -0,15. \quad R_{XY} = \frac{E(XY) - E(X).E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-1}{3}$$

HD Sử dụng MTBT tìm 1 số đặc trưng của VTNN rời rạc:

Các bước thực hiện	Máy CASIO fx 570 ES (PLUS)...	Máy CASIO fx 500 MS....																				
Mở cột tần số (nếu máy chưa mở)	SHIFT -- MODE (SETUP) -- ▼ -- -- 4 (STAT) -- 1 (ON)																					
Vào chế độ thống kê hai biến.	MODE -- 3 (STAT) -- 2 (A+BX)	MODE -- MODE ---...-- 2 (REG) --- 1 (Lin)																				
Nhập dữ liệu	<table><tr><td></td><td>X</td><td>Y</td><td>FREQ</td></tr><tr><td>1</td><td>x1</td><td>y1</td><td>p11</td></tr><tr><td>2</td><td>x1</td><td>y2</td><td>p12</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>....</td></tr><tr><td>...</td><td>xn</td><td>ym</td><td>pnm</td></tr></table> AC		X	Y	FREQ	1	x1	y1	p11	2	x1	y2	p12	...	...	...		...	xn	ym	pnm	Nhập lần lượt theo từng dòng , thứ tự nhập như sau: X_i , Y_j ; p_{ij} M+
	X	Y	FREQ																			
1	x1	y1	p11																			
2	x1	y2	p12																			
...	...	...																				
...	xn	ym	pnm																			
Đọc kết quả E(X); E(Y)	SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) – --- 2 ($\bar{x}$) -- = Muốn có kq E(Y) thì chọn $\bar{y}$	SHIFT – 2 (SVAR) -1 ($\bar{x}$)-- = SHIFT – 2(SVAR) - ▶ -1 ($\bar{y}$)-- =																				
Đọc kết quả $\sqrt{D(X)}$ $\sqrt{D(Y)}$	SHIFT – 1 (STAT)- 4 (VAR) – --- 3 (σX) -- = Muốn có kq $\sqrt{D(Y)}$ thì chọn σY	SHIFT – 2 (SVAR)- 2 (σx)-- = SHIFT – 2(SVAR) - ▶ -1 (σy) -- =																				
Đọc kết quả R _{XY}	SHIFT – 1 (STAT)-6(REG)-3 (r) --=	SHIFT – 2 (SVAR) - ▶ - ▶ 3 (r)--=																				
Tham khảo các KQ trung gian	SHIFT – 1 (STAT)- 3 (SUM) -	SHIFT – 1 (SSUM) -																				

c) Theo đn, X, Y độc lập $\Leftrightarrow P(X=x_i; Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j); \quad \forall i, j.$

Trong bảng PPXS đồng thời, $P(X=1; Y=1) = 3/10$;

nhưng $P(X=1).P(Y=1) = (6/10).(6/10) = 1/100 \neq P(X=1; Y=1)$

nên ta kết luận X, Y không độc lập.

d) Từ bảng PPXS đồng thời, suy ra bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $Y=2$:

$X Y=2$	1	2
$P^{X Y=2}$	$\frac{2/10}{3/10} = \frac{2}{3}$	$\frac{1/10}{3/10} = \frac{1}{3}$

và $E(X|Y=2) = 4/3.$

Ví dụ 2

Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y độc lập có các bảng phân phối xác suất:

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



- a) Lập bảng phân phối xác suất của $Z = 3X^2 + 2Y$; Tính $E(Z), D(Z)$.
- b) Tính $E(U), D(U)$ với $U = 5X - 3Y + 10$.

Hướng dẫn: Do X, Y độc lập nên $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j), \forall i, j$.
Lập bảng PPXS đồng thời của X, Y rồi tính giá trị hàm $Z = 3X^2 + 2Y$.

X \ Y	0	1
-1	1/8 $Z = 3$	1/8 $Z = 5$
1	2/8 $Z = 3$	2/8 $Z = 5$
2	1/8 $Z = 12$	1/8 $Z = 14$

Suy ra bảng phân phối xác suất của Z:

Z	3	5	12	14
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Vậy $E(Z) = 6,25$ và $D(Z) = 16,1875$.

b) HD: $E(5X - 3Y + 10) = 5E(X) - 3E(Y) + 10$.

$$D(5X - 3Y + 10) = 25D(X) + 9D(Y).$$

Ví dụ 3

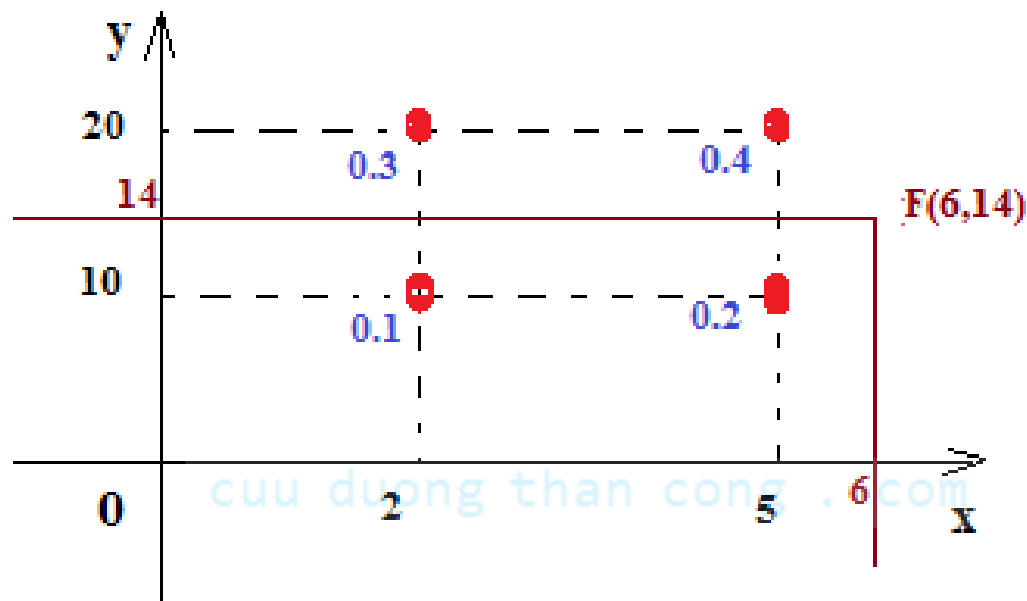
Dưới đây là bảng PPXS đồng thời của 2 biến ngẫu nhiên X,Y. Tìm hàm phân phối XS của (X,Y).

X \ Y	10	20
2	0.1	0.3
5	0.2	0.4



Hướng dẫn : [cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

$$F(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \sum_{i,j} p_{ij} \quad ; \quad x_i \leq x \text{ \& } y_j \leq y.$$



Ví dụ:

+ $F(x, y) = P(X < x; Y < y)$.

+ $F(3; 20) = P(X < 3, Y < 20) = 0,1$.

+ $F(6; 14) = P(X < 6; Y < 14) = 0,3$

+ $F(4; 25) = P(X < 4; Y < 25) = 0,4$.

Đáp số:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0,1 & (x, y) \in (2, 5] \times (10, 20] \\ 0,1+0,3 & (x, y) \in (2, 5] \times (20, +\infty) \\ 0,1+0,2 & (x, y) \in (5, +\infty) \times (10, 20] \\ 1 & (x, y) \in (5, +\infty) \times (20, +\infty) \\ 0 & (x, y) \neq \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Ví dụ 4

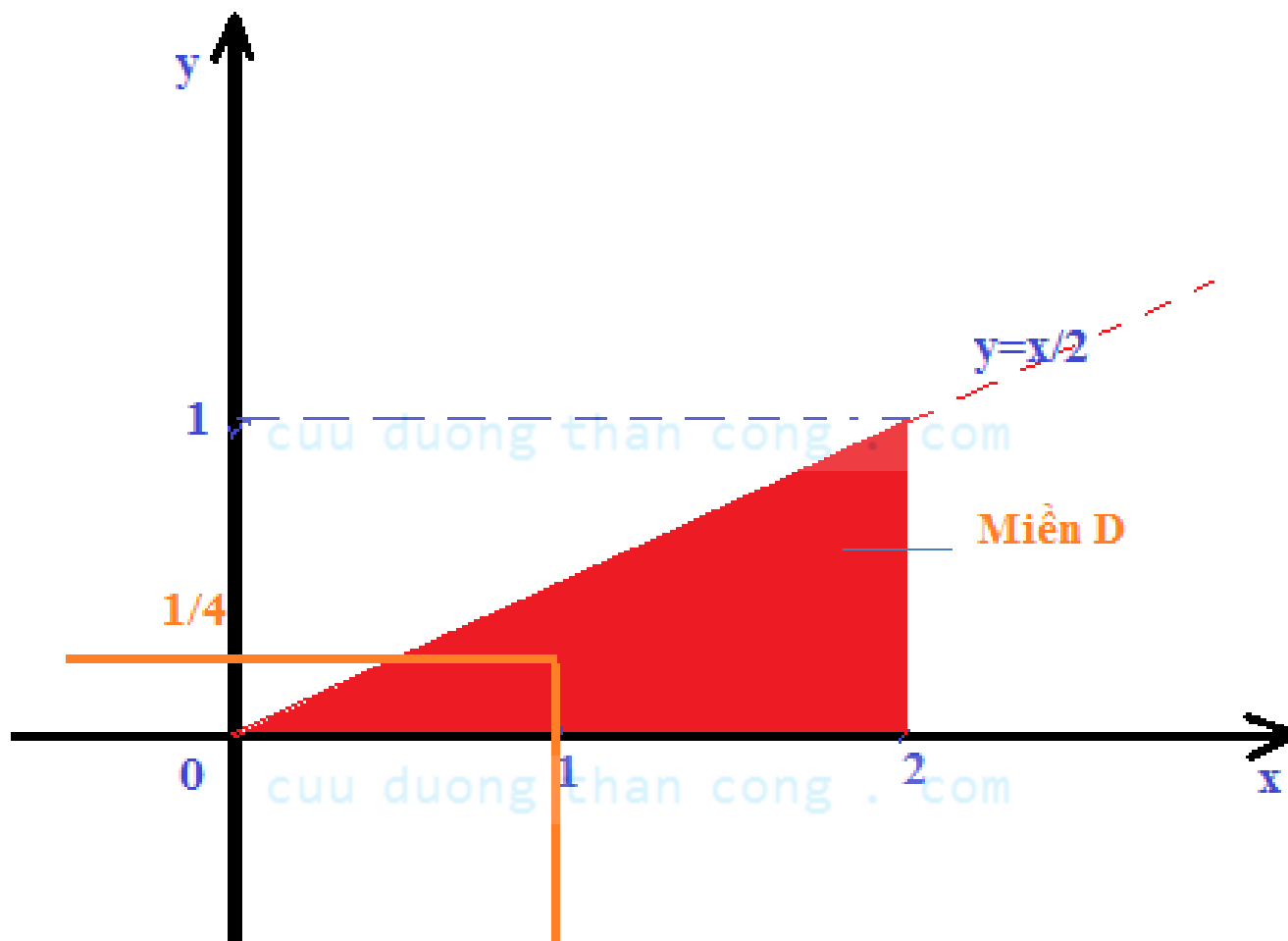
Cho vec tơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y^2) & \text{khi } 0 < y < \frac{x}{2} < 1 \\ 0 & \text{ở nơi khác} \end{cases}$$

- a) Xác định hệ số a .
- b) Tìm $P(X < 1; Y < 1/4)$.
- c) Tìm các hàm mật độ xác suất của X, của Y (hàm mật độ lẻ).
- d) Tính covarian của vec tơ ngẫu nhiên (X,Y).
- e) Tìm hệ số tương quan của X,Y.
- f) Tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của X,Y.
- g) Tìm các hàm mật độ có điều kiện của X,Y.



Hình vẽ
cho
câu a,b)



a) $f(x,y)$ là hàm mật độ XS của một vector ngẫu nhiên nào đó

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \iint_D a(x+y^2) dx dy = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \int_0^2 dx \int_0^{x/2} a(x+y^2) dy = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}, \text{ thỏa (1).}$$

b)

$$P\left(X < 1; Y < \frac{1}{4}\right) = \int_{-\infty}^1 dx \int_{-\infty}^{1/4} f(x,y) dy = \int_0^{1/2} dx \int_0^{x/2} \frac{2}{3}(x+y^2) dy + \int_{1/2}^1 dx \int_0^{1/4} \frac{2}{3}(x+y^2) dy$$

$$\text{hay } P\left(X < 1; Y < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} dy \int_{2y}^1 \frac{2}{3}(x+y^2) dx = \frac{2}{3} \int_0^{1/4} \left(-2y^3 - y^2 + \frac{1}{2}\right) dy = \frac{181}{2304}$$

c) Trước tiên ta tìm hàm mật độ lề theo X:

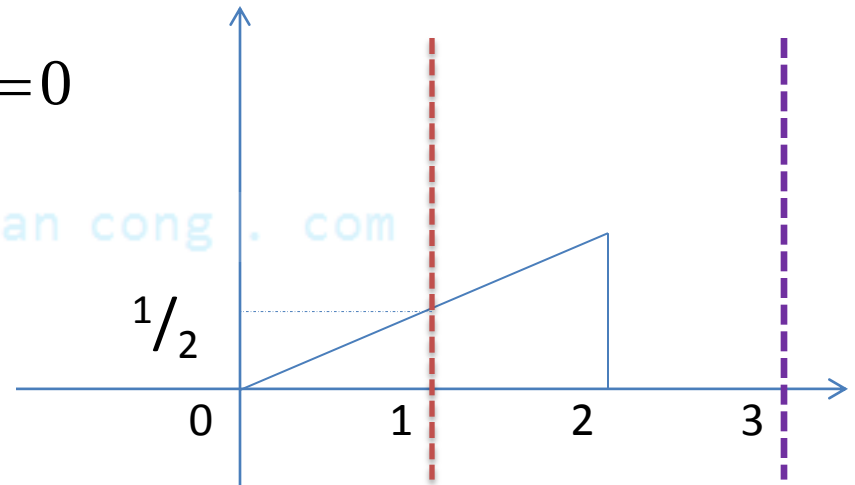
$$\text{Với mỗi } x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy$$

Ví dụ 2 trường hợp $x=1$ và $x = 3$:

$$\bullet f_X(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(1, y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\frac{1}{2}} (1 + y^2) dy + \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} 0 dy = \frac{13}{36}$$

$$\bullet f_X(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(3, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$$

cuu duong than cong . com



Như vậy :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{x/2} \frac{2}{3} (x + y^2) dy & x \in (0; 2) \\ 0 & x \notin (0; 2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2(x+12)}{36} & x \in (0; 2) \\ 0 & x \notin (0; 2) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{2y}^2 \frac{2}{3} (x + y^2) dx & y \in (0;1) \\ 0 & y \notin (0;1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{4y^3}{3} & y \in (0;1) \\ 0 & y \notin (0;1) \end{cases}$$

$$d) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x^2(x+12)}{36} dx = \frac{68}{45}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^1 y \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{4y^3}{3} \right) dy = \frac{2}{5}$$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} \frac{2}{3} xy (x + y^2) dy = \frac{29}{45}$$

$$COV(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{25}$$

Công thức khác: $E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot f(x, y) dx dy$; $E(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} y \cdot f(x, y) dx dy$;

$$\begin{aligned} \text{e) } D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx - E(X)^2 = \\ &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x^2(x+12)}{36} dx - \left(\frac{68}{45}\right)^2 = \frac{296}{2025} \end{aligned}$$

$$D(Y) = \int_0^1 y^2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{4y^3}{3}\right) dy - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{14}{225}$$

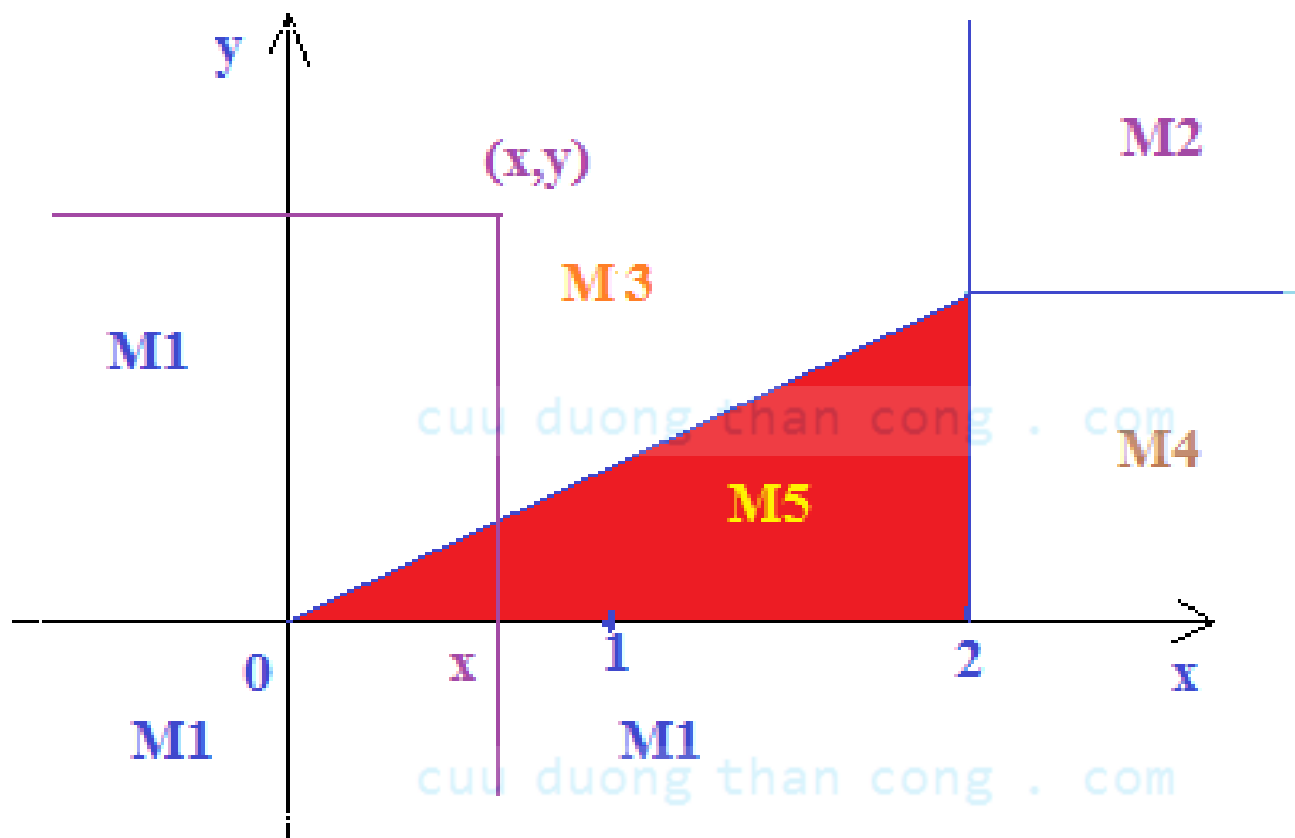
$$R_{XY} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{27\sqrt{259}}{1036} \approx 0.4194$$

Công thức khác:

$$D(X) = \iint_{R^2} x^2 f(x,y) dx dy - E(X)^2; \quad D(Y) = \iint_{R^2} y^2 f(x,y) dx dy - E(Y)^2$$

$$f) F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(X < \mathbf{x}; Y < \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} du \int_{-\infty}^{\mathbf{y}} f(u, v) dv$$

$$= \begin{cases} 0 & (x, y) \in M1 \\ 1 & (x, y) \in M2 \\ \int_0^x du \int_0^{x/2} \frac{2}{3} (u + v^2) dv = \frac{x^3(x+6)}{36} & (x, y) \in M3 \\ \int_0^y dv \int_{2y}^2 \frac{2}{3} (u + v^2) du = \frac{-4y(y^3 + 2y^2 - 3)}{9} & (x, y) \in M4 \\ \int_0^y dv \int_{2y}^x \frac{2}{3} (u + v^2) du = \frac{y^3(2x - 4y)}{9} + \frac{y(x^2 - 4y^2)}{3} & (x, y) \in M5 \end{cases}$$



Hình vẽ cho câu f)

g) Hàm mật độ có điều kiện của X, Y.

* Khi $y \in [0,1]$:

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+y^2)}{\frac{4}{3} - \frac{4y^3}{3}} & 2y \leq x \leq 2 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

* Khi $x \in [0,2]$:

$$\varphi(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{(x+y^2)}{\frac{x^2(x+12)}{36}} & 0 \leq y \leq x/2 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

Ví dụ 6

Véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)}$$



Tìm hàm mật độ lẻ của biến ngẫu nhiên Y .

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2 - 2y^2} dx \\ &= e^{-2y^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{e^{-2y^2}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{e^{-2y^2}}{\pi} \cdot \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Giải thích (*): Đặt $t = x + y$, coi y như hằng số, đưa về tích phân Euler-Poisson.

Ví dụ 7 Đoạn thẳng AB có độ dài a cm. Chia ngẫu nhiên AB thành 3 đoạn thẳng. Tìm thể tích trung bình của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh tạo bởi 3 đoạn trên.



Hướng dẫn

Gọi $X, Y, a-X-Y$ là các BNN chỉ độ dài 3 đoạn thẳng. Khi đó (X, Y) có phân phối đều trên miền phẳng $D = \{(x, y) / 0 < x < a; 0 < y < x - a\}$

Suy ra VTNN (X, Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} C & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{S(D)} = \frac{2}{a^2}$$

Thể tích hình hộp: $V = XY(a - X - Y) = aXY - X^2Y - XY^2$

$$\Rightarrow E(V) = E[aXY - X^2Y - XY^2]$$

$$= \iint_{R^2} (axy - x^2y - xy^2) f(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{2}{a^2} (axy - x^2y - xy^2) dy = \frac{a^3}{60}$$

Ví dụ 8

a) Đlnn X có hàm mật độ: $f(x) = c \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Tìm hệ số c và tính $E(X)$; $D(X)$.

b) Véc tơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = k \cdot e^{-(x^2 + 2xy + 2y^2)}$$

Tìm hệ số k và các hàm mật độ xác suất thành phần.



Hướng dẫn: Ngoài cách tính như đã trình bày ở các ví dụ trên, ta có thể dựa vào dạng của hàm phân phối chuẩn 1 chiều và phân phối chuẩn 2 chiều.

a) X có dạng phân phối chuẩn 1 chiều với hàm mật độ tổng quát:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow a = E(X) = 0; \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}; D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

b) (X,Y) có dạng hàm phân phối chuẩn 2 chiều (*tham khảo*):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-R^2}} e^{-\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\left(\frac{x-a}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{\sigma_Y}\right)^2 - 2R\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

ở đây R là hệ số tương quan của X,Y.

Biến đổi hàm mật độ đồng thời f(x,y) đã cho theo dạng trên, ta tìm được:

- $a=0; \sigma_X=1; \quad b=0; \sigma_Y=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad R=\frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad k=\frac{1}{\pi}$

- Hàm mật độ lẽ theo X và hàm mật độ lẽ theo Y:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$$

- Lưu ý thêm, ở đây $R \neq 0$ nên X,Y không độc lập.

Ví dụ 9 :

Vtnn (X,Y) có hàm mật độ XS:

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{khi } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ 0 & \text{khi } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$$

a) Tìm hệ số k.

b) Tìm các hàm mật độ lề.

Hướng dẫn:

a) $k \cdot \text{Diện tích elip} = 1 \Rightarrow k = 1/(6\pi)$

b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 0 & \text{khi } |x| > 3 \\ \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} \frac{1}{6\pi} dy = \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2} & \text{khi } |x| \leq 3 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } |y| > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2} & \text{khi } |y| \leq 2 \end{cases}$$



Ví dụ 10 :

Vtnn X có hàm mật độ XS: $f(x, y) = \begin{cases} k & \text{khi } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{khi } |x| + |y| > 1 \end{cases}$.

a) Tìm hệ số k .

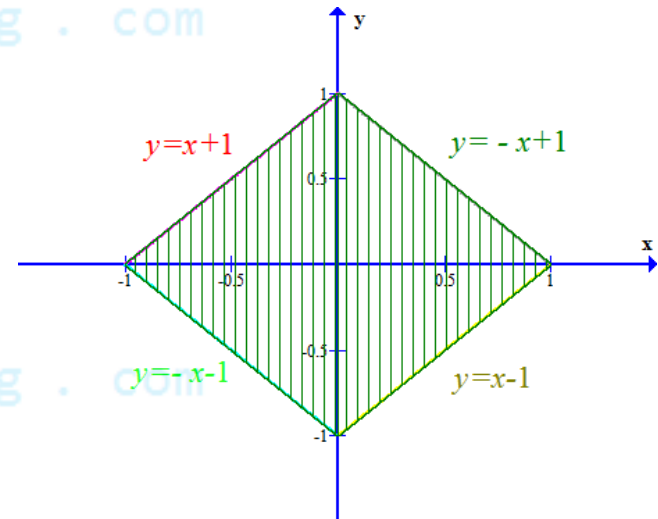
b) Tìm các hàm mật độ XS của X .

Hướng dẫn:

a) k^* Diện tích hình vuông = 1 $\Rightarrow k = 1/2$

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-x-1}^{x+1} dy = 1+x & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{1-x} dy = 1-x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



Ví dụ 11 : Vtnn X có hàm phân phối XS:

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by}) & x, y \geq 0; a, b > 0 \\ 0 & \text{khi } (x, y) \neq \dots \end{cases}$$

a) Tìm các hàm mật độ XS của X, Y .

b) Tìm $P(0 < X < 2; 1 < Y < 5)$.

Hướng dẫn:

a) C1: Tìm hàm mật độ XS đồng thời $f_{XY}(x, y) = [F_{XY}(x, y)]'_{x' y'}$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} abe^{-ax} \cdot e^{-by} & x, y \geq 0; a, b > 0 \\ 0 & \text{khi } (x, y) \neq \dots \end{cases}$$

sau đó tìm hàm mật độ lẻ của X và của Y .

C2: Tìm hàm phân phối lẻ $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$; $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$; sau đó đạo hàm tương ứng theo x, y để có được $f_X(x)$; $f_Y(y)$.

b) XS cần tìm $= F(2; 5) - F(2; 1) - F(0; 5) + F(0; 1)$



III.5 HÀM CỦA VTNN 2 CHIỀU:

- Đối với BNN rời rạc: xem VD2; VD3. Đối với BNN liên tục: VD 9.

Ví dụ 12 Giả sử các BNN X, Y độc lập và cùng có phân phối đều trên đoạn $[0; 1]$. Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Z=X+Y$.

Hướng dẫn: Các hàm mật độ của X và Y là:

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0; 1] \end{cases}$$



Do X, Y độc lập nên:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{khi } (x, y) \in D \equiv [0; 1] \times [0; 1] \\ 0 & \text{khi } (x, y) \notin D \end{cases}$$

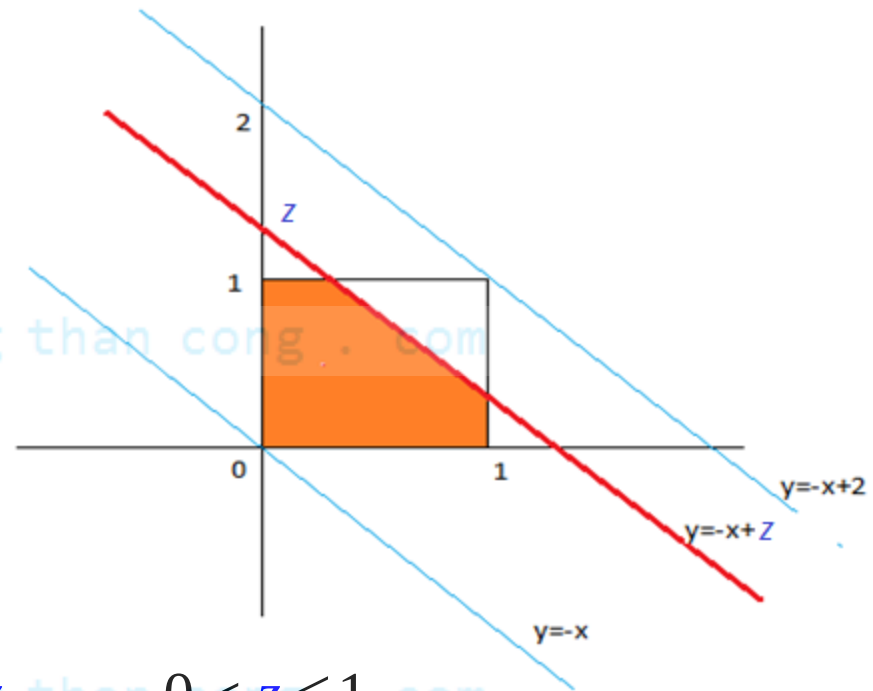
Trước hết ta tìm hàm phân phối XS của Z :

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X+Y < z) = P((X, Y) \in G); \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{ở đây: } G \equiv \{(x, y) : x + y < z\} = \{(x, y) : y < -x + z\}, z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \iint_G f_{XY}(x,y) dx dy = \iint_{D \cap G} 1 dx dy = S_{(D \cap G)}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \frac{z^2}{2} & 0 < z \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & 1 < z \leq 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z & 0 < z \leq 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & z \notin (0; 2) \end{cases}$$