4.3 Phương pháp toán tử Laplace

Phương pháp
Toán tử Laplace

- Phép biến đổi Laplace
- Định luật Ohm và Kirchhoff dạng toán tử
- Phân tích mạch dùng toán tử Laplace

4.3.1 Biến đổi Laplace

- Định nghĩa
  - *f(t)* là hàm (có thể phức) của biến số thực *t* $(t \geq 0)$ sao cho tích phân hội tụ ít nhất với một số phức $s = a + jb$
  - Biến đổi thuận:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}d$$

  - Biến đổi ngược

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}d \quad s$$

- $F(s)$: ảnh Laplace
- $f(t)$: gốc

Biến đổi Laplace của một số hàm thông dụng

f(t)	F(s)	Miền hội tụ
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\delta(t)$	1	
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

Bảng tính chất phép biến đổi Laplace

Tính chất	f(t)	F(s)
Tuyến tính	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Dời theo s	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Dời theo t	$f(t-t_0).u(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
Đổi thang	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Bảng tính chất phép biến đổi Laplace

Tính chất	f(t)	F(s)
Đạo hàm theo t	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - \ldots - f^{(n-1)}(0^-)$
Tích phân theo t	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}F(s)$
Nhân cho t	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
Chia cho t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$

Bảng tính chất phép biến đổi Laplace

Tính chất	f(t)	F(s)
Hàm tuần hoàn	$f(t)=f(t+T)$	$\dfrac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$
Giá trị đầu	$f(0^+)$	$\lim\limits_{s\to+\infty} sF(s)$
Giá trị cuối	$f(+\infty)$	$\lim\limits_{s\to 0^+} sF(s)$
Tích chập miền t	$f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
Tích chập miền s	$f(t)g(t)$	$\dfrac{1}{2\pi j}F(s)*G(s)$

Các biến đổi Laplace thông dụng

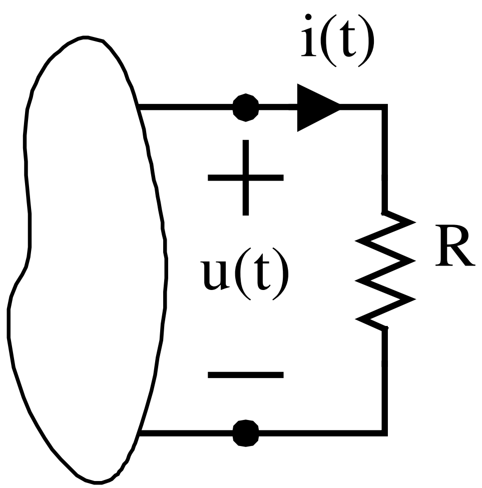
f(t)	F(s)	
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$\delta(t)$	1	
$\delta'(t)$	s	$s > 0$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$s > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$s > -a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$

Các biến đổi Laplace thông dụng

f(t)	F(s)	
$e^{-at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$s > -a$
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$s > -a$
$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$s > -a$
$t.\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$t.\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s > 0$
$\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert a \rvert$

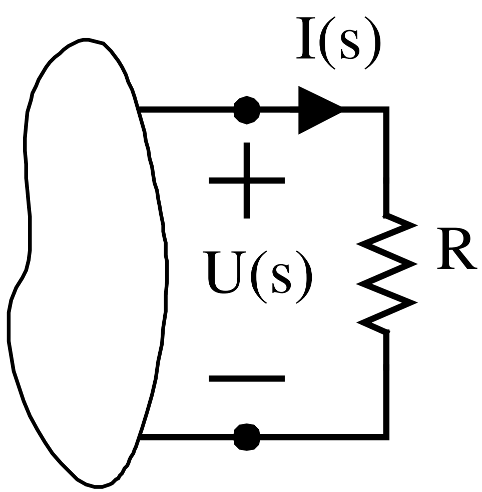
4.3.2 Các trở kháng toán tử

- Điện trở



$$u(t) = Ri(t)$$

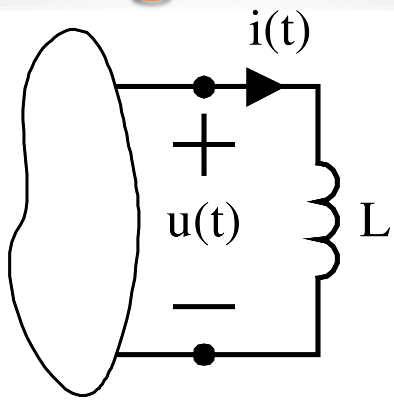
$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \mathscr{L}\{Ri(t)\}$$



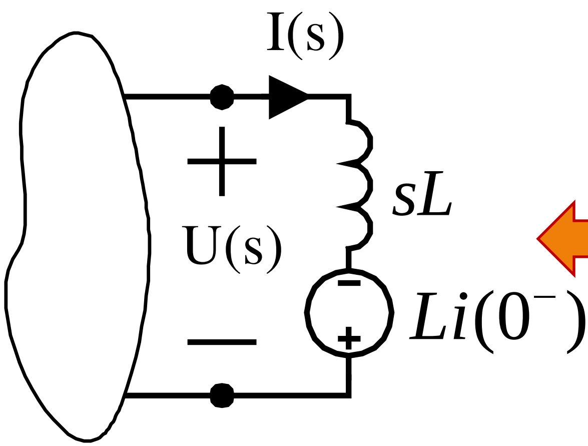
$$\boxed{U(s) = RI(s)}$$

4.3.2 Các trở kháng toán tử

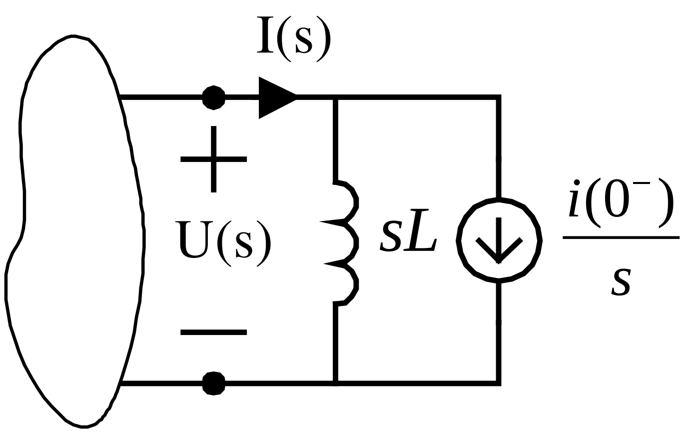
- <u>Điện cảm</u>



$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$



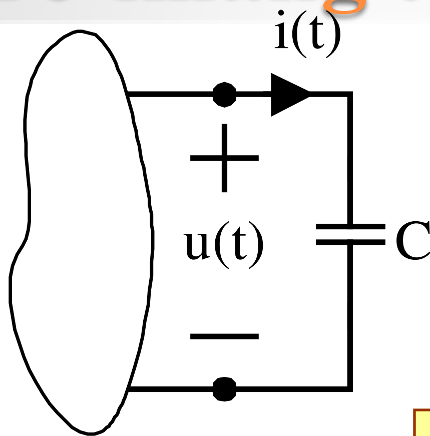
$$U(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$



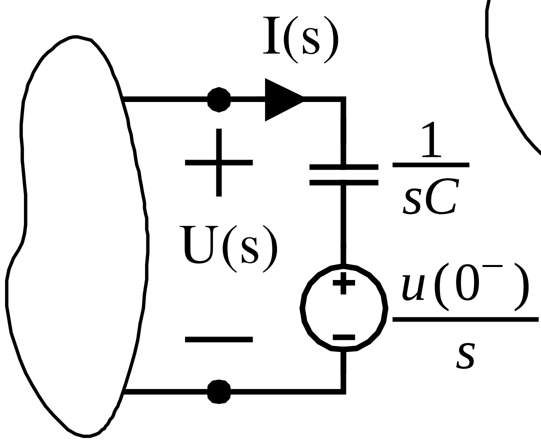
$$I(s) = \frac{U(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$$

4.3.2 Các trở kháng toán tử

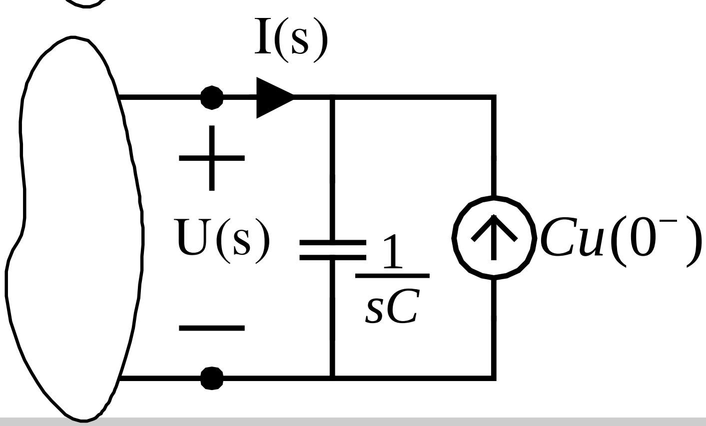
- Điện dung



$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + u(0^-)$$



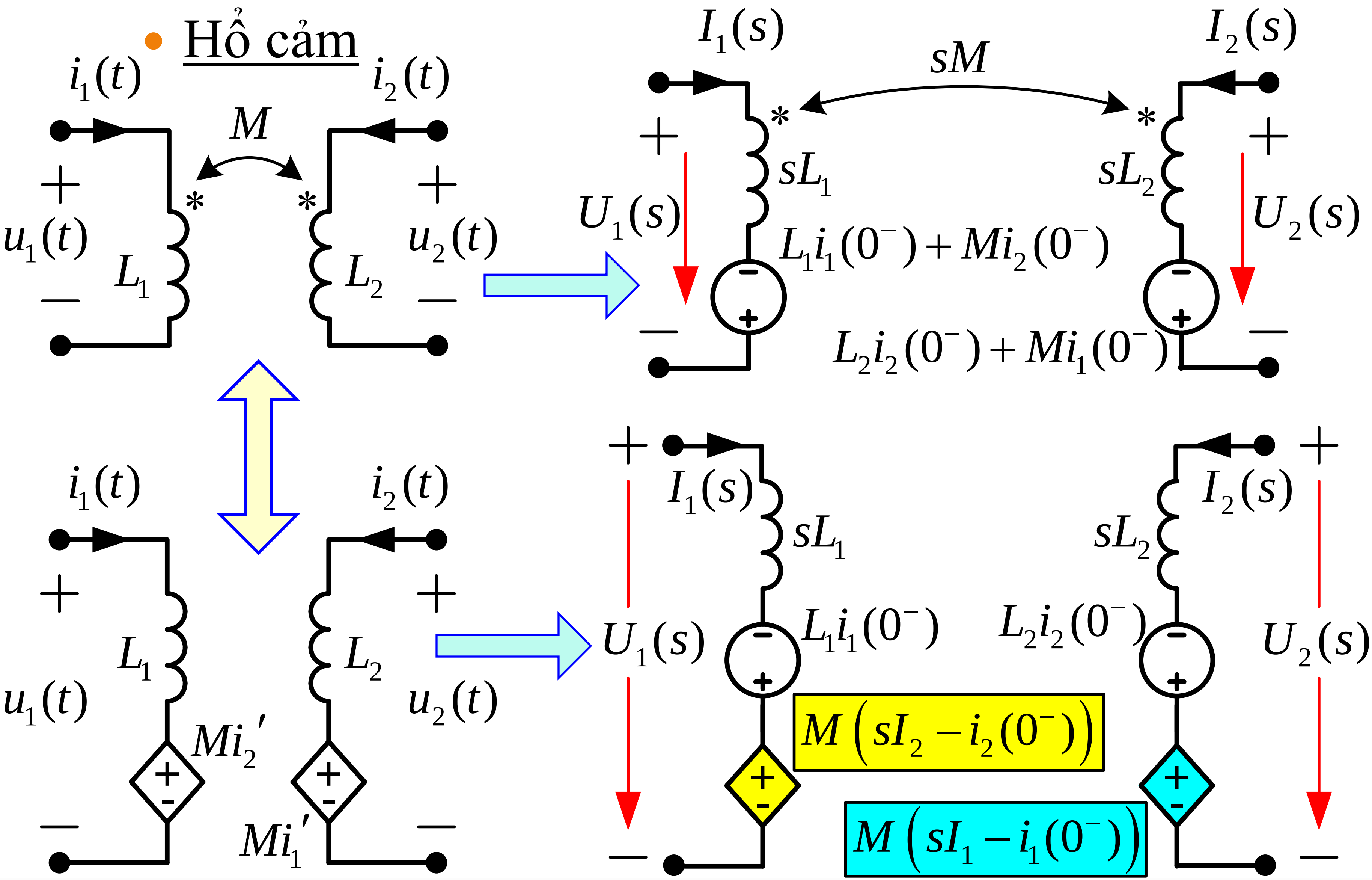
$$U(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u(0^-)}{s}$$



$$I(s) = sCU(s) - Cu(0^-)$$

4.3.2 Các trở kháng toán tử

- Hổ cảm

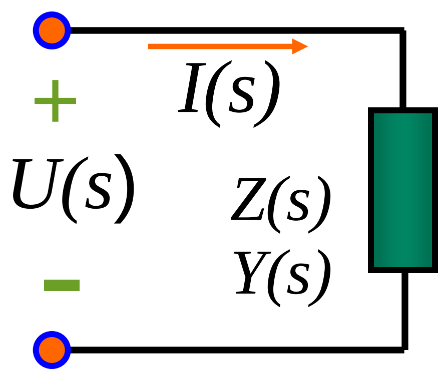


4.3.3 Các định luật mạch dạng toán tử

a) Định luật Ohm dạng toán tử :

(điều kiện đầu bằng 0)

❖ Phát biểu:



$$\boxed{U(s) = Z(s).I(s)}$$

$$\boxed{I(s) = Y(s).U(s)}$$

Với : $Y = \dfrac{1}{Z}$ $\begin{cases} Z(s) : \text{trở kháng , tổng trở toán tử } (\Omega) \\ Y(s) : \text{dẫn nạp , tổng dẫn toán tử } (S)\ (\mho) \end{cases}$

4.3.3 Các định luật mạch dạng toán tử

b) Định luật Kirchhoff dạng toán tử :

- Luật KCL : $\sum_{node} \pm I_k(s) = 0$

(Xét dấu như mạch điện trở)

- Luật KVL : $\sum_{loop} \pm U_k(s) = 0$

- Do các luật Ohm và Kirchhoff viết cho mạch toán tử cũng tương tự viết cho mạch phức nên ta có thể áp dụng các phương pháp phân tích mạch xác lập đã học cho sơ đồ toán tử khi tìm ảnh Laplace bất kỳ.

Qui trình PP toán tử Laplace

❖ Dời mốc thời gian

(nếu có, sẽ trả về mốc cũ sau khi giải xong bài toán)

❖ Giải mạch khi t < 0: Chỉ tìm $u_C(0^-)$ và $i_L(0^-)$

❖ Giải mạch khi t > 0:

a) *Xây dựng sơ đồ toán tử cho mạch .*

b) *Áp dụng các pp phân tích mạch để xác định ảnh Laplace Y(s) của tín hiệu cần tìm.*

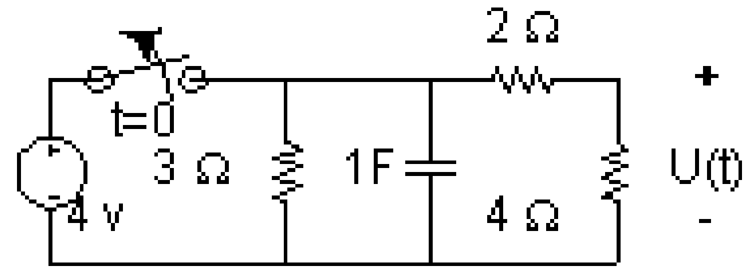
c) *Biến đổi Laplace ngược tìm y(t).*

d) *Trả về mốc thời gian cũ (nếu có).*

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 1

Khóa K mở ra tại t = 0 , tìm áp u(t) khi t > 0 ?

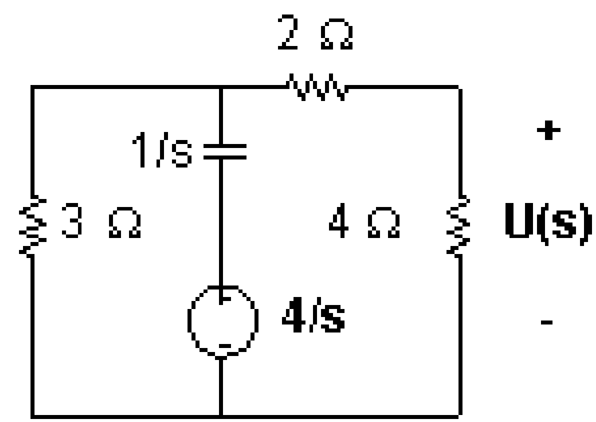


Giải

Khi t < 0 : Ta có $u_C(0^-) = 4$ (V)

Khi t > 0 :

Sơ đồ toán tử như hình bên.



Tìm U(s) bằng thế nút.

$$U(s) = \frac{8/3}{s+0,5}$$

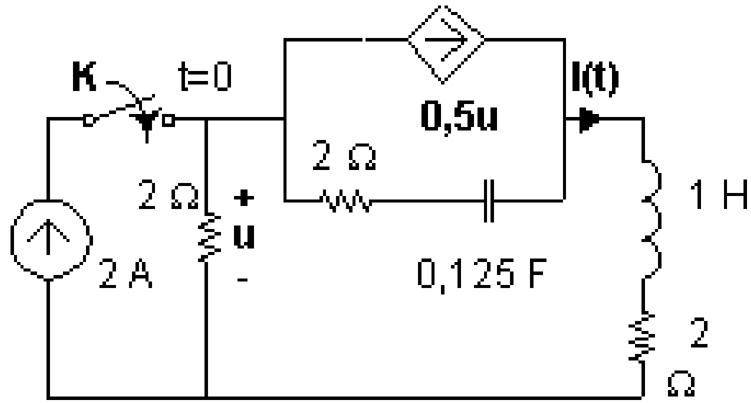
Và :

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{8}{3}e^{-0,5t}.1(t)$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

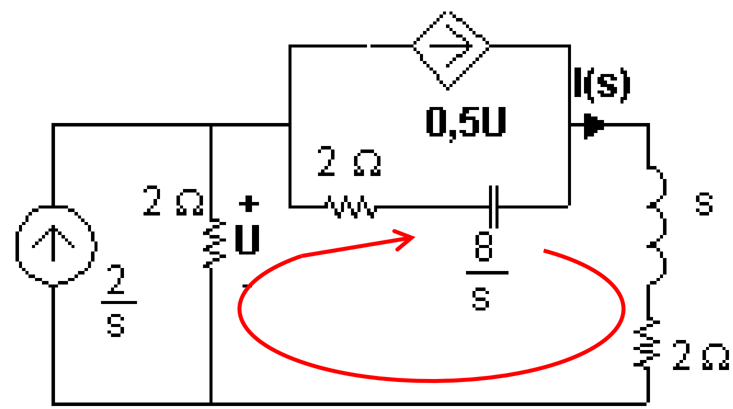
❖ Ví dụ 2

Cho mạch điện như hình bên , khóa K đóng lại tại t = 0 , biết $i_L(0^-) = 0$ và $u_C(0^-) = 0$, xác định i(t) khi t > 0 ?



Giải

Sơ đồ toán tử như hình bên.



Dùng phương pháp dòng mắc lưới :

$$\left(6+s+\frac{8}{s}\right)I(s)=\frac{4}{s}+\left(2+\frac{8}{s}\right)0,5U(s)$$

Với $U(s)=\left(\frac{2}{s}-I(s)\right)2$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

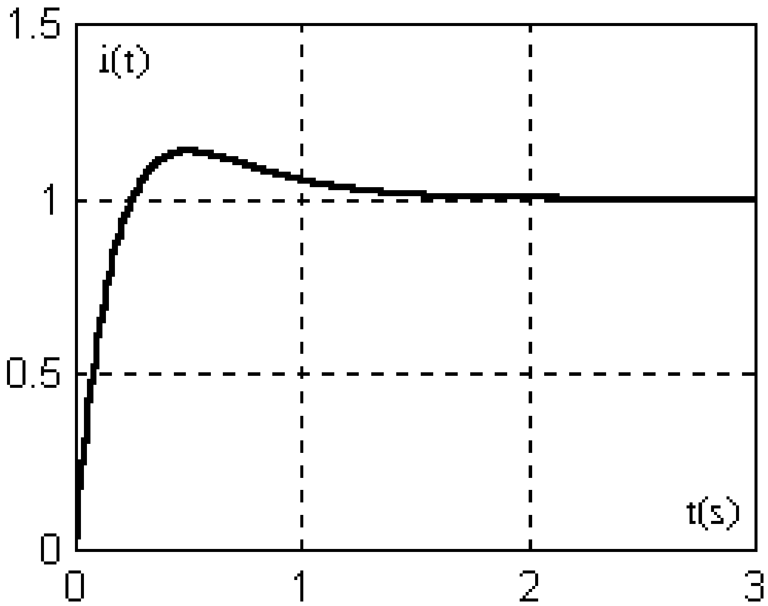
Vậy: $$I(s) = \frac{8(s+2)}{s(s^2+8s+16)}$$

$$= \frac{K_1}{(s+4)^2} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{s}$$

Biến đổi ngược:

$K_1 = 4$; $K_2 = -1$; $K_3 = 1$

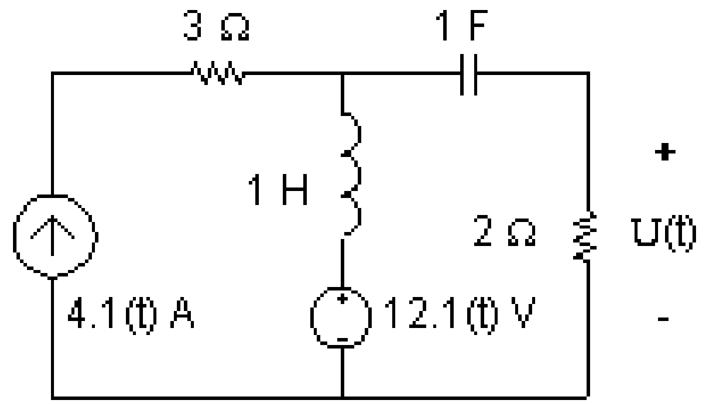
$$i(t) = \left((4t-1)e^{-4t} + 1\right).1(t) \ [\mathrm{A}]$$



4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 3

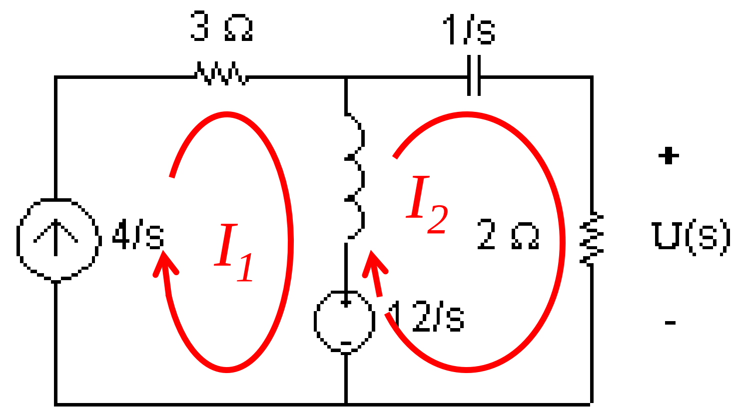
Cho mạch như hình bên, biết $i_L(0^-) = 0$ và $u_C(0^-) = 0$; xác định u(t) tại t > 0 theo phương pháp toán tử Laplace ?



Giải

Sơ đồ toán tử như hình bên.

Áp dụng phương pháp dòng mắc lưới :



$$-s\frac{4}{s}+\left(2+s+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=\frac{12}{s}$$

$$I_2(s)=\frac{12+4s}{(s+1)^2} \qquad \rightarrow U(s)=\frac{24+8s}{(s+1)^2}$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

$$U(s)=\frac{24+8s}{(s+1)^2}$$

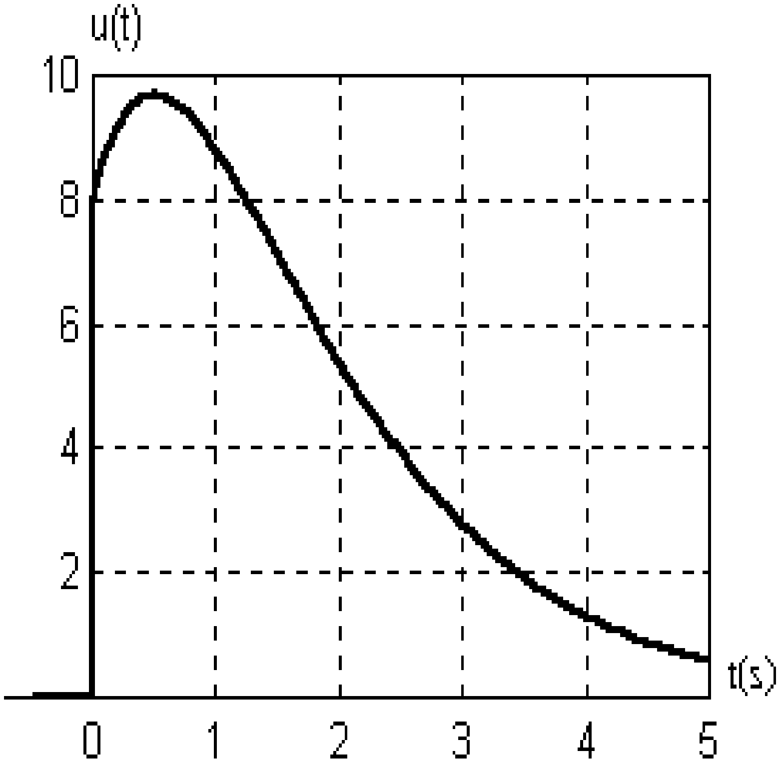
Heaviside:

$$U(s)=\frac{K_1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1=(24+8s)\Big|_{s=-1}=16$$

$$K_2=\left|\frac{d}{ds}(24+8s)\right|_{s=-1}=8$$

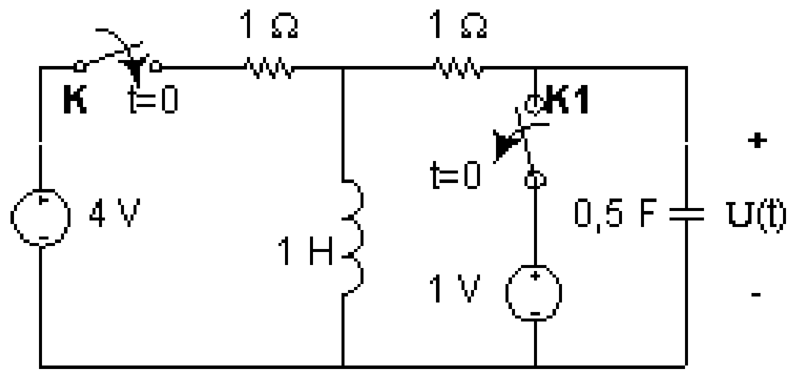
Vậy: $u(t)=\left((16t+8)e^{-t}\right).1(t)\ [\text{V}]$



4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 4

Cho mạch như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ?



Giải

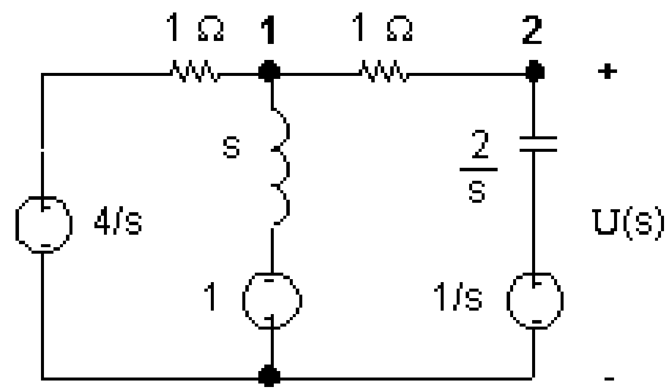
- t < 0 :

$$i_L(0^-) = 1\text{ A và } u_C(0^-) = 1\text{ V.}$$

- t > 0 :

Sơ đồ toán tử và thế nút:

$$\begin{bmatrix} 2+\dfrac{1}{s} & -1 \\ -1 & 1+\dfrac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{s}-\dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$



4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

$$\begin{cases}(2s+1)\varphi_1 - s\varphi_2 = 3\\ -2\varphi_1 + (s+2)\varphi_2 = 1\end{cases}$$

$$\varphi_2 = \frac{2s+1+6}{(s+2)(2s+1)-2s} = \frac{2s+7}{2s^2+3s+2} = U(s)$$

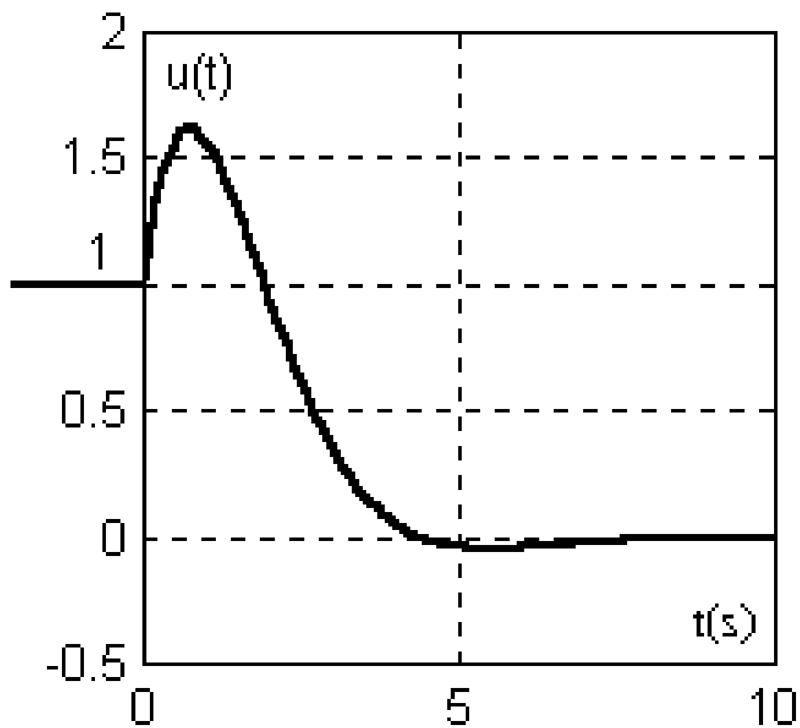
Tìm u(t) : nghiệm phức

$$s_1 = -\frac{3}{4} + j\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{B(s_1)}{A'(s_1)} = \left.\frac{2s+7}{4s+3}\right|_{s1} = \frac{-3+j\sqrt{7}+14}{-6+j2\sqrt{7}+6}$$

$$= 0,5 - j2 = 2,13\angle -76,5^o$$

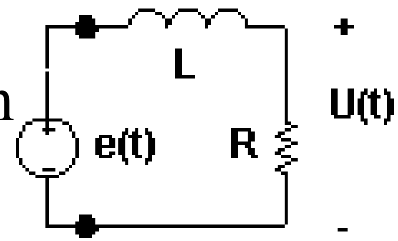
$$u(t) = 4,26e^{-0,75t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - 76,5^o\right)$$

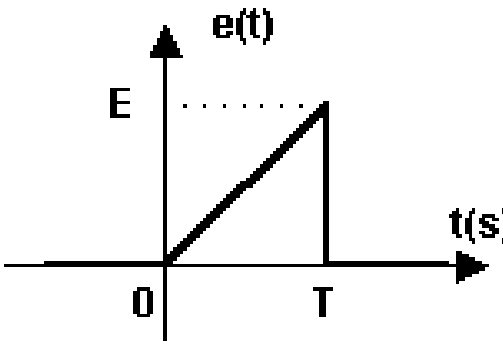


4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖ Ví dụ 5

Cho mạch như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ? (T=L/R)





Giải

- t < 0 :

  $i_L(0^-) = 0$.

- t > 0

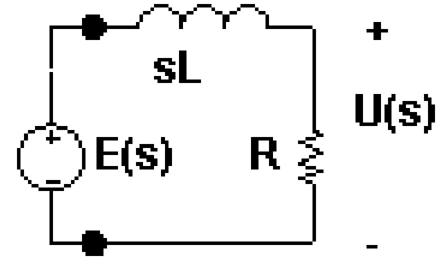
Ảnh của nguồn *e(t)*

$$e(t) = \frac{E}{T}t\left[1(t) - 1(t-T)\right] = \frac{E}{T}t.1(t) - \frac{E}{T}(t-T).1(t-T) - E.1(t-T)$$

$$\rightarrow E(s) = \frac{E}{T}\frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-sT}\right] - \frac{E}{s}e^{-sT}$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

Sơ đồ toán tử của mạch như hình bên



Tìm ảnh U(s) : $U(s) = E(s)\dfrac{R}{sL+R} = \dfrac{E(s)}{T}\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{T}}$

$$U(s) = \frac{E}{T^2}\frac{1}{s^2\left(s+\dfrac{1}{T}\right)}\left[1-e^{-sT}\right] - \frac{E}{T}\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T}\right)}e^{-sT}$$

Với : $U(s) = F_1(s)\left[1-e^{-sT}\right] - F_2(s)e^{-sT}$

$$f_1(t) = E\left(\frac{1}{T}t - 1 + e^{\frac{-t}{T}}\right).\,\mathbf{1}(t) \qquad f_2(t) = E\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right).\,\mathbf{1}(t)$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

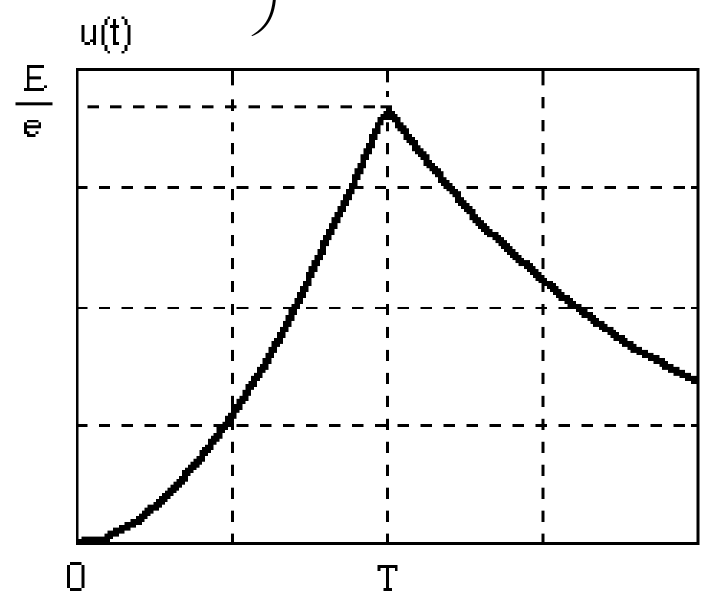
Tìm hàm gốc u(t) : $U(s) = F_1(s)\left[1 - e^{-sT}\right] - F_2(s)e^{-sT}$

$$f_1(t) = E\left(\frac{1}{T}t - 1 + e^{\frac{-t}{T}}\right).1(t) \qquad f_2(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right).1(t)$$

$$u(t) = E\left(\frac{1}{T}t - 1 + e^{\frac{-t}{T}}\right).1(t) - E\left(\frac{1}{T}(t-T) - 1 + e^{\frac{-(t-T)}{T}}\right).1(t-T)$$

$$-E\left(1 - e^{\frac{-(t-T)}{T}}\right).1(t-T)$$

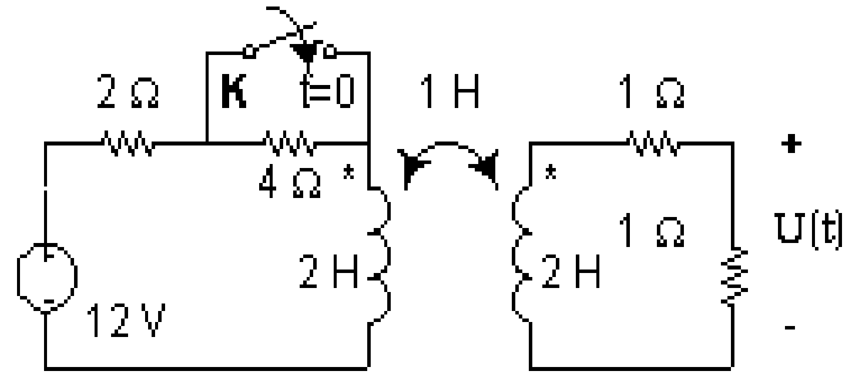
$$u(t) = \begin{cases} E\left(\frac{1}{T}t - 1 + e^{\frac{-t}{T}}\right); (0 < t < T) \\ Ee^{\frac{-t}{T}}; (t > T) \end{cases}$$



4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 6

Cho mạch như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ?



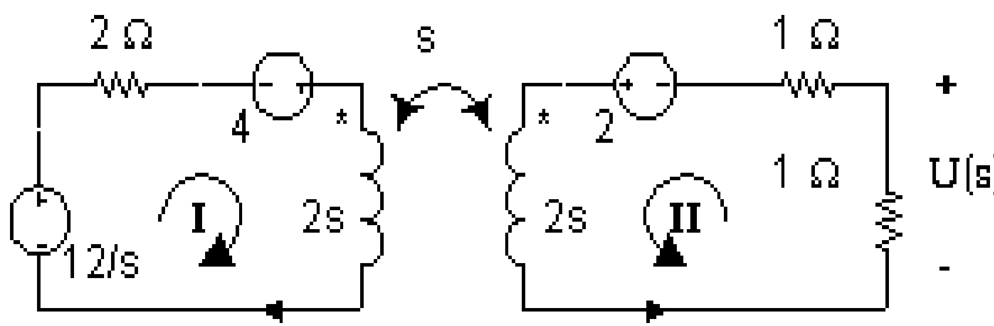
Giải

- t < 0 :

  $i_{L1}(0^-) = 2$ A ; $i_{L2}(0^-) = 0$

- t > 0 :

Sơ đồ toán tử : như hình bên



Lưu ý: $L_1 i_{L1}(0^-) = 4$

$M i_{L1}(0^-) = 2$

Tìm U(s) : Dùng dòng mắc lưới

$$\begin{bmatrix} 2s+2 & s \\ s & 2s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{s}+4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

$$\begin{bmatrix} 2s+2 & s \\ s & 2s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{s}+4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2s+2 & \frac{12}{s}+4 \\ s & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s+2 & s \\ s & 2s+2 \end{vmatrix}} = \frac{(2s+2)2-(\frac{12}{s}+4)s}{(2s+2)^2-s^2} = \frac{-8}{3s^2+8s+4}$$

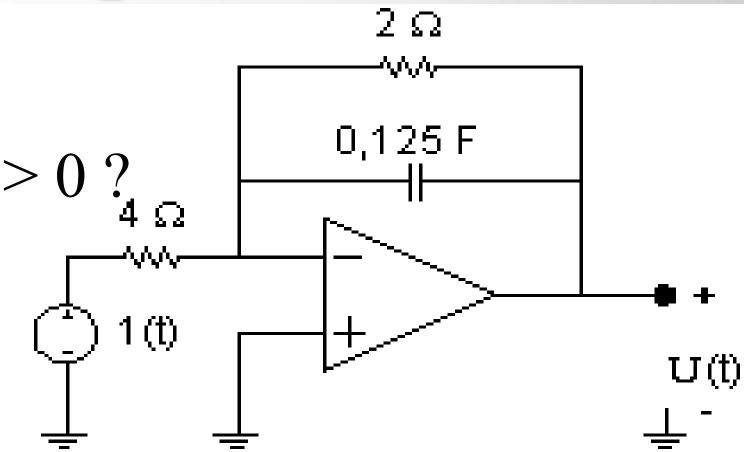
$$\rightarrow U(s) = -1\, I_2(s) = \frac{8}{3s^2+8s+4} = \frac{8}{3}\frac{1}{(s+\frac{2}{3})(s+2)} = \frac{2}{(s+\frac{2}{3})} - \frac{2}{(s+2)}$$

Vậy : $u(t) = 2(e^{\frac{-2}{3}t} - e^{-2t}).1(t)\ [\mathrm{V}]$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

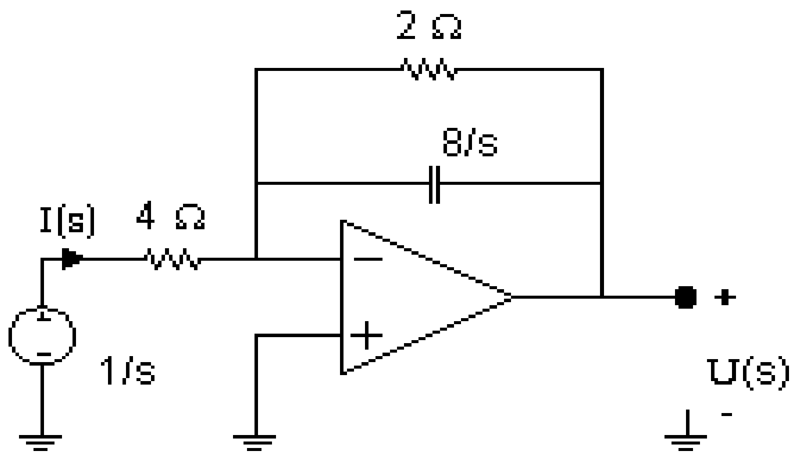
❖Ví dụ 7

Mạch như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ?



Giải

- t < 0 : $u_C(0^-) = 0$.
- t > 0 : Sơ đồ toán tử : như hình bên



$$U(s) = -Z_{td} I(s)$$

Với
$$\begin{cases} Z_{td} = \dfrac{2.\frac{8}{s}}{2+\frac{8}{s}} = \dfrac{8}{s+4} \\ I(s) = \dfrac{\frac{1}{s}}{4} = \dfrac{1}{4s} \end{cases}$$

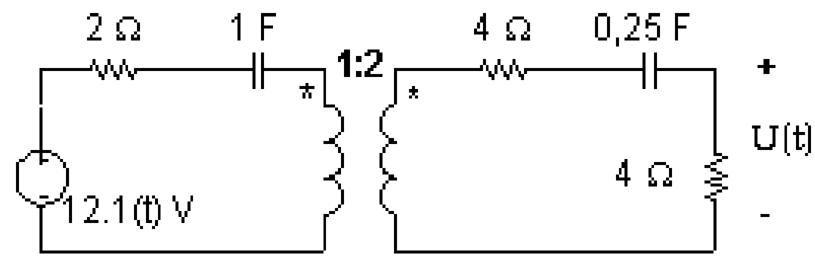
$$\rightarrow U(s) = \frac{-2}{s(s+4)} = -\frac{0,5}{s} + \frac{0,5}{s+4}$$

Vậy $u(t) = 0,5(-1+e^{-4t}).1(t)$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 8

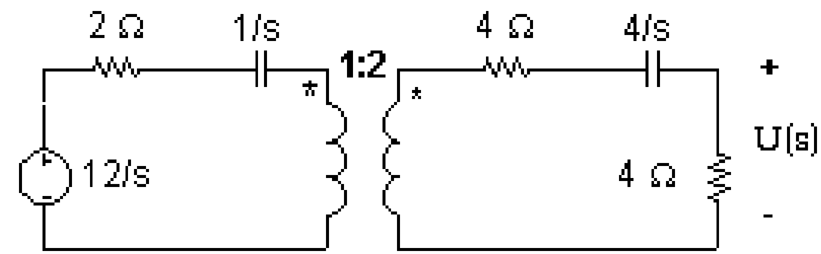
Cho mạch như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ?



Giải

- t < 0 :

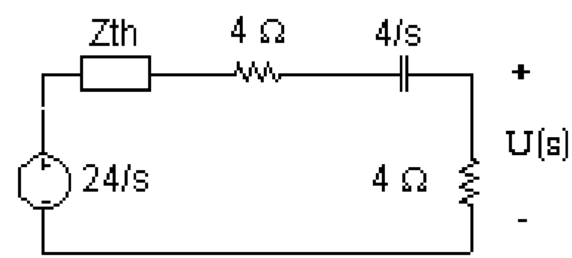
$u_{C1}(0^-) = 0$; $u_{C2}(0^-) = 0$.



- t > 0 :

Sơ đồ toán tử : dùng qui đổi trở kháng

$Z_{th} = 4(2 + 1/s)$



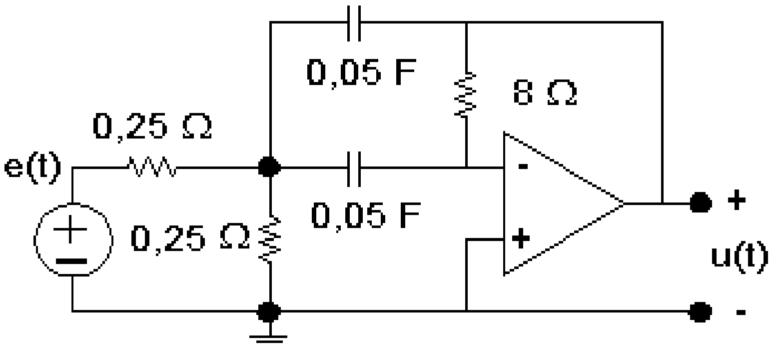
$$U(s) = \frac{24}{s}\frac{4}{Z_{th} + 4 + \frac{4}{s} + 4} = \frac{24}{4s + 2} = \frac{6}{s + 0,5}$$

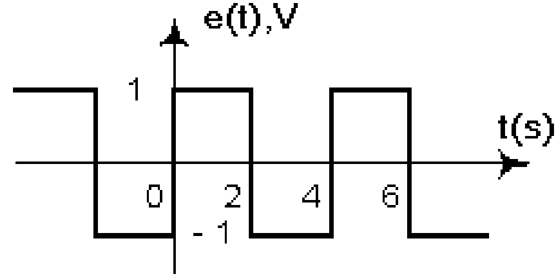
Vậy : $u(t) = 6e^{-0,5t}.1(t)$ [V]

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖Ví dụ 9

Mạch & nguồn e(t) như hình bên, xác định u(t) tại t > 0 ? (giả sử $u_C(0^-) = 0$)





Giải

➢ Tìm ảnh Laplace của f(t) : hàm mô tả e(t) trong một chu kỳ.

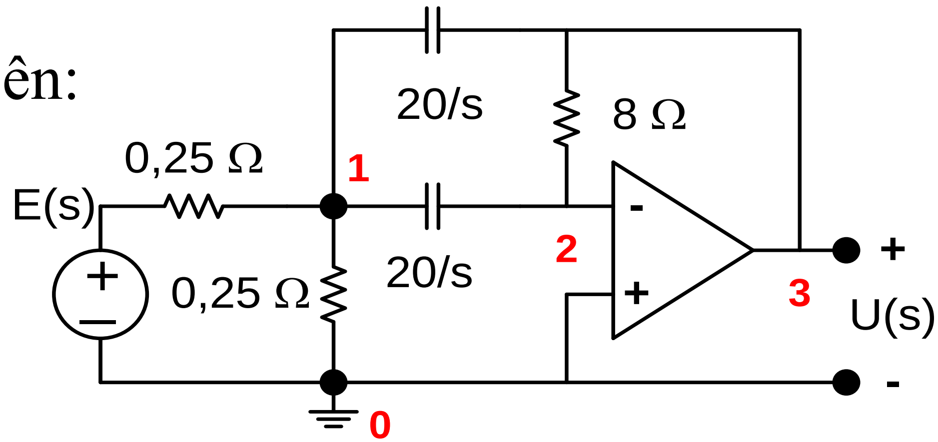
$$f(t) = 1\left[1(t) - 2(t - \tfrac{T}{2}) + 1(t - T)\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left[1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}\right]$$

➢ Ảnh Laplace của e(t) $\qquad E(s) = \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}\right]$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

- Sơ đồ toán tử như hình bên:
  (sơ kiện bằng 0)



- Tìm U(s) theo thế nút :

$$\begin{cases} \varphi_1(8+0,1s)-\varphi_2(0,05s)-\varphi_3(0,05s)=4E(s) \\ -\varphi_1(0,05s)+\varphi_2(0,05s+0,125)-\varphi_3(0,125)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(s) = -\frac{80s.E(s)}{s^2+5s+400}$$

$$U(s)=\frac{-8\quad 0}{s^2+5s+400}\left[\frac{1-2e^{-s\frac{T}{2}}+e^{-sT}}{1-e^{-sT}}\right]=G(s)\left[\frac{1-2e^{-s\frac{T}{2}}+e^{-sT}}{1-e^{-sT}}\right]$$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖ Tìm hàm gốc u(t) :

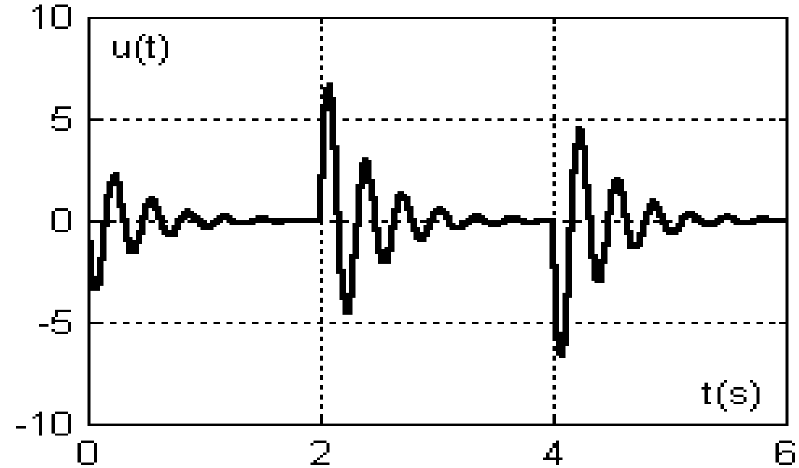
$$G(s) = \frac{-80}{s^2 + 5s + 400} \quad \Rightarrow g(t) = -4,03.e^{-2,5t}.\sin(19,8t)$$

$$H(s) = G(s)\left(1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}\right) \Rightarrow h(t) = g(t).1(t) - 2g(t - \tfrac{T}{2}).1(t - \tfrac{T}{2}) + g(t-T).1(t-T)$$

$$U(s) = \frac{-80}{s^2 + 5s + 400}\left[\frac{1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}\right] = \frac{H(s)}{1 - e^{-sT}} \quad \Rightarrow u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(t + nT)$$

✓ Lưu ý là $t_{qđ} = 3\tau = 1,2$ (s)

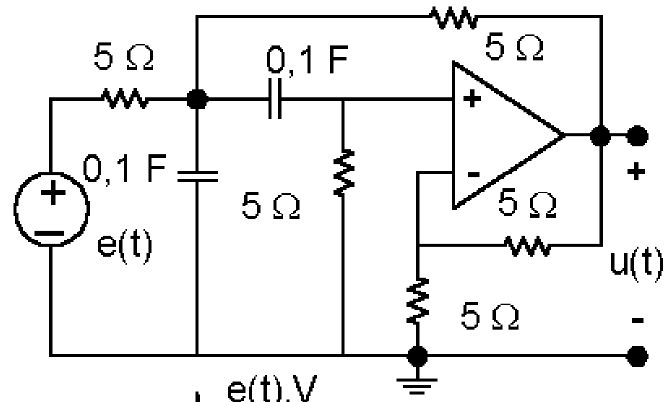
→ xác lập sau mỗi bán kỳ 2s

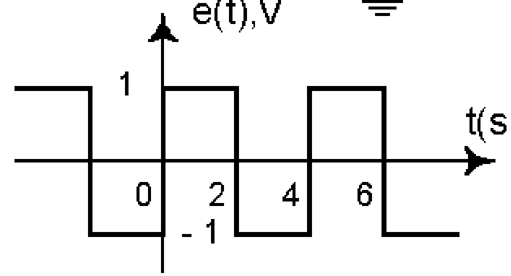


4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖ Ví dụ 10

➢ Xác định u(t) tại t > 0 , giả sử $u_C(0^-) = 0$?





Giải

➢ Tìm ảnh Laplace của f(t) : hàm mô tả e(t) trong một chu kỳ.

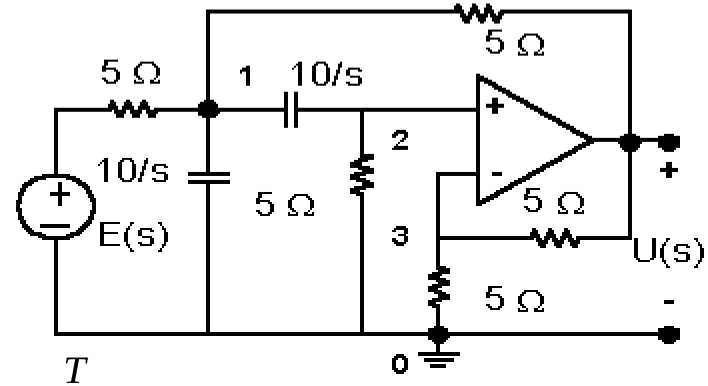
$$f(t) = 1\left[1(t) - 2(t - \tfrac{T}{2}) + 1(t - T)\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left[1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}\right]$$

➢ Ảnh Laplace của e(t) $\quad E(s) = \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{1 - 2e^{-s\frac{T}{2}} + e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}\right]$

4.3.4 Ví dụ pp toán tử Laplace

❖ Tìm U(s) theo thế nút :



$$\begin{cases} 2(s+2)\varphi_1 - s\varphi_2 - 2U = 2E(s) \\ -s\varphi_1 + (s+2)\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{4s.E(s)}{s^2+4s+8} = \frac{4}{s^2+4s+8}\,\frac{1-2e^{-s\frac{T}{2}}+e^{-sT}}{1-e^{-sT}}$$

$$F(s) = \frac{4}{s^2+4s+8} \quad \Rightarrow f(t) = 2.e^{-2t}.\sin(2t).1(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = f(t).1(t) - 2f(t-\tfrac{T}{2}).1(t-\tfrac{T}{2}) + f(t-T).1(t-T)$$

$$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(t+nT)$$

✓ Lưu ý là $t_{qđ} = 3\tau = 1{,}5$ (s)

→ xác lập sau mỗi bán kỳ 2s