

## Bài tập tích phân mặt

### Bài 1: Tính các tp sau

$$I_1 = \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \quad \text{S là phía trên nửa mặt cầu } x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$$

$$I_2 = \oiint_S z dx dy + y^2 dx dz \quad \text{S là phía ngoài vật thể gh bởi } 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$$

$$I_3 = \oiint_S y^2 dz dx + x^2 dy dz - z dx dy \quad \text{S là phía dưới nửa mặt cầu } x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$$

$$I_4 = \oiint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$$

S là phía ngoài phần mặt nón  $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$

$$I_5 = \oiint_S z dx dy + \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) dy dz + (y^2 + z) dx dz \quad \text{S là phía}$$

dưới phần mặt  $z = 1 - x^2$  với  $z \geq 0$  bị chặn bởi  $-1 \leq y \leq 1$

## Bài tập tích phân mặt

$$I_1 = \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

S là phía trên nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$

Trước hết, ta tìm pháp vectơ đơn vị của mặt S

Pt mặt S là  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, z \geq 0$ , suy ra:

$$\tilde{N} F = (2x, 2y, 2z)$$

S là phía trên tức là pháp vectơ của S cùng hướng với nửa dương trục Oz nên  $\gamma \leq \pi/2 \rightarrow \cos \gamma \geq 0$

Suy ra, dấu ta lấy cho pháp vectơ đơn vị là “+”

$$\vec{n} = + \frac{1}{2}(x, y, z), \quad z \geq 0$$

Tiếp theo, ta có thể chọn 1 trong 2 cách: Tính trực tiếp hoặc chuyển về tp mặt loại 1

## Bài tập tích phân mặt

Với tp này, ta sẽ chuyển về tp mặt loại 1 bằng cách dùng CT, với pháp vectơ đơn vị  $n = (\cos a, \cos b, \cos g)$

$$\iint_S R dx dy + Q dx dz + P dz dy = \iint_S (P \cos a + Q \cos b + R \cos g) ds$$

$$\text{Từ } I_1 = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, n = \frac{1}{\sqrt{3}}(x, y, z), z^2 \leq 4$$

$$\text{Suy ra: } I_1 = \iint_S \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) ds$$

Với tp mặt loại 1 này, ta đang có :  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  (pt mặt)

Hình chiếu  $D_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq 4$  Vì phân

$$ds = \frac{2 dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

## Bài tập tích phân mặt

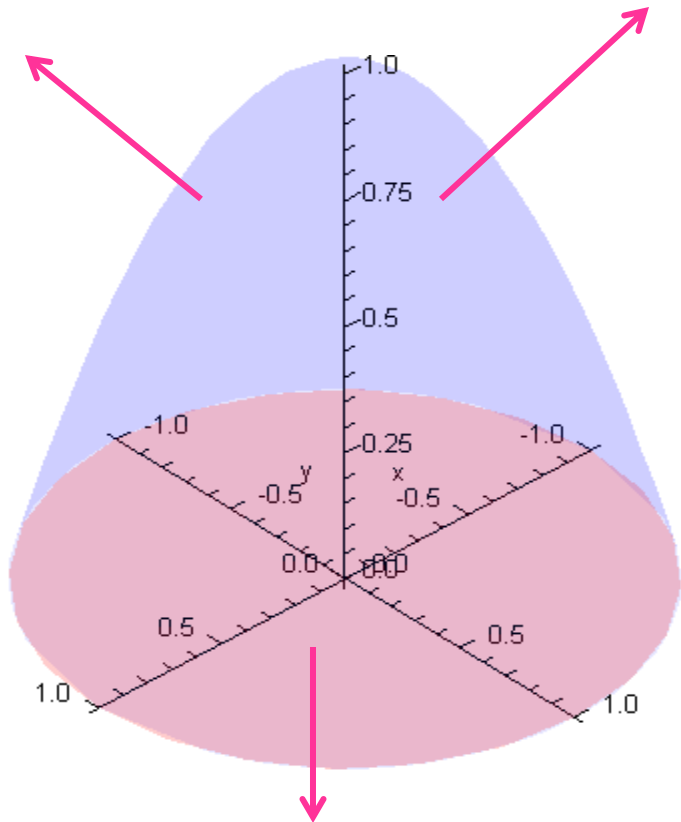
Vậy: 
$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{2 dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$\begin{aligned} &\underline{\underline{x = r \cos \varphi}} \\ &\underline{\underline{y = r \sin \varphi}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^2 4 \cdot \frac{dr}{\sqrt{4 - r^2}} \end{aligned} = 16\pi$$

## Bài tập tích phân mặt

$$I_2 = \oiint_S z dx dy + y^2 dx dz \quad S \text{ là phía ngoài vật thể gh bởi } 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$$

Mặt S gồm 2 mặt: S1 là phía dưới mp  $z=1$ , S2 là phía trên mặt paraboloid  $z=1-x^2-y^2$



Trước hết, ta tìm pháp vectơ đơn vị của mặt S1:

$$n_1 = - (0, 0, 1)$$

Và pháp vectơ đơn vị của mặt S2:

$$n_2 = + \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} (2x, 2y, 1)$$

## Bài tập tích phân mặt

Ta tính tp trên mặt S1 bằng cách chuyển về tp mặt loại 1 vì S1 là mặt phẳng có  $n_1 = - (0, 0, 1)$

$$I_{21} = \iint_{S1} z dx dy + y^2 dx dz = \iint_{(z=0)} ((-1)z) ds = 0$$

Còn tp trên mặt S2 thì ta sẽ tính trực tiếp

$$I_{22} = \iint_{S2} z dx dy + y^2 dx dz$$

Tp theo dxdy với: pt mặt  $z=1-x^2-y^2$ , h/c  $Dxy: x^2+y^2 \leq 1$

Pháp vecto:  $n_2 = + \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} (2x, 2y, 1) \rightarrow \cos \gamma > 0$

Suy ra:  $I_{221} = + \iint_{Dxy} (1 - x^2 - y^2) dx dy \leftrightarrow \boxed{I_{221} = \frac{p}{2}}$

## Bài tập tích phân mặt

Tp theo  $dx dz$ :  $I_{222} = \iint_{S2} y^2 dx dz$  Pt mặt:  $y^2 = z + x^2 - 1$

Pháp vecto:  $n_2 = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, 2y, 1)$  Suy ra:

$\cos\beta$  cùng dấu với  $y$ , tức là ta phải chia  $S2$  thành 2 nửa ứng với  $y$  dương và  $y$  âm.

Tuy nhiên, pt mặt paraboloid  $S2$  chẵn với  $y$  nên **2 nửa này đối xứng nhau qua mp  $y=0$** , hình chiếu xuống mp  $y=0$  của 2 nửa này như nhau

Do đó, tp  $I_{222}$  chia thành 2 tp mà sau khi chuyển về tp kép thì là tổng của 2 tp kép trái dấu nhau. Tức là:

$$I_{222} = 0$$

Vậy: 
$$I_2 = I_{21} + I_{221} + I_{222} = \frac{p}{2}$$

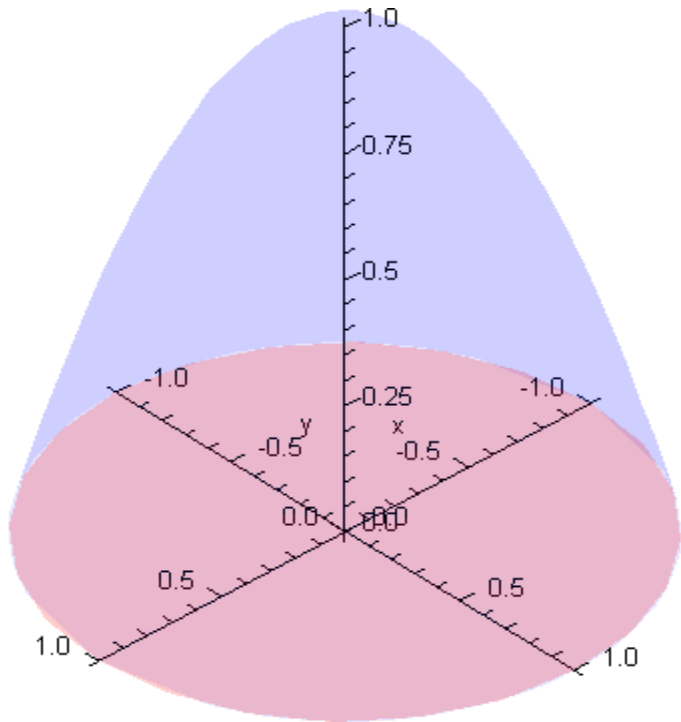
## Bài tập tích phân mặt

$$I_2 = \oiint_S z dx dy + y^2 dx dz \quad \begin{array}{l} S \text{ là phía ngoài vật thể gh bởi} \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \end{array}$$

S là mặt cong kín **phía ngoài** nên ta sẽ áp dụng CT Gauss để tính  $I_2$  nhanh hơn

CT Gauss:

$$\begin{aligned} & \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \pm \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz \end{aligned}$$



Ta có:

$$I_2 = + \iiint_V (0 + 2y + 1) dx dy dz$$

## Bài tập tích phân mặt

$$I_2 = \int_V (0 + 2y + 1) dx dy dz$$

$$I_2 = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1 - x^2 - y^2} (2y + 1) dz$$

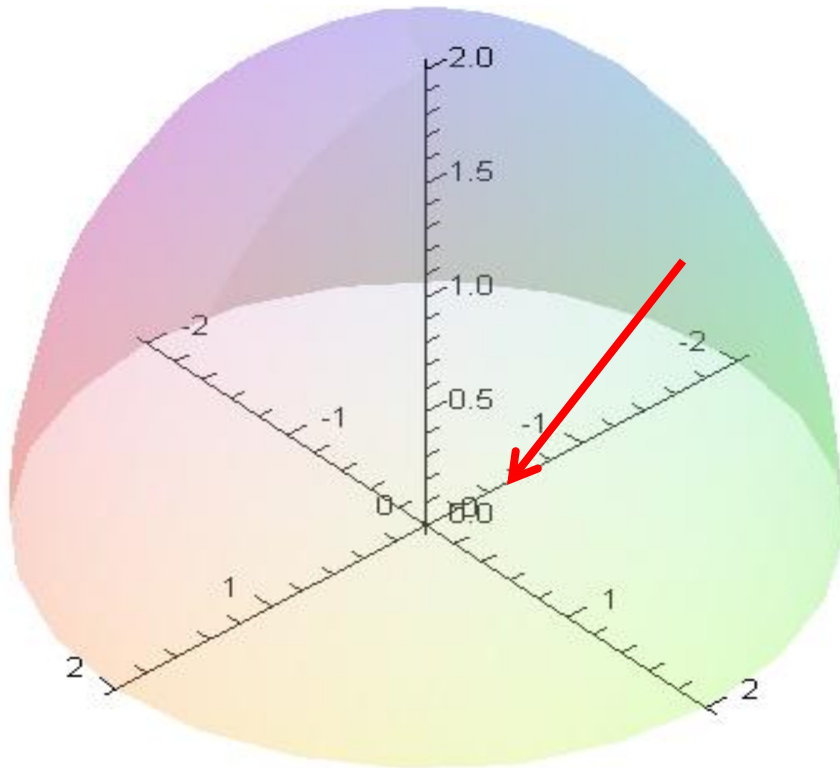
$$I_2 = \int_0^{2\pi} dj \int_0^1 r (2r \sin j + 1) (1 - r^2) dr$$

$$I_2 = \frac{p}{2}$$

## Bài tập tích phân mặt

$$I_3 = \oiint_S y^2 dz dx + x^2 dy dz - z dx dy$$

S là phía dưới nửa  
mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  
 $z \geq 0$



Nhận xét: Pt mặt S chẵn với 2 biến **x**, **y** nên khi tính tp theo **dydz**, **dzdx** ta sẽ chia S thành 2 nửa đối xứng có 2 pháp vecto tương ứng ngược dấu nhau. Vậy mỗi tp đó trở thành tổng 2 tp kép có miền lấy tp như nhau, hàm dưới dấu tp như nhau nhưng trái dấu nhau.

## Bài tập tích phân mặt

Từ đó ta được:  $I_{31} = \iint_S y^2 dx dz = 0$

$$I_{32} = \iint_S x^2 dy dz = 0$$

Còn lại tp thứ ba:  $I_{33} = - \iint_S z dy dx$

Pt mặt S (z dương):  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Hình chiếu  $D_{xy}$ :  $x^2 + y^2 \leq 4$

S là phía dưới tức là pháp vecto quay xuống dưới so với nửa dương trục Oz nên  $\gamma \geq \pi/2 \rightarrow \cos \gamma \leq 0$

Vậy:  $I_3 = I_{31} = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} - \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy = \frac{16\pi}{3}$

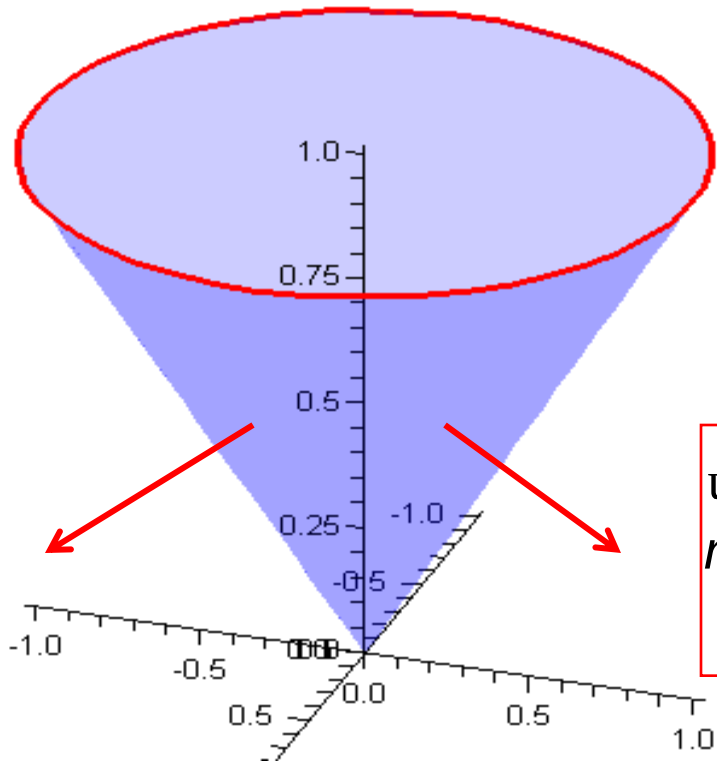
## Bài tập tích phân mặt

$$I_4 = \oiint_S (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$$

S là phía ngoài phần mặt nón  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$

Ta viết lại pt mặt S:  $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z (= 0)$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$



S là phía ngoài nón tức là pháp vecto quay xuống dưới,  $\cos \gamma \leq 0$  nên

$$\vec{n} = + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

## Bài tập tích phân mặt

Đưa tp  $I_4$  về tp mặt loại 1 với

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

$$I_4 = \iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$$

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (y - z) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (z - x) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (-1)(x - y) ds$$

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \frac{xz + yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (-1)(x - y) ds$$

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} 2(y - x) \sqrt{2} dx dy = 0$$