ĐH Bách Khoa TP.HCM – Khoa Điện-Điện Tử – Bộ Môn Thiết Bị Điện

Bài giảng: Biến đổi năng lượng điện cơ

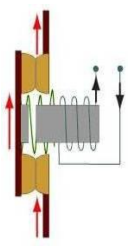
Chương 4:
Giải tích hệ thống điện cơ dùng các phương pháp năng lượng

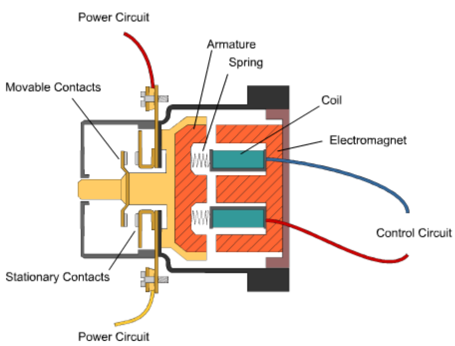
Biên soạn: Nguyễn Quang Nam
Cập nhật: Trần Công Binh

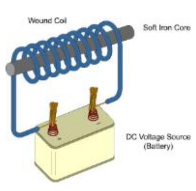
NH2012–2013, HK2

Bài giảng 3 1

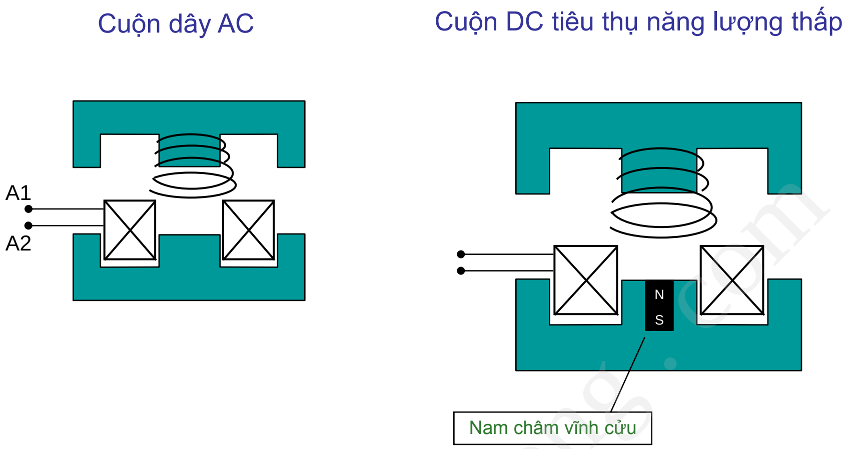
- Khởi động từ - Contactor
  - Đóng cắt điện cho phụ tải, bằng cuộn dây







Mạch từ contactor



Hệ thống điện cơ – Giới thiệu

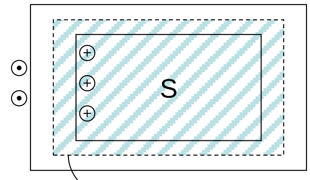
- Mạch từ với một phần tử chuyển động sẽ được khảo sát.
- Mô hình toán cho các hệ thống điện cơ thông số tập trung sẽ được rút ra.
- Một hay nhiều hệ cuộn dây tương tác để tạo ra lực hay mômen trên hệ cơ sẽ được khảo sát.

Hệ thống điện cơ – Giới thiệu (tt)

- Một cách tổng quát, cả dòng điện trong cuộn dây lẫn lực/mômen sẽ biến thiên theo thời gian.
- Một hệ phương trình vi phân điện cơ có tương quan được rút ra, và chuyển thành dạng không gian trạng thái, thuận tiện cho việc mô phỏng trên máy tính, phân tích, và thiết kế.

Hệ tịnh tiến – Áp dụng các định luật điện từ

- Xét hệ thống trong hình 4.1



- Định luật Ampere

$$\oint_C \underline{H} \bullet \underline{dl} = \int_S \underline{J}_f \bullet \underline{\eta} \cdot da$$

trở thành $Hl = Ni$

- Định luật Faraday $\oint_C \underline{E} \bullet \underline{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \underline{B} \bullet \underline{\eta} \cdot da$

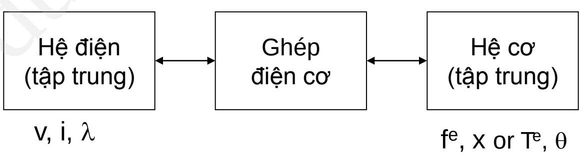
trở thành

$$v = \frac{d}{dt}(N\Phi) = \frac{d\lambda}{dt}$$

Hệ tịnh tiến – Áp dụng các định luật điện từ (tt)

- Việc áp dụng định luật Gauss còn tùy thuộc vào hình dạng, và cần thiết cho hệ thống với các cường độ từ trường H khác nhau.
- Định luật bảo toàn điện tích sẽ dẫn đến KCL.

Cấu trúc của một hệ thống điện cơ



- Với các hệ chuyển động tịnh tiến, $\lambda = \lambda(i, x)$.
- Khi hình dạng của mạch từ là đơn giản, theo định luật Faraday

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial i}\frac{di}{dt}}_{\text{Điện áp biến áp}} + \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{dx}{dt}}_{\text{Điện áp tốc độ}}$$

Hệ tuyến tính về điện

$$\lambda = L(x)i$$

Như vậy,

$$v = L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt}$$

➢ Với hệ không có phần tử chuyển động

$$\lambda = Li \qquad \text{và} \qquad v = L\frac{di}{dt}$$

➢ Với hệ có nhiều cửa

$$v_k = \frac{d\lambda_k}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\lambda_k}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

➢ Lực và từ thông móc vòng có thể là hàm của tất cả các biến.

Ví dụ 4.1

◈ Tìm H_1, H_2, λ, và v, với các giả thiết sau: 1) $\mu = \infty$ với lõi, 2) g >> w, x >> 2w và 3) không có từ thông tản.

Chọn mặt kín thích hợp, áp dụng định luật Gauss

$$2(\mu_0 H_1)(wd) - \mu_0 H_2(2wd) = 0$$

Dẫn đến

$$H_1 = H_2 = \frac{Ni}{g+x}$$

Rút ra từ thông (tính theo từ cảm B_1 chẳng hạn):

$$\Phi = \frac{2wd\mu_0 Ni}{g+x}$$

Ví dụ 4.1 (tt)

Từ thông móc vòng

$$\lambda = N\Phi = \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{g+x}$$

Điện cảm (của hệ tuyến tính về điện)

$$L(x) = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}$$

Điện áp cảm ứng

$$v(t) = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x}\frac{di}{dt} - \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{(g+x)^2}\frac{dx}{dt}$$

Hệ thống chuyển động quay

➢ Vd. 4.2: Hình 4.7. Tìm λ_s, λ_r làm hàm của i_s, i_r, và θ, và tìm v_s và v_r của rôto hình trụ. Giả thiết $\mu = \infty$, và g << R và l.

Có thể chứng minh được:

$$H_{r1} = \frac{N_s i_s - N_r i_r}{g} = -H_{r3} \qquad H_{r2} = \frac{N_s i_s + N_r i_r}{g} = -H_{r4}$$

Sau khi tính được các cường độ từ trường, từ thông móc vòng được xác định bởi:

$$\lambda_s = N_s\phi_s = N_s\mu_0 H_{r1}R\theta l + N_s\mu_0 H_{r2}R(\pi-\theta)l$$

Hệ thống chuyển động quay (tt)

➢ Vd. 4.2 (tt)

Rút gọn thành

$$\lambda_s = N_s^2 L_0 i_s + N_s N_r L_0 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) i_r \qquad 0 < \theta < \pi$$

Tương tự,

$$\lambda_r = N_s N_r L_0 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) i_s + N_r^2 L_0 i_r \qquad 0 < \theta < \pi$$

Tính đạo hàm các từ thông móc vòng sẽ có được điện áp.

Trong các máy thực tế, người thường chế tạo để

$$v_s(t) = L_s \frac{di_s}{dt} + M\cos(\theta)\frac{di_r}{dt} - i_r M \sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

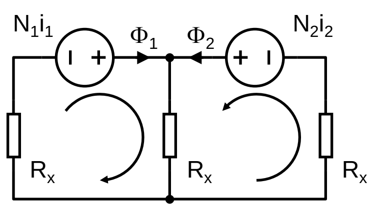
Ví dụ 4.4

◈ Tính λ_1 và λ_2 và xác định tự cảm và hỗ cảm cho hệ trong hình 4.14, dùng mạch từ tương đương.

$$R_x = \frac{x}{\mu_0 A} = \frac{x}{\mu_0 W^2}$$

$$N_1 i_1 = 2R_x \Phi_1 + R_x \Phi_2$$

$$N_2 i_2 = R_x \Phi_1 + 2R_x \Phi_2$$



$$\lambda_1 = N_1 \Phi_1 = \frac{\mu_0 W^2}{3x}\left(2N_1^2 i_1 - N_1 N_2 i_2\right)$$

$$\lambda_2 = N_2 \Phi_2 = \frac{\mu_0 W^2}{3x}\left(-N_1 N_2 i_1 + 2N_2^2 i_2\right)$$

Tính lực bằng khái niệm năng lượng

- Lực $f^e = f^e(i, x) = f^e(\lambda, x)$ (vì i có thể được tính từ $\lambda = \lambda(i, x)$) với hệ có một cửa điện và một cửa cơ.
- *f^e luôn luôn tác động theo chiều dương của x*.
- Xét hệ trong hình 4.17, được chuyển thành sơ đồ trong hình 4.18. Gọi W_m là năng lượng lưu trữ, theo nguyên tắc bảo toàn năng lượng (viết dưới dạng công suất)

Tốc độ thay đổi năng lượng lưu trữ	=	Công suất điện đưa vào	–	Công suất cơ lấy ra

Tính lực bằng khái niệm năng lượng (tt)

$$\frac{dW_m}{dt} = vi - f^e \frac{dx}{dt} = i\frac{d\lambda}{dt} - f^e \frac{dx}{dt}$$

hay $$dW_m = id\lambda - f^e dx$$

- Một biến điện và một biến cơ có thể được chọn tùy ý, mà không vi phạm các quy tắc vật lý của bài toán. Giả sử (λ, x) được chọn.
- Vì môi trường liên kết được bảo toàn, độ thay đổi năng lượng lưu trữ khi đi từ a đến b trong mặt phẳng λ – x là độc lập với đường lấy tích phân (hình 4.19).

Tính lực (tt)

- Với đường A

$$W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(\lambda_a, x_a) = -\int_{x_a}^{x_b} f^e(\lambda_a, x)dx + \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} i(\lambda, x_b)d\lambda$$

- Với đường B

$$W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(\lambda_a, x_a) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} i(\lambda, x_a)d\lambda - \int_{x_a}^{x_b} f^e(\lambda_b, x)dx$$

- Cả hai phương pháp sẽ phải cho ra cùng kết quả.
- Nếu $\lambda_a = 0$, không có lực sinh ra bởi điện năng, khi đó đường A dễ tính hơn, với

$$W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(0, x_a) = \int_0^{\lambda_b} i(\lambda, x_b)d\lambda$$

- Có thể tổng quát hóa thành $\boxed{W_m(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda, x)d\lambda}$

Quan hệ lực và năng lượng

- Nhớ lại

$$dW_m = id\lambda - f^e dx$$

- Vì $W_m = W_m(\lambda, x)$, vi phân của W_m có thể được biểu diễn

$$dW_m = \frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x}dx$$

- So sánh hai phương trình, cho ta

$$\boxed{i = \frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial \lambda}}$$

tính được: $\boxed{W_m(\lambda, x) = \int_0^{\lambda} i(\lambda, x)d\lambda}$

$$\boxed{f^e = -\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x}}$$

Mạch từ tuyến tính: $\boxed{W_m(\lambda, x) = \frac{1}{2}\lambda i}$

Ví dụ 4.5

- Tính $f^e(\lambda, x)$ và $f^e(i, x)$ của hệ thống trong ví dụ 4.1.

Từ ví dụ 4.1

$$\lambda = N\Phi = \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{g+x} = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g}\frac{i}{1+x/g} = L_0\frac{i}{1+x/g}$$

Để tính W_m, cần có i là một hàm của λ và x

$$i = \frac{\lambda}{L_0}(1+x/g)$$

Tính được

$$W_m = \int_0^\lambda i(\lambda, x)d\lambda = \int_0^\lambda \frac{\lambda}{L_0}(1+x/g)d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L_0}(1+x/g)$$

Ví dụ 4.5 (tt)

Tính f^e theo λ và g

$$f^e = -\frac{\partial W_m}{\partial x}(\lambda, x) = -\frac{\lambda^2}{2L_0 g}$$

Tính f^e theo i và g (thay biểu thức của λ theo i và g vào)

$$f^e(i,x) = -\frac{L_0^2 i^2}{2L_0 g(1+x/g)^2} = -\frac{1}{2}\frac{L_0 i^2}{(1+x/g)^2}$$

Tính lực bằng khái niệm đồng năng lượng

- Để tính $W_m(\lambda, x)$, cần có $i = i(\lambda, x)$. Việc này có thể không dễ dàng. Có thể sẽ thuận tiện hơn nếu tính f^e trực tiếp từ $\lambda = \lambda(i, x)$.

$$d(\lambda i) = id\lambda + \lambda di \quad \Rightarrow \quad id\lambda = d(\lambda i) - \lambda di$$

$$dW_m = d(\lambda i) - \lambda di - f^e dx \quad \Rightarrow \quad d(\lambda i - W_m) = \lambda di + f^e dx$$

- Định nghĩa đồng năng lượng là

$$\boxed{\lambda i - W_m = W_m^{'} = W_m^{'}(i, x)}$$

Tính lực bằng khái niệm đồng năng lượng (tt)

- Lấy tích phân dW'_m dọc đường Ob'b (hình 4.21), $f^e = 0$ dọc Ob'

$$\boxed{W_m^{'}(i, x) = \int_0^i \lambda(i, x) di}$$

Mạch từ tuyến tính: $\boxed{W'_m(i, x) = \frac{1}{2}\lambda i}$

- Về mặt toán học,

$$dW_m^{'} = \frac{\partial W_m^{'}}{\partial i} di + \frac{\partial W_m^{'}}{\partial x} dx$$

- Do đó (từ slide 19)

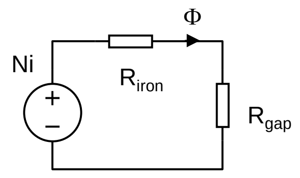
$$\boxed{\lambda = \frac{\partial W'_m(i, x)}{\partial i}} \qquad \boxed{f^e = \frac{\partial W'_m(i, x)}{\partial x}}$$

Ví dụ 4.8

- Tìm f^e cho hệ trong hình 4.22.

$$R_{iron} = \frac{l_c}{\mu A} \qquad R_{gap} = \frac{2x}{\mu_0 A}$$

$$\Phi = \frac{Ni}{R_{iron} + R_{gap}} = \frac{Ni}{\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}} = \frac{Ni}{R(x)}$$



- Từ thông móc vòng và đồng năng lượng

$$\lambda = N\Phi = \frac{N^2 i}{R(x)} \qquad W_m' = \int_0^i \lambda(i,x)di = \frac{N^2 i^2}{2R(x)}$$

- Lực điện từ (sinh ra bởi điện năng)

$$f^e = \frac{\partial W_m'}{\partial x} = \frac{N^2 i^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R(x)}\right) = -\frac{N^2 i^2}{\mu_0 A\left(\frac{l_c}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}\right)^2}$$

Biểu diễn hình học của năng lượng và đồng năng lượng

- Trong các hệ tuyến tính (về điện), cả năng lượng lẫn đồng năng lượng đều bằng nhau về trị số. Trong hình 4.24,

$$W_m = \int_0^\lambda i(\lambda,x)d\lambda = \text{Vùng A} \qquad W_m' = \int_0^i \lambda(i,x)di = \text{Vùng B}$$

- Nếu $\lambda(i, x)$ là một hàm phi tuyến như minh họa trên hình 4.25, khi đó hai diện tích sẽ không có trị số bằng nhau. Tuy nhiên, f^e rút ra bằng năng lượng hay đồng năng lượng sẽ như nhau.

Biểu diễn hình học của năng lượng và đồng năng lượng

- Có thể chứng minh như sau.
- Trước tiên, giữ λ cố định, năng lượng W_m được giảm một lượng $-\Delta W_m$ như trên hình 4.26(a) đối với việc tăng một lượng Δx. Tiếp đó, giữ i không đổi, đồng năng lượng tăng một lượng $\Delta W'_m$ khi x thay đổi 1 lượng Δx. Lực điện từ (do điện năng sinh ra) trong cả hai trường hợp

$$f^e = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta x} \qquad f^e = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W'_m}{\Delta x}$$

Lực trong hệ 2 cửa điện – 1 cửa cơ

- Xét một hệ có 2 cửa điện và 1 cửa cơ, với $\lambda_1 = \lambda_1(i_1, i_2, x)$ và $\lambda_2 = \lambda_2(i_1, i_2, x)$. Tốc độ thay đổi năng lượng lưu trữ

$$\frac{dW_m}{dt} = v_1 i_1 + v_2 i_2 - f^e \frac{dx}{dt} = i_1 \frac{d\lambda_1}{dt} + i_2 \frac{d\lambda_2}{dt} - f^e \frac{dx}{dt}$$

hay

$$dW_m = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 - f^e dx$$

Xét

$$i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2 = d(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) - \lambda_1 di_1 - \lambda_2 di_2$$

Lực trong hệ 2 cửa điện – 1 cửa cơ (tt)

Như vậy,

$$d(\underbrace{\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 - W_m}_{W_m^{'}}) = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$$

$$\Longrightarrow \quad dW_m^{'} = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$$

Sau cùng,

$$W_m^{'}(i_1, i_2, x) = \int_0^{i_1} \lambda_1(i_1^{'}, 0, x) di_1^{'} + \int_0^{i_2} \lambda_2(i_1, i_2^{'}, x) di_2^{'}$$

Lực trong hệ nhiều cửa tổng quát

- Xét một hệ có N cửa điện và M cửa cơ, các từ thông móc vòng là $\lambda_1(i_1, ..., i_N, x_1, ..., x_M)$, ..., $\lambda_N(i_1, ..., i_N, x_1, ..., x_M)$.

$$dW_m = d\lambda_1 i_1 + ... + d\lambda_N i_N - f_1^e dx_1 - ... - f_M^e dx_M$$

$$d(\lambda_1 i_1 + ... + \lambda_N i_N) = (d\lambda_1 i_1 + ... + d\lambda_N i_N) + (\lambda_1 di_1 + ... + \lambda_N di_N)$$

- Tương tự như với trường hợp có 2 cửa điện và 1 cửa cơ:

$$d\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i i_i - W_m\right)}_{W_m^{'}} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i di_i + \sum_{i=1}^{M} f_i^e dx_i$$

Lực trong hệ nhiều cửa tổng quát (tt)

➢ Rút ra công thức tổng quát để tính từ thông móc vòng và lực điện từ:

$$\boxed{\lambda_i = \frac{\partial W_m^{'}}{\partial i_i} \quad i = 1,\ldots, N}$$

$$\boxed{f_i^{\,e} = \frac{\partial W_m^{'}}{\partial x_i} \quad i = 1,\ldots, M}$$

Tính đồng năng lượng W’$_m$

➢ Để tính W’$_m$, việc tính tích phân được thực hiện trước tiên dọc các trục x_i, rồi dọc mỗi trục i_i. Khi tính tích phân dọc x_i, W’$_m$ = 0 vì f^e bằng 0. Khi đó,

$$W_m^{'} = \int_0^{i_1} \lambda_1\left(i_1^{'}, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di_1^{'}$$
$$+ \int_0^{i_2} \lambda_2\left(i_1, i_2^{'}, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di_2^{'} + \ldots$$
$$+ \int_0^{i_N} \lambda_N\left(i_1, i_2, \ldots, i_{N-1}, i_N^{'}, x_1, x_2, \ldots x_M\right) di_N^{'}$$

Tính đồng năng lượng W'$_m$ (tt)

➢ Chú ý các biến dùng để tính tích phân. Với trường hợp đặc biệt của hệ 2 cửa điện và 2 cửa cơ,

$$W_m^{'} = \int_0^{i_1} \lambda_1\left(i_1^{'},0,x_1,x_2\right)di_1^{'} + \int_0^{i_2} \lambda_2\left(i_1,i_2^{'},x_1,x_2\right)di_2^{'}$$

Và,

$$f_1^e = \frac{\partial W_m^{'}}{dx_1}$$

$$f_2^e = \frac{\partial W_m^{'}}{dx_2}$$

Ví dụ 4.10

◈ Tính W'$_m$ và mômen (do điện sinh ra) của một hệ 3 cửa điện và 1 cửa cơ, với các từ thông móc vòng cho trước.

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + Mi_3\cos(\phi-\psi) \qquad \lambda_2 = L_{22}i_2 + Mi_3\sin(\phi-\psi)$$

$$\lambda_3 = L_{33}i_3 + Mi_1\cos(\phi-\psi) + Mi_2\sin(\phi-\psi)$$

Đồng năng lượng:

$$W_m^{'} = \int_0^{i_1} \lambda_1\left(i_1^{'},0,0,\phi,\psi\right)di_1^{'} + \int_0^{i_2} \lambda_2\left(i_1,i_2^{'},0,\phi,\psi\right)di_2^{'} + \int_0^{i_3} \lambda_3\left(i_1,i_2,i_3^{'},\phi,\psi\right)di_3^{'}$$

$$= \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + \frac{1}{2}L_{33}i_3^2 + Mi_1i_3\cos(\phi-\psi) + Mi_2i_3\sin(\phi-\psi)$$

Ví dụ 4.10 (tt)

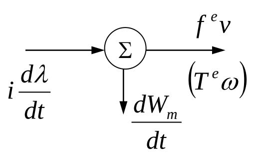
Mặc dù chỉ có 1 cửa cơ, hệ được mô tả bởi 2 biến cơ học (các góc quay). Do đó, các thành phần lực xoắn (mômen) là

$$T_\phi^e = \frac{\partial W_m^{'}}{\partial \phi} = -Mi_1 i_3 \sin(\phi - \psi) + Mi_2 i_3 \cos(\phi - \psi)$$

$$T_\psi^e = \frac{\partial W_m^{'}}{\partial \psi} = Mi_1 i_3 \sin(\phi - \psi) - Mi_2 i_3 \cos(\phi - \psi)$$

Biến đổi năng lượng – Kiểm tra tính bảo toàn

➢ Bỏ qua tổn thất trong từ trường, có thể rút ra quan hệ đơn giản cho hệ ghép,



Nhớ lại

$$f^e = -\frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial x} \qquad i = \frac{\partial W_m(\lambda, x)}{\partial \lambda}$$

Và chú ý rằng

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial \lambda \partial x} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial x \partial \lambda}$$

➢ Điều kiện cần và đủ để cho hệ là bảo toàn sẽ là

$$\frac{\partial i(\lambda, x)}{\partial x} = -\frac{\partial f^e(\lambda, x)}{\partial \lambda}$$ hay $$\frac{\partial \lambda(i, x)}{\partial x} = \frac{\partial f^e(i, x)}{\partial i}$$

Hệ thống 2 cửa điện và 1 cửa cơ

- Với hệ này

$$dW_m' = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 + f^e dx$$

- Các phương trình cho từ thông và lực (do điện sinh ra) là

$$\lambda_1 = \frac{\partial W_m'}{\partial i_1} \qquad \lambda_2 = \frac{\partial W_m'}{\partial i_2} \qquad f^e = \frac{\partial W_m'}{\partial x}$$

- Các điều kiện cho sự bảo toàn là

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{\partial f^e}{\partial i_1} \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{\partial f^e}{\partial i_2} \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial i_2} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial i_1}$$

- Điều này có thể mở rộng cho các hệ có nhiều cửa điện và nhiều cửa cơ.

Biến đổi năng lượng giữa hai điểm

- Nhớ lại

$$dW_m = i(\lambda, x)d\lambda + \left(- f^e(\lambda, x)dx\right)$$

- Khi đi từ a đến b trong hình 4.31, độ thay đổi năng lượng lưu trữ là

$$W_m(\lambda_b, x_b) - W_m(\lambda_a, x_a) = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} i d\lambda + \left[-\int_{x_a}^{x_b} f^e dx \right]$$

$$\Delta W_m\Big|_{a\to b} = EFE\Big|_{a\to b} + EFM\Big|_{a\to b}$$

Biến đổi năng lượng giữa hai điểm (tt)

Với EFE viết tắt cho "energy from electrical" (năng lượng từ hệ điện) và EFM viết tắt "energy from mechanical" (năng lượng từ hệ cơ).

➢ Để đánh giá EFE và EFM, cần có một đường đi cụ thể. Khái niệm EFM này có ích trong việc nghiên cứu sự biến đổi năng lượng theo chu kỳ của thiết bị.

Biến đổi năng lượng trong 1 chu kỳ

➢ Trong 1 chu kỳ, khi hệ thống trở về trạng thái khởi đầu, $dW_m = 0$.

$$0 = \oint i d\lambda - \oint f^e dx = \oint i d\lambda + \left(-\oint f^e dx\right)$$

➢ Từ hình 4.30, $id\lambda$ = EFE, và $-f^e dx$ = EFM. Như vậy, trong 1 chu kỳ,

$$\oint EFE + \oint EFM = 0 \quad \text{hay} \quad EFE|_{cycle} + EFM|_{cycle} = 0$$

➢ Có thể tính EFE hoặc EFM trong 1 chu kỳ. Nếu $EFE|_{cycle} > 0$, hệ thống đang hoạt động như một động cơ, và $EFM|_{cycle} < 0$. Nếu $EFE|_{cycle} < 0$, hệ thống đang vận hành như một máy phát, và $EFM|_{cycle} > 0$.

Động học của hệ tập trung – Hệ khối lượng-lò xo

- Các phần tử tập trung của hệ cơ: khối lượng (động năng), lò xo (thế năng), và bộ đệm (tiêu tán). Định luật Newton được dùng cho phương trình chuyển động.
- Xét khối lượng M = W/g được treo trên lò xo có độ cứng K. Ở điều kiện cân bằng tĩnh, trọng lực W = Mg được cân bằng bởi lực lò xo Kl, với l là độ giãn của lò xo gây ra bởi khối lượng W.

Động học của hệ tập trung – Hệ khối lượng-lò xo

- Nếu vị trí cân bằng được chọn làm gốc, chỉ có lực sinh ra bởi dịch chuyển cần được xem xét. Xét mô hình vật tự do trong hình 4.35(c).
- Định luật Newton: *Lực gia tốc theo chiều dương của x bằng với tổng đại số tất cả các lực tác động lên khối lượng theo chiều dương của x*.

$$M\ddot{x} = -Kx \quad \text{hay} \quad M\ddot{x} + Kx = 0$$

Hệ khối lượng-lò xo với phần tử tiêu tán

➢ Nếu vị trí chưa biến dạng được chọn làm gốc (Hình 4.36), khi đó

$$M\ddot{y} = -Ky + Mg \qquad M\ddot{y} + Ky = Mg \qquad M\ddot{y} + K(y - l) = 0$$

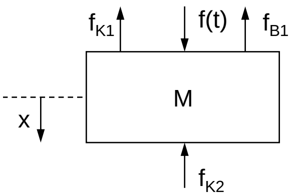
➢ Chú ý rằng $Mg = Kl$

➢ Xét khối lượng M được đỡ bởi lò xo (hình 4.37), và một tổ hợp lò xo-bộ đệm. f(t) là lực áp đặt. x được đo từ vị trí cân bằng tĩnh. Một bộ đệm lý tưởng sẽ có lực tỷ lệ với vận tốc tương đối giữa hai nút, với ký hiệu như trong hình 4.38.

Hệ khối lượng-lò xo với phần tử tiêu tán (tt)

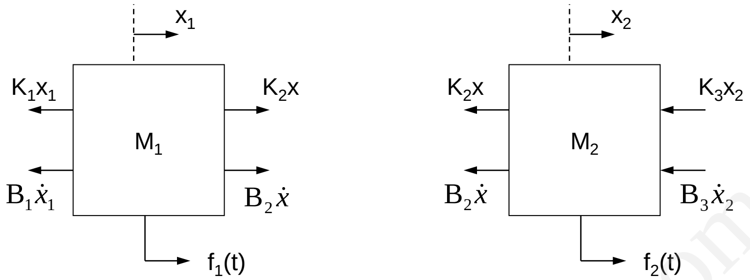
➢ Áp dụng định luật Newton, có thể viết được phương trình chuyển động của vật tự do như sau

$$M\ddot{x} = f(t) - f_{K1} - f_{K2} - f_B$$
$$= f(t) - K_1 x - K_2 x - B\frac{dx}{dt}$$



Ví dụ 4.17

◈ Viết các phương trình cơ học cho hệ trong hình 4.40.



➢ Định nghĩa $x_2 - x_1 = x$

$$M_1\ddot{x}_1 = f_1(t) + K_2(x_2 - x_1) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_1\dot{x}_1 - K_1x_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 = f_2(t) - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_2(x_2 - x_1) - B_3\dot{x}_2 - K_3x_2$$

Mô hình không gian trạng thái

➢ Mô tả động học hoàn chỉnh của hệ thu được từ việc viết các phương trình cho phía điện và phía cơ. Các phương trình này có liên kết, và tạo ra một hệ các phương trình vi phân bậc nhất dùng cho phân tích. Hệ phương trình này được coi là *mô hình không gian trạng thái* của hệ thống.

➢ Vd. 4.19: Với hệ thống trong hình 4.43, chuyển các phương trình điện và cơ về dạng không gian trạng thái. Từ thông móc vòng từ vd. 4.8,

$$\lambda = \frac{N^2 i}{R_c + R_g(x)} = \frac{N^2 i}{R(x)} \quad \Rightarrow \quad W_m' = \frac{N^2 i^2}{2R(x)}$$

Mô hình không gian trạng thái (tt)

- Ở phía hệ điện,

$$v_s = iR + \frac{N^2}{R(x)}\frac{di}{dt} - \frac{N^2 i}{R^2(x)}\frac{2}{\mu_0 A}\frac{dx}{dt}$$

- Ở phía hệ cơ,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + K(x-l) + B\frac{dx}{dt} = f^e = -\frac{N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)}$$

với l > 0 là điểm cân bằng tĩnh của phần tử chuyển động. Nếu vị trí của phần tử chuyển động được đo từ vị trí cân bằng, các phương trình cơ có biến (x – l) thay vì x.

Mô hình không gian trạng thái (tt)

- Quan hệ trên có được dưới điều kiện sau,

$$\frac{d^2(x-l)}{dt^2} = \frac{d(x-l)}{dt} = 0$$

- Mô hình không gian trạng thái của hệ thống là một hệ 3 phương trình vi phân bậc nhất. Ba *biến trạng thái* là x, dx/dt (hay v), và i. Ba phương trình bậc nhất có được bằng cách đạo hàm x, v, và i và biểu diễn các đạo hàm này *chỉ* theo x, v, và i, và ngõ vào bất kỳ của hệ thống. Do đó, các phương trình sau cho ta mô hình không gian trạng thái,

Mô hình không gian trạng thái (tt)

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}\left[\frac{-N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)} - K(x-l) - Bv\right] \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x)}\left[-iR + \frac{N^2 i}{R^2(x)}\frac{2}{\mu_0 A}v + v_s\right] \qquad \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u)$$

với

$$L(x) = \frac{N^2}{R(x)}$$

Các điểm cân bằng

➢ Xét phương trình $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$. Nếu ngõ vào u là không đổi, khi đó bằng việc đặt $\underline{\dot{x}} = 0$, sẽ thu được các phương trình đại số $\underline{0} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\hat{u}})$. Phương trình này có thể có vài nghiệm, và được gọi là *các điểm cân bằng tĩnh*.

➢ Trong các hệ thống ít chiều, có thể dùng đồ thị. Trong các hệ bậc cao, thường cần dùng các kỹ thuật tính số để tìm nghiệm. Chú ý các đại lượng có ký hiệu gạch dưới là các vectơ.

Các điểm cân bằng (tt)

➢ Với vd. 4.19, đặt các đạo hàm bằng 0 cho ta

$$v^e = 0$$

$$i^e = v_s / R$$

$$-K(x-l) = \frac{N^2 (i^e)^2}{\mu_0 A R^2(x)} = -f^e(i^e, x)$$

x^e có thể tìm bằng đồ thị bằng cách tìm giao điểm của $-K(x - l)$ và $-f^e(i^e, x)$.

Tích phân số

➢ Hai loại phương pháp: tường minh và ngầm định. Phương pháp Euler là dạng tường minh, dễ hiện thực cho các hệ thống nhỏ. Với các hệ lớn, phương pháp ngầm định tốt hơn nhờ tính ổn định số của nó.

➢ Xét phương trình $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

với $\underline{x}$, $\underline{f}$, và $\underline{u}$ là các vectơ.

➢ Thời gian tích phân sẽ được chia đều thành những bước Δt (Hình 4.45).

Tích phân số (tt)

➢ Trong mỗi bước thời gian từ t_n đến t_{n+1}, biểu thức tích phân được coi là không đổi bằng giá trị ứng với thời điểm trước đó t_n. Như vậy,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\underline{x}}(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u})dt$$

$$\underline{x}(t_{n+1}) - \underline{x}(t_n) = (t_{n+1} - t_n)\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n)) = \Delta t\left[\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n))\right]$$

Ví dụ 4.21

◈ Tính x(t) ở t = 0,1, 0,2, và 0,3 giây, biết rằng

$$\dot{x} = -(t+2)x^2 \qquad x(0) = 1$$

➢ Có thể chọn Δt = 0.1 s. Công thức tổng quát để tính $x^{(n+1)}$ là

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t\left[f\left(x^{(n)}, t_n\right)\right] \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

➢ Tại t_0

$$x^{(0)} = 1 \qquad f\left(x^{(0)}, t_0\right) = -(0+2)1^2 = -2$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta t\left[f\left(x^{(0)}, t_0\right)\right] = 1 + 0,1\times(-2) = 0,8$$

Ví dụ 4.21 (tt)

- Tại t_1 = 0,1 s

$$x^{(1)} = 0{,}8 \qquad f\left(x^{(1)}, t_1\right) = -(0{,}1+2)0{,}8^2 = -1{,}344$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta t\left[f\left(x^{(1)}, t_1\right)\right] = 0{,}8 + 0{,}1 \times (-1{,}344) = 0{,}6656$$

- Tương tự,

$$x^{(3)} = 0{,}5681$$

$$x^{(4)} = 0{,}4939$$

Ví dụ 4.22

- Tìm i(t) bằng pp Euler. R = (1 + 3i²) Ω, L = 1 H, và v(t) = 10t V.

$$L\frac{di}{dt} + iR = v(t) \qquad \frac{di}{dt} + i\left(1+3i^2\right) = v(t) \qquad i(0) = 0$$

- Đặt i = x, và v(t) = u

$$\frac{dx}{dt} = -\left(1+3x^2\right)x + u(t) = f(x,u,t) \qquad x(0) = 0 = x^{(0)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t f\left(x^{(n)}, u^{(n)}, t_n\right) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$x^{(0)} = 0 \qquad u^{(0)} = 0 \qquad f\left(x^{(0)}, u^{(0)}, t_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = 0$$

$$x^{(1)} = 0 \qquad u^{(1)} = 0{,}25 \qquad f\left(x^{(1)}, u^{(1)}, t_1\right) = -\left(1+0^2\right)0 + 0{,}25 = 0{,}25$$

$$\Rightarrow \quad x^{(2)} = x^{(1)} + (0{,}025)(0{,}25) = 0{,}00625$$