

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

Tính diện tích miền D giới hạn bởi

1. $x=y^2-2y$, $x+y=0$

2. $y^2=10x+25$, $y^2=-6x+9$

3. $y=\ln x$, $x=y+1$, $y=-1$

4. $y=4x-x^2$, $y=2x^2-5x$

5. $y^2=4-4x$, $x^2+y^2=4$ (phía ngoài parabol)

Giải:

Nhắc lại công thức $S(D) = \iint_D dx dy$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

1. Ta tìm **cận tích phân theo dy** bằng cách **khử x** từ 2 phương trình 2 mặt

$$x = y^2 - 2y = -y \quad (1) \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 0, y = 1$$

Từ đó suy ra $0 \leq y \leq 1$, ta lấy ngược lại phương trình 1 để được tiếp cận đối với tích phân theo dx

$$y^2 - 2y \leq x \leq -y$$

$$\text{Vậy : } S(D1) = \int_0^1 dy \int_{y^2 - 2y}^{-y} dx = \int_0^1 (y - y^2) dy = \frac{1}{6}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

2. Khử x từ 2 phương trình đã cho

$$\frac{1}{10}(y^2 - 25) = \frac{1}{6}(9 - y^2) \quad (1) \quad \text{và} \quad y = \pm \sqrt{15}$$

Suy ra cận tích phân theo dy, tương tự như trên, ta thay vào phương trình (1) để có cận tích phân theo dx

Vậy :

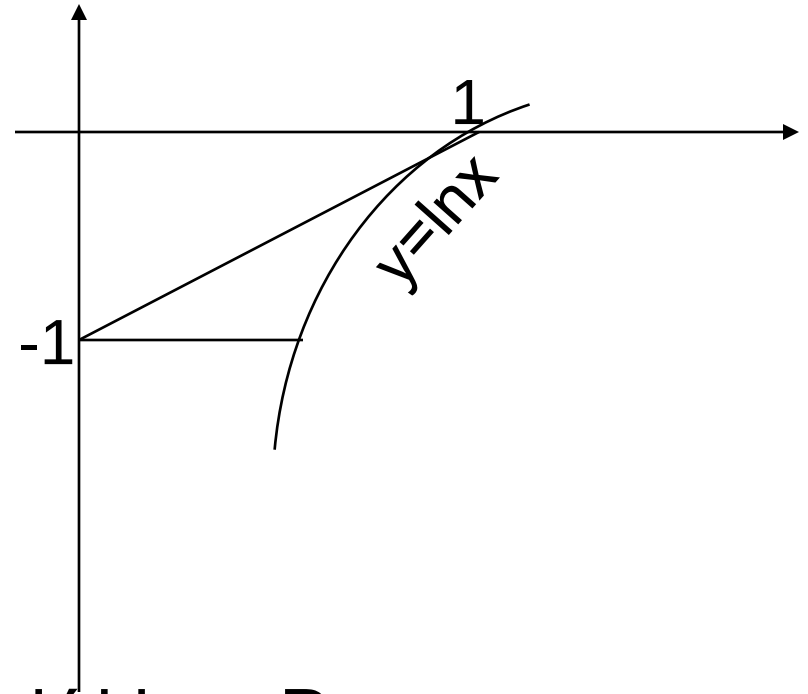
$$S(D2) = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{1}{10}(y^2 - 25)}^{\frac{1}{6}(9 - y^2)} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \frac{1}{30}(120 - 8y^2) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

3. Ta sẽ vẽ miền D_3 để xác định cận tích phân

$$S(D_3) = \int_{-1}^0 dy \int_{y+1}^{e^y} dx$$

$$S(D_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$



4. Tìm giao điểm 2 đường giới hạn D

$$4x - x^2 = 2x^2 - 5x \Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 9x \Leftrightarrow x=0, x=3$$

$$\text{Suy ra : } 0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 - 9x \Leftrightarrow 4x - x^2 \leq 2x^2 - 5x$$

$$3 \quad 2x^2 - 5x$$

$$S(D_4) = \int_0^3 dx \int_{4x-x^2}^{2x^2-5x} dy = 27/2$$

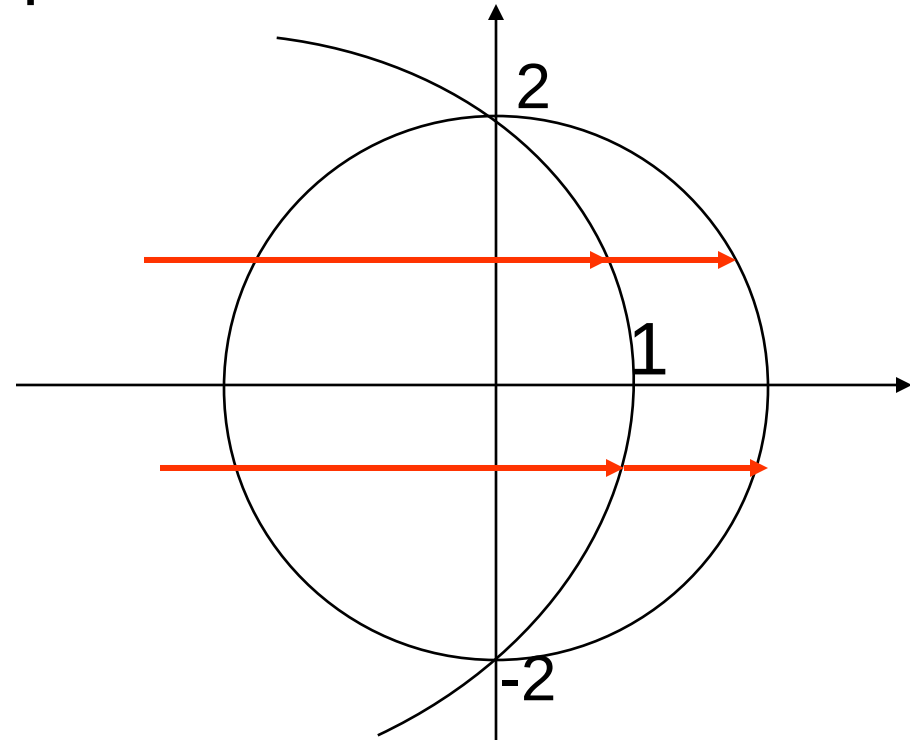
Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

5. Tìm giao điểm của 2 đường đã cho

$$4-4x=4-x^2 \leftrightarrow x^2-4x=0 \leftrightarrow x=0, x=4 \text{ (Loại vì } y^2=4-4x<0\text{)}$$

Ta vẽ hình để có cận tích phân theo dx

$$S(D_5) = \int_{-2}^2 dy \int_{1-\frac{y^2}{4}}^{\sqrt{4-y^2}} dx$$
$$S(D_5) = 2p - \frac{8}{3}$$



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

Bài 1: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi 2 mặt

1. $V_1: x^2+y^2+z^2=2, z^2=x^2+y^2, z \geq 0$

2. $V_2: x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=2x$, phần trong hình trụ

3. $V_3: x^2+y^2=1, x^2+z^2=1$

3a. $V_{3a}: y^2+z^2-x^2=0, x=6-y^2-z^2$

Ta sẽ tìm hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng $z=0$ ($x=0, y=0$) bằng cách khử z (khử x, y) từ 2 phương trình 2 mặt tạo nên vật thể

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

$$1. z^2 = 2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \leftrightarrow 1 = x^2 + y^2$$

Như vậy, hình chiếu của V_1 xuống mp $z=0$ là hình tròn

$$x^2 + y^2 \leq 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2 - x^2 - y^2. \text{ (Làm ngược lại với pt trên)}$$

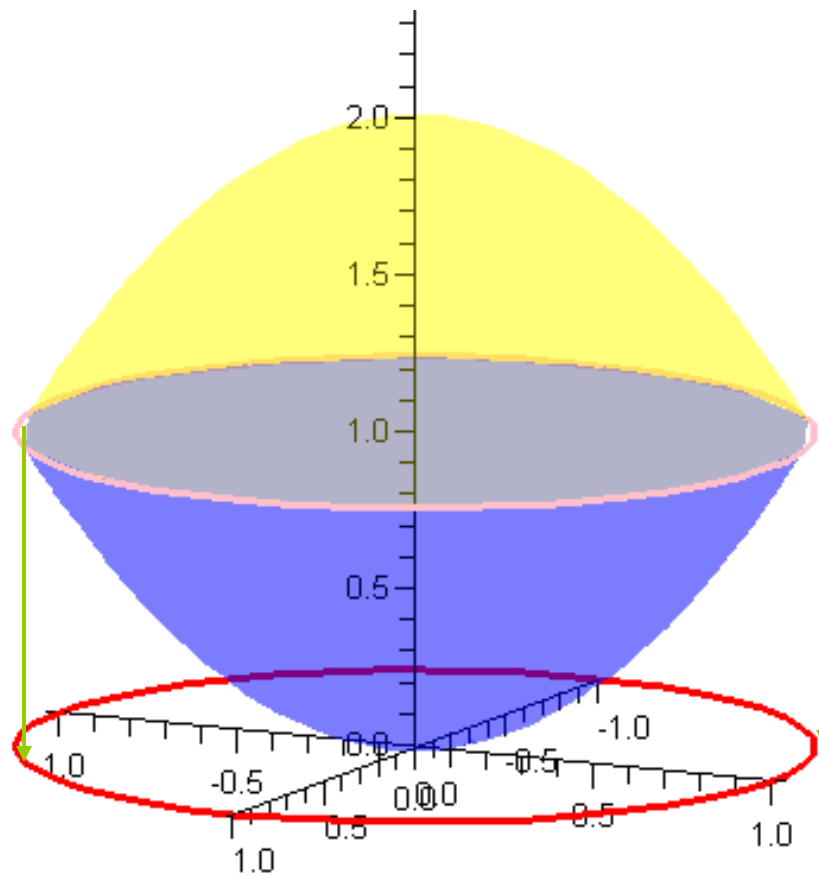
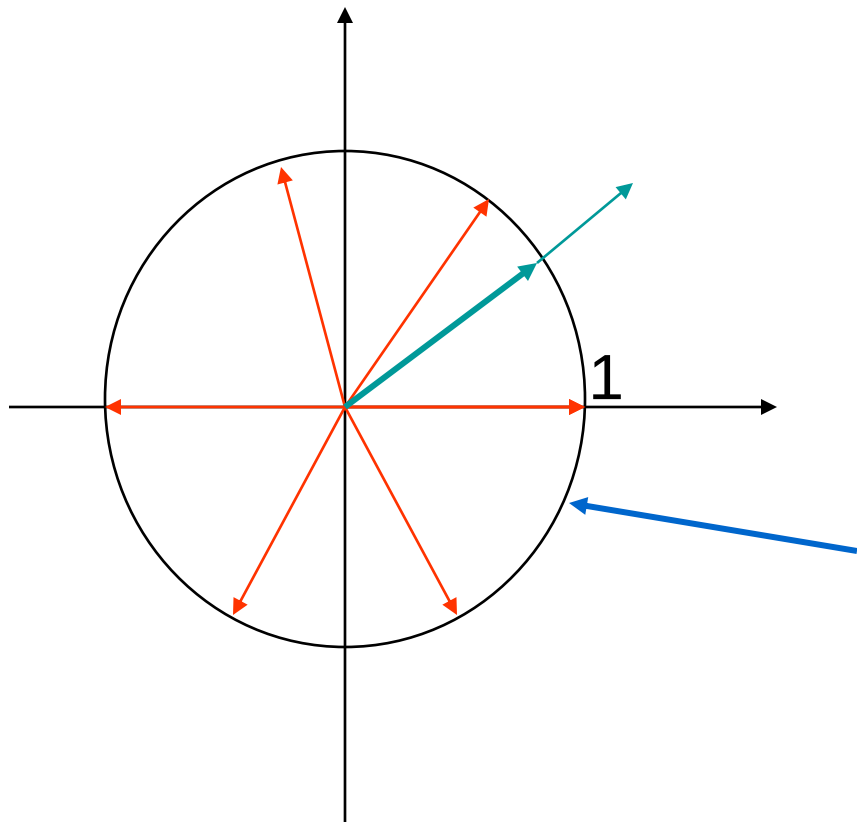
Tức là ta cũng xác định được mặt nằm trên, nằm dưới trong miền V_1 .

$$\text{Vậy : } V_1 = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} [(2 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)] dx dy$$

Vì miền lấy tích phân là hình tròn có tâm là gốc tọa độ nên ta sẽ đổi biến tp trên sang tọa độ cực bằng cách đặt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(2 - 2r^2) dr = 2\pi \left(r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right) \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq 1$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

2. Trong 2 mặt đã cho có 1 mặt trụ kín nên hình chiếu chính là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2x$

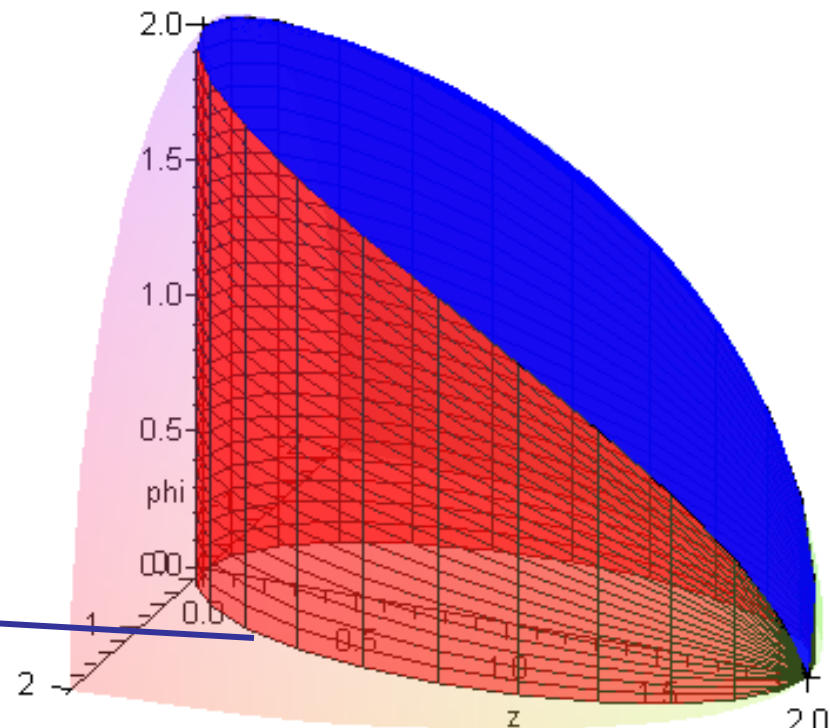
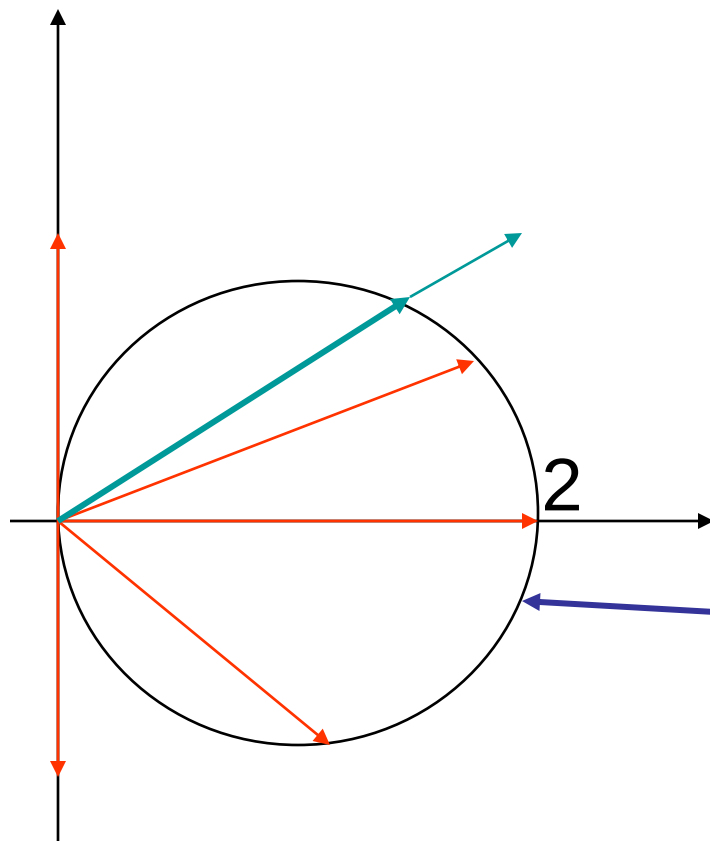
2 mặt còn lại là nửa dương và nửa âm của mặt cầu. Vì cả 2 mặt đã cho đều nhận $z=0$ là mặt đối xứng nên ta sẽ tính thể tích nửa phía trên và nhân đôi

$$V_2 = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

Miền lấy tp là hình tròn đi qua gốc tọa độ nên ta đổi biến bằng cách đặt $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$V_2 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dj \int_0^{2 \cos j} r \sqrt{4 - r^2} dr$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép



$$-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \quad 0 \leq r \leq 2 \cos \phi$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

3. Vật thể giới hạn bởi 2 hình trụ kín nên ta có thể chọn 1 trong 2 hình trụ đó để chiếu xuống mặt $z=0$ hoặc $y=0$. Chẳng hạn, ta chọn chiếu xuống mặt $z=0$ để hình chiếu là hình tròn $D: x^2+y^2 \leq 1$

Cả 2 hình trụ tạo nên V_3 đều nhận cả 3 mặt tọa độ là các mặt đối xứng nên ta sẽ chỉ tính thể tích V_3 phần ứng với $x, y, z \geq 0$ rồi nhân với 8

Khi đó, hình chiếu chỉ còn là $\frac{1}{4}$ hình tròn với $x, y \geq 0$ và giới hạn bởi $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$

$$V_3 = 8 \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} \sqrt{1-x^2} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dj \int_0^1 r \sqrt{1-r^2 \cos^2 j} dr$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

$$V_3 = 8 \int_0^{\frac{p}{4}} dj \left(\frac{-1}{3 \cos^2 j} (1 - r^2 \cos^2 j) \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$V_3 = 8 \int_0^{\frac{p}{4}} dj \left(\frac{-1}{3 \cos^2 j} ((1 - \cos^2 j)^{\frac{3}{2}} - 1) \right)$$

$$V_3 = 8 \int_0^{\frac{p}{4}} dj \left(\frac{-1}{3 \cos^2 j} (\sin^3 j - 1) \right)$$

Ghi chú: Hình vẽ cho 1/8 thể tích đã có trong bài giảng lý thuyết

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

3a. Ta sẽ khử x từ 2 phương trình 2 mặt để tìm hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oyz

$$6 - y^2 - z^2 = y^2 + z^2 \Leftrightarrow 36 - 12(y^2 + z^2) + y^2 + z^2 = y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - 13 y^2 + z^2 + 36 = 0(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 4(1) \\ y^2 + z^2 = 9(2) \end{cases}$$

Do điều kiện $x \geq 0$ nên ta loại trường hợp (2), như vậy hình chiếu cần tìm là hình tròn **$D : y^2 + z^2 \leq 4$**

Tức là ta đang lấy ngoài khoảng 2 nghiệm của tam thức (*) nên ta có bất đẳng thức tương ứng

$$y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 13 y^2 + z^2 + 36 \geq 0$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

$$y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 13y^2 + z^2 + 36 \geq 0$$

$$36 - 12(y^2 + z^2) + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2$$

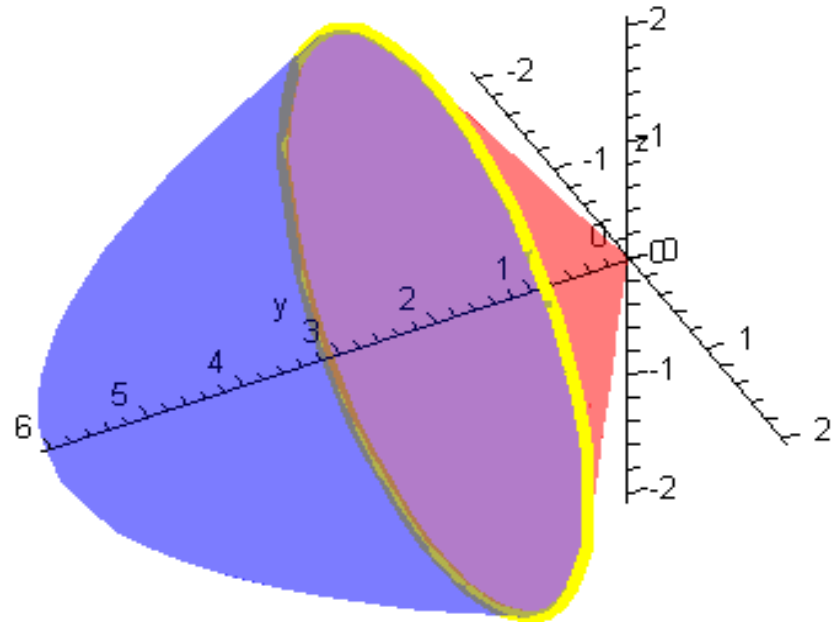
$$\Leftrightarrow 6 - y^2 - z^2 \geq y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow 6 - y^2 - z^2 \geq \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } V &= \iint_{y^2 + z^2 \leq 4} dydz \int_{\sqrt{y^2 + z^2}}^{6 - y^2 - z^2} dx \\ &= \iint_D (6 - y^2 - z^2) - \sqrt{y^2 + z^2} dydz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{z = r \cos \varphi}} \\ &\underline{\underline{y = r \sin \varphi}} \end{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r (6 - r^2 - r) dr$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

Bài 2: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

4. $V_4: 2z=y^2, x^2+y^2=4, z=0$

5. $V_5: x^2+y^2=4x, z=x, z=3x$

6. $V_6: x^2=y, z=0, z=4-y$

7. $V_7: x=y^2, x=4y^2, x+z=4, z=0, y \geq 0$

8. $V_8: y=1+x^2, z=3x, y=5, z=0$

9. $V_9: z=4-y^2, z=y^2+2, x=-1, x=2$

10. $V_{10}: z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$

11. $V_{11}: x^2+z^2=4, y=0, y=x, z=0, z \geq 0$

12. $V_{12}: y=x, y=2x, x=1, z=x^2+y^2, z=2x^2+y^2$

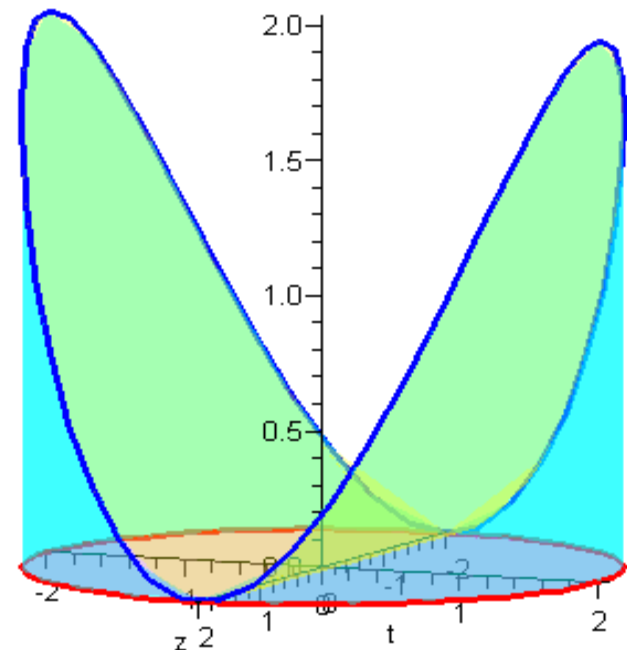
Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

4. Trong 3 mặt đã cho có 1 hình trụ kín là $x^2 + y^2 = 4$ nên ta được hình chiếu là hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 4$

Với 2 mặt còn lại, hiển nhiên $0 \leq \frac{1}{2}y^2$ nên ta được

$$V_4 = \iint_D \left(\frac{1}{2}y^2 - 0 \right) dx dy = \int_0^{2p} dj \int_0^2 r \frac{r^2 \sin^2 j}{2} dr = \frac{8p}{3}$$

THETICH-V4



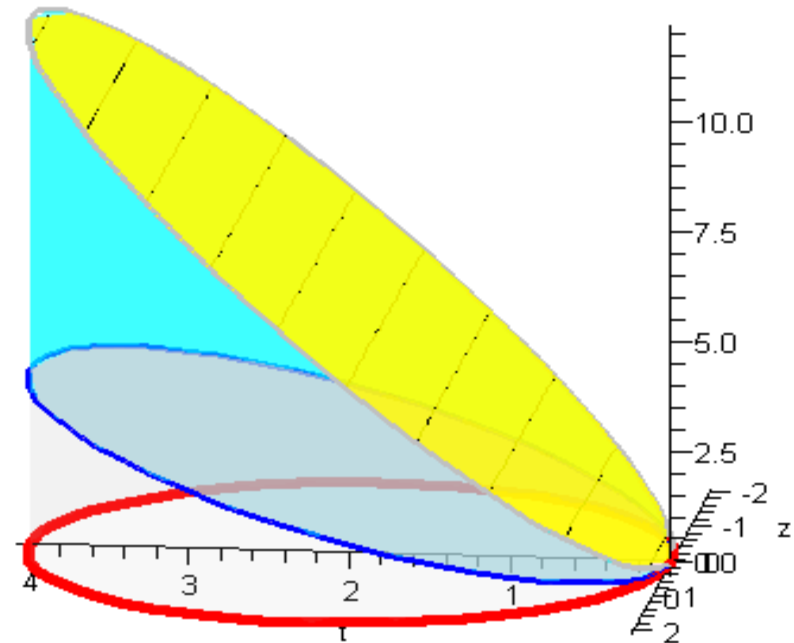
Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

5. Trong 3 mặt đã cho có 1 hình trụ kín nên hình chiếu xuống mp $z=0$ là $D: x^2+y^2 \leq 4x$, tức là $x \geq 0$ trong miền D

Từ đó suy ra $3x \geq x$

$$V_5 = \iint_D (3x - x) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4 \cos \theta} r \cdot 2r \cos \theta dr = 16\pi$$

THETICH-V5



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

6. Trong 3 mặt đã cho có 1 hình trụ nhưng là trụ không kín, hình chiếu của nó xuống mp $z=0$ chỉ là đường parabol – đường cong không kín : $y=x^2$.

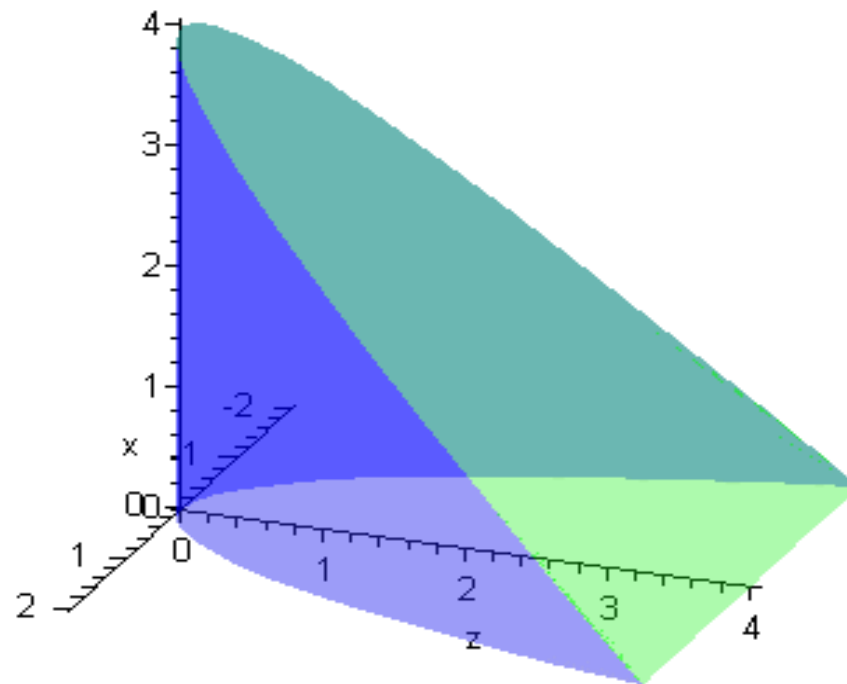
Do đó, phần còn hở của parabol phải được “đậy kín” bởi giao tuyến của 2 mặt còn lại là $z=y-4=0$, để hình chiếu của vật thể là $D: y=x^2, y=4$, suy ra $y \leq 4$ trong D

Còn lại 2 mặt, ta có $y \leq 4 \leftrightarrow 0 \leq y-4$

$$V_6 = \iint_D ((y - 4) - 0) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 (y - 4) dy = \frac{128}{5}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

THETICH-V6



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

7. Trong 4 mặt đã cho có 2 mặt trụ cùng song song với Oz, có hình chiếu xuống mp $z=0$ là phần mp không kín $x=y^2$, $x=4y^2$

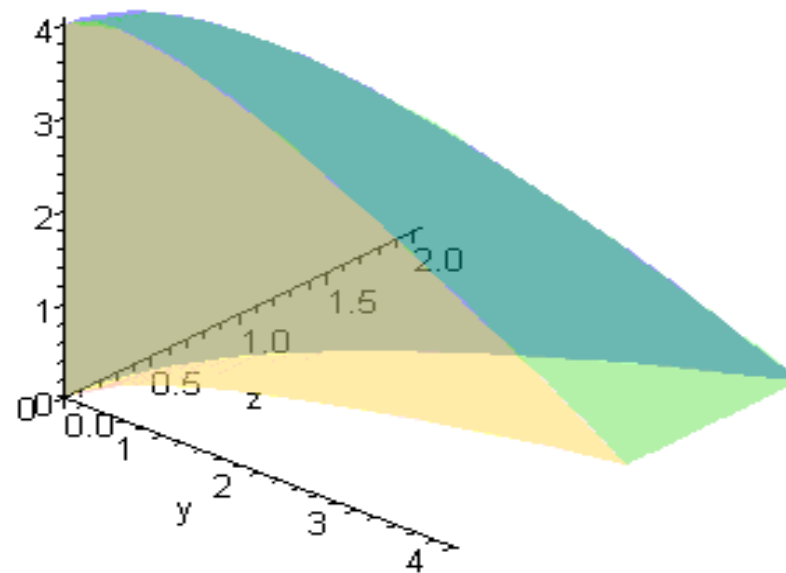
Do đó, phần hở giữa 2 parabol phải được “đậy kín” bởi giao tuyến của 2 mặt còn lại là $z=4-x=0$, để hình chiếu của vật thể là $D: x=y^2$, $x=4y^2$, $x=4$, suy ra $x \leq 4$ trong D

Còn lại 2 mặt, ta có $x \leq 4 \leftrightarrow 0 \leq 4-x$

$$V_7 = \iint_D (4-x) dx dy = \int_0^4 (4-x) dx \int_{\frac{\sqrt{x}}{2}}^{\sqrt{x}} dy = \frac{64}{15}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

THETICH-V7



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

8. Trong 4 mặt đã cho, có 1 mặt trụ và 1 mp cùng song song với trục Oz là $y=x^2+1$ và $y=5$, hình chiếu của 2 mặt này xuống mp $z=0$ cho miền $D: y=x^2+1, y=5$

Miền D có 2 phần: bên trái ứng với $x \leq 0$ và bên phải ứng với $x \geq 0$ nên tương ứng khối V_8 chia thành 2 phần với mp $z=0$ lúc nằm trên, lúc nằm dưới mp $z=3x$

$$V_8 = \iint_{D, x^3 \geq 0} 3x dx dy + \iint_{D, x < 0} (-3x) dx dy$$

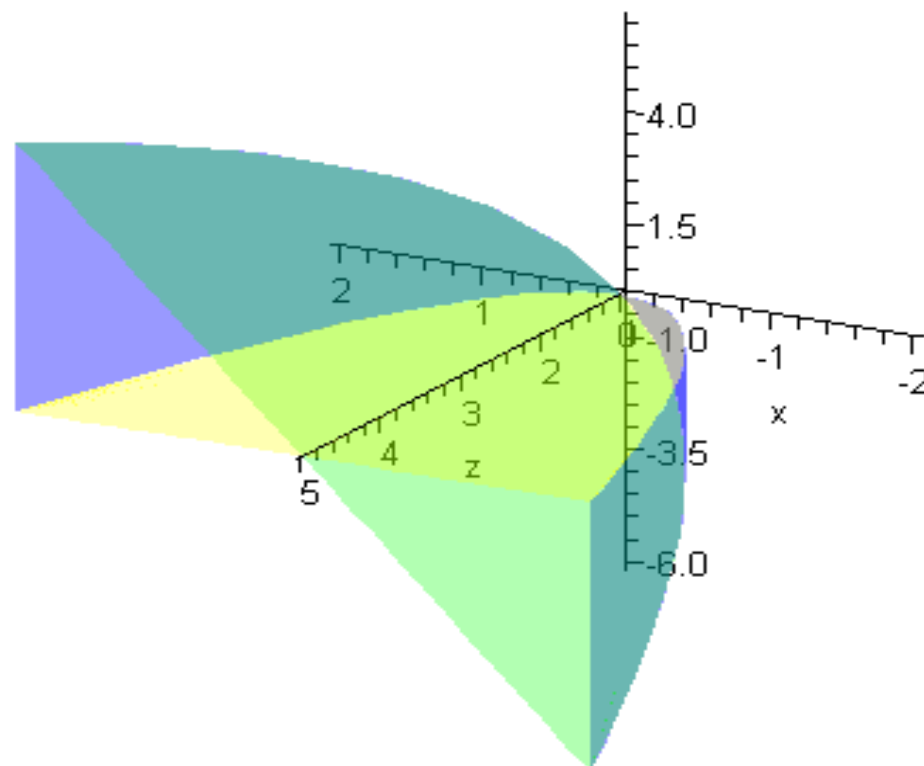
2 5 0 5

$$V_8 = \int_0^2 dx \int_{1+x^2}^5 3x dy + \int_{-2}^0 dx \int_{1+x^2}^5 (-3x) dy$$

$$V_8 = 2 \int_0^2 (4 - x^2) 3x dx = 24$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

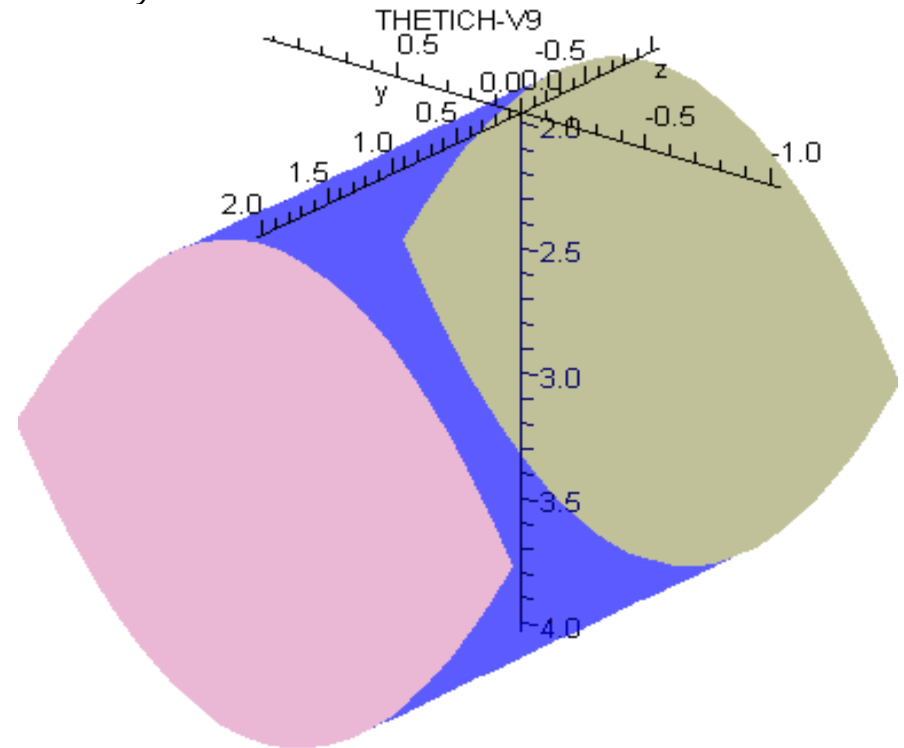
THETICH-V8



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

9. Trong 4 mặt đã cho có 2 mặt trụ parabol cùng song song với trục Ox cho ta hình chiếu xuống mp $x=0$ là miền $D: z=4-y^2, z=2+y^2$

$$V_9 = \iint_D (2 - (-1)) dy dz = \int_{-1}^1 dy \int_{2+y^2}^{4-y^2} 3 dz = 8$$



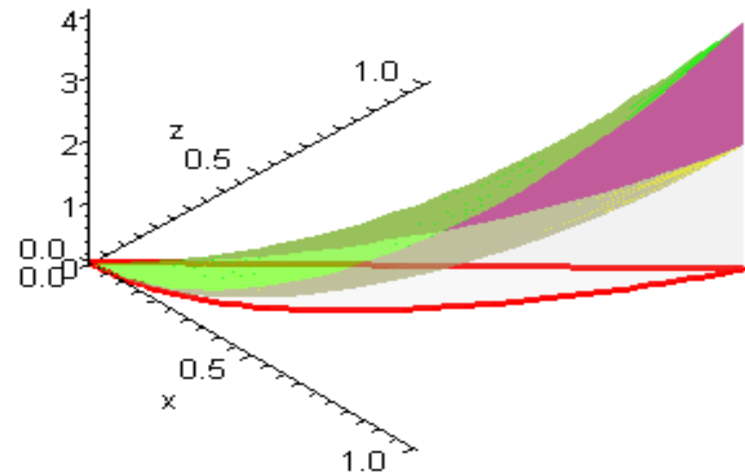
Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

10. Trong 4 mặt đã cho có 2 mặt trụ parabol cùng song song với trục Oz cho ta hình chiếu xuống mp $z=0$ là miền $D: y=x, y=x^2$

$$V_{10} = \iint_D ((2x^2 - 2y^2) - (x^2 - y^2)) dx dy$$

$$V_{10} = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy$$

$$= \frac{1}{70}$$



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

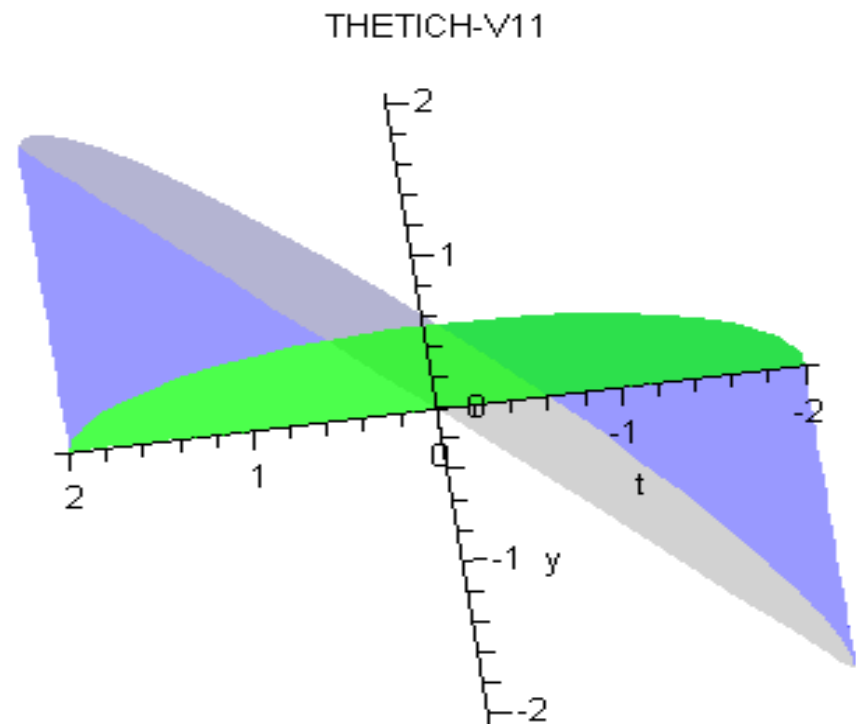
11. Ta chọn nửa hình trụ $x^2+z^2=4$, $z=0$, $z\geq 0$ song song với trục Oy, tức là hình chiếu là $D: 0\leq z, x^2+z^2\leq 4$

Vật thể V_{11} lại chia thành 2 phần: phần ứng với $x\geq 0$ thì mp $y=x$ nằm trên, phần ứng với $x<0$ thì mp $y=x$ nằm dưới so với mp $y=0$

$$V_{11} = \iint_{D, x \geq 0} x dx dz + \iint_{D, x < 0} (-x) dx dz$$

$$V_{11} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dj \int_0^2 r \cdot r \cos j dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dj \int_0^2 r (-r \cos j) dr = \frac{16}{3}$$

Bài tập phần UD hình học của tích phân kép



Bài tập phần UD hình học của tích phân kép

12. Trong 5 mặt đã cho, có 3 mặt phẳng cùng song song với trục Oz, hình chiếu của chúng xuống mp $z=0$ là tam giác **D: $y=x, y=2x, x=1$**

$$V_{12} = \iint_D ((2x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} x^2 dy$$

THETICH-V12

