

Chương 5:

CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI LŨY THỪA

Phần 1: CHUỖI SỐ

ĐỊNH NGHĨA

Cho dãy số $\{a_n\}$, định nghĩa dãy số mới

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \in \mathbb{N}$$

$\{S_n\}$ được gọi là chuỗi số, ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(Nếu $\{a_n\}$ bắt đầu từ 0 thì số hạng đầu của S_n là a_0)

- S_n : tổng riêng thứ n
- a_n : số hạng tổng quát

ĐỊNH NGHĨA

$\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ}$$

Ngược lại ta nói chuỗi phân kỳ.

Đặt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n : \text{tổng chuỗi}$$

VÍ DỤ

Khảo sát sự hội tụ và tính tổng nếu có:

$$1 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Tổng riêng:
$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Vậy chuỗi hội tụ và
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$2 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

$$3 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \\ = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Vậy chuỗi hội tụ và có tổng là 1/3.

TÍNH CHẤT

1 / $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất (ht/pk)

2 / $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, $\alpha \neq 0$, và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất

TÍNH CHẤT

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

- Tổng 2 chuỗi hội tụ là hội tụ
- Tổng 1 chuỗi hội tụ và 1 chuỗi phân kỳ là phân kỳ

Điều kiện cần của sự hội tụ

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Áp dụng:

Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ (hoặc không tồn tại) thì
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ không hội tụ.

Ví dụ

$$1 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-1)^n \sqrt{n} - n} \quad \text{phân kỳ vì}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(-1)^n \sqrt{n} - n} = -1 \neq 0$$

$$2 / \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n-1} \right)^n$$

$$|a_n| = \left(\frac{3n+2}{2n-1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \text{chuỗi phân kỳ}$$

Ví dụ

3/ Ks sự hội tụ và tính tổng nếu có: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x^k = x^1 + x^2 + \dots + x^n$$

$$= \begin{cases} x \frac{1 - x^n}{1 - x}, & \forall x \neq 1 \\ n, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

❖ khi $x = 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ chuỗi pk

❖ khi $|x| > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ hoặc không tồn tại

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại

$\Rightarrow$ chuỗi pk

❖ khi $|x| < 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{x}{1 - x}$

Chuỗi ht và có tổng là $\frac{x}{1 - x}$

CHUỖI KHÔNG ÂM.

Cho $a_n \geq 0$, khi đó dãy tổng riêng phần $\{S_n\}$ là dãy tăng.

Vậy $\{S_n\}$ hội tụ $\Leftrightarrow \{S_n\}$ bị chặn trên.

Hay:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $\{S_n\}$ bị chặn trên.

Tiêu chuẩn tích phân Maclaurin - Cauchy

Cho $f(x)$ không âm, liên tục, giảm trên $[1, +\infty)$, khi đó

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{có cùng bản chất}$$

Chứng minh:

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$\int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = S_n - f(n)$$

$$\int_1^n f(x) dx \geq f(2) + \dots + f(n) = S_n - f(1)$$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$1 / \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, x \in [2, +\infty)$$

$f(x)$ dương, liên tục và giảm nên

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \quad \text{cùng bản chất với}$$

$$I = \int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \text{hội tụ}$$

$$2 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- $\alpha \leq 0$: chuỗi phân kỳ theo điều kiện cần
- $\alpha > 0$: xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$f(x) > 0$, liên tục, giảm trên $[1, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ cùng bản chất với } \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

$\Rightarrow$ chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$.

$$3 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}, \quad x \in [1, +\infty) \text{ dương, l\u00e0c v\u00e0 gi\u00e1m n\u00ean}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \text{ c\u00f9ng b\u00e1n ch\u00e1t v\u00f3i } I = \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{2^{\sqrt{x}}}$$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{2^{\sqrt{x}}} = \int_1^{\infty} \frac{2t dt}{2^t}$$

Chọn: $g(t) = \frac{1}{t^2}$, khi đó $\int_1^{\infty} g(t) dt$ hội tụ.

Đồng thời:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2t}{2^t} : \frac{1}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^3}{2^t} = 0$$

Theo tiêu chuẩn so sánh của tp suy rộng thì I hội tụ, do đó chuỗi đã cho hội tụ.

Tiêu chuẩn so sánh

Dạng 1: $a_n, b_n \geq 0, \quad a_n \leq Kb_n, \quad \forall n \geq N_0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kỳ} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ phân kỳ} \end{aligned}$$

Dạng 2: $a_n, b_n > 0$, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

- $0 < K < \infty$: hai chuỗi cùng bản chất

- $K = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

- $K = \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Chuỗi cơ bản

Chuỗi cấp số nhân:

$$\sum x^n \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Chuỗi điều hòa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Ví dụ

$$1 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{n + e^{n^2}}$$

$$\frac{e^n - 1}{n + e^{n^2}} \leq \frac{e^n}{e^{n^2}} = \frac{1}{e^{n(n-1)}} \leq \frac{1}{e^n}, \forall n > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n \quad \text{là chuỗi CSN hội tụ.}$$

Theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi đã cho ht.

Ví dụ

$$2 / \sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n \sim n \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

hay

$$\frac{a_n}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = K$$

Chuỗi đã cho cùng bản chất với chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ nên phân kỳ.}$$

$$2 / \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(\frac{n+3}{n-2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{5}{n-2} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{5}{n-2} \approx \frac{5}{n^{3/2}}$$

khi $n \rightarrow \infty$

hay

$$\frac{a_n}{1/n^{3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5 = K$$

Chuỗi đã cho cùng bản chất với chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{nên hội tụ}$$

$$3 / \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$\frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{\ln(n^n)} = \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \text{ cùng bản chất với } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t}$$

nên phân kỳ.

Theo tiêu chuẩn ss 1 chuỗi đã cho phân kỳ.

$$4 / \sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \approx \frac{1}{6} \frac{1}{n^3}$$

$$n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \approx \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

$\Rightarrow$ chuỗi đã cho cùng bản chất với $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$

Vậy $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$ hội tụ $\Leftrightarrow 3 - \alpha > 1$
 $\Leftrightarrow \alpha < 2$

$$5 / \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \ln n \cdot \sin^2 \left(n \frac{\pi}{2} \right)}{2^n}$$

$$6 / \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n - e^{-n^2}}{\sqrt[3]{n-1}} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$7 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n^{\alpha}} + n}$$

Tiêu chuẩn D'Alembert

Xét chuỗi số dương: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Đặt :

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- $\exists q < 1 : D_n < q$: chuỗi hội tụ
- $D_n \geq 1$: chuỗi phân kỳ

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- $D < 1$: hội tụ
- $D > 1$: phân kỳ
- $D = 1$: không có kết luận

Xét 2 chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ & $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Tiêu chuẩn Cauchy

Xét chuỗi số không âm: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

Đặt :

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}$$

- $\exists q < 1 : C_n < q$: chuỗi hội tụ
- $C_n \geq 1$: chuỗi phân kỳ

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- $C < 1$: hội tụ
- $C > 1$: phân kỳ
- $C = 1$: không có kết luận

Xét 2 chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ & $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Tiêu chuẩn Rapp

(sử dụng khi $D = 1$ và $D_n < 1$)

$$R_n = n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

- $R > 1$: hội tụ
- $R < 1$: phân kỳ
- $R = 1$: không có kết luận

Ví dụ-Khảo sát sự hội tụ

$$1 / \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Vậy chuỗi ht theo tc D'A.

$$2 / \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$\rightarrow \frac{e}{e} = 1 \text{ Không KL}$$

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \Rightarrow D_n \geq 1 \Rightarrow \text{pk}$$

$$3 / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$$

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^2} \cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}} \\ = \frac{n^n \cdot 2}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi ht}$$

$$4 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+3}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$D_n < 1 \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1 \Rightarrow \text{không dùng tc D'A được}$$

$$R_n = n! - D_n = n! \left(1 - \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right)$$

$$R_n = n(1 - D_n) = n \left(1 - \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \right)$$

$$= n \frac{6n+5}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{3}{2} > 1$$

$\Rightarrow$ chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Rapp

$$5 / \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+5} \right)^{2n-1}$$

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{2n+5} \right)^{2n-1}} = \left(\frac{3n-1}{2n+5} \right)^{\frac{2n-1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \left(\frac{3}{2} \right)^2 > 1 \Rightarrow \text{chuỗi pk}$$

Nên dùng điều kiện cần để có kết quả nhanh hơn (đối với VD này)

$$6 / \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\ln n}, \quad a > 0$$

$$C_n = \sqrt[n]{a^{-\ln n}} = a^{\frac{-\ln n}{n}} \rightarrow a^0 = 1$$

$$D_n = \frac{a^{-\ln(n+1)}}{a^{-\ln n}} = a^{\ln n - \ln(n+1)} = a^{\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \rightarrow a^0 = 1$$

n C, D'A)

$$i \quad a^{-\ln n} = e^{-\ln n \times \ln a} = n^{-\ln a}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$$

– n Leibnitz

$$\text{ng } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{i } a_n \geq 0$$

n Leibnitz:

$$\text{u } \begin{cases} \{a_n\} \text{ giảm} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{cases} \quad \text{thì } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ hội tụ}$$

$$\text{Đặt: } s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \Rightarrow 0 \leq |s| \leq a_1$$

Chuỗi hội tụ theo tc trên gọi là chuỗi Leibnitz

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ

$$1 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ đơn điệu giảm về } 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ là chuỗi Leibnitz (hội tụ)}$$

$$2 / \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}, x \geq 2$

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 2x}{(x^3 - 1)^2} < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$$

Vậy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$ Chuỗi ht theo tc Leibnitz

3 / $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n \sqrt{n} + 1}$ Mẫu số của thay đổi dấu $\Rightarrow$ không phải chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n \sqrt{n} + 1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[(-1)^n \sqrt{n} - 1 \right]}{(-1)^{2n} \sqrt{n^2} - 1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n - 1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}}{n - 1} - \frac{(-1)^n}{n - 1} \right]$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{-1}}$ là chuỗi dương pk vì cùng
 bản chất với $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{-1}}$ là chuỗi đan dấu ht theo tc L.

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n}}{n^{-1}} - \frac{(-1)^n}{n^{-1}} \right]$ phân kỳ (ht + pk = pk)

CHUỖI CÓ DẤU TÙY Ý

Sự hội tụ tuyệt đối

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Chiều ngược lại không đúng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ phân kỳ} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kỳ}$$

Tiêu chuẩn Cauchy và D'Alembert

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ hay phân kỳ theo tc

Cauchy hoặc D'Alembert thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng vậy

Ghi nhớ:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ theo tc so sánh

thì không có kết luận gì cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ

$$1 / \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^n$$

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^n \quad u$$

$$|a_n| = \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^n$$

$$C_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+1}{3n+2} \rightarrow \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{chuỗi ht tuyệt đối}$$

$$2 / \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}}{3^n}$$

$$a_n = \frac{n^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{3^n}$$

u

$$|a_n| = \left| \frac{n^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{3^n} \right| \leq \frac{n^2}{3^n} = b_n$$

ng tc D'A cho $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$D_n = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i