

CHƯƠNG 0:

HÀM NHIỀU BIẾN NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

NỘI DUNG

1. Dãy điểm trong R_n .
2. Tập đóng, tập mở, tập bị chặn, tập compact.
3. Hàm nhiều biến.
4. Giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến.

DÃY ĐIỂM TRONG R_n

Dãy điểm trong R_n là tập hợp các điểm được gán chỉ số trong $\underline{N}$, một dãy điểm tương ứng với n dãy số thực.

$$\{X_m\} = \{X_1, X_2, \dots, X_m, \dots\}$$

$$X_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m), m = 1, 2, \dots$$

$$X_m \rightarrow X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in R_n$$

$$\Leftrightarrow x_i^m \rightarrow x_i^0, \text{ khi } m \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n}, \sqrt[n]{n^2}) = (0, 1)$$

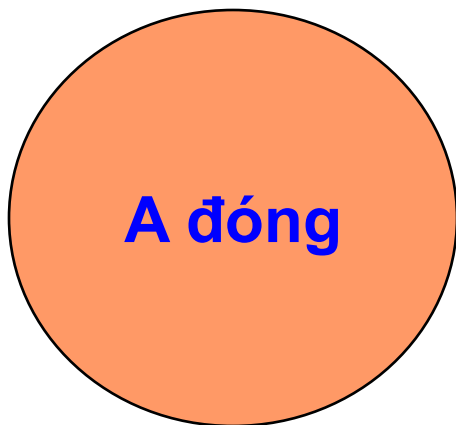
CÁC DẠNG TẬP HỢP CƠ BẢN

$A \subset \mathbb{R}_n$ là tập đóng $\Leftrightarrow$ mọi dãy trong A có giới hạn thì giới hạn cũng nằm trong A .

(A lấy tất cả các đường biên có thể có)

$A \subset \mathbb{R}_n$ là tập mở $\Leftrightarrow$ phần bù của A trong $\mathbb{R}_n$ là đóng

(A không lấy bất kỳ phần nào của biên)



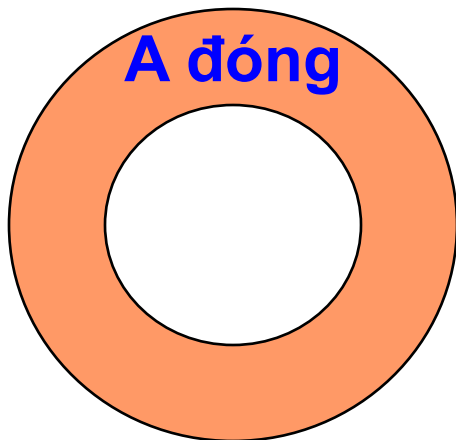
A đóng

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$



A mở

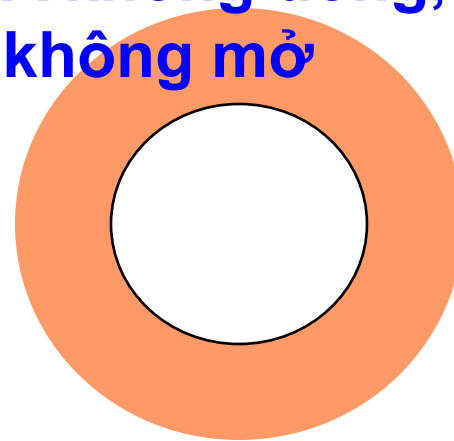
$$x^2 + y^2 < R^2$$



A đóng

$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2$$

**A không đóng,
không mở**



$$R_1^2 \leq x^2 + y^2 < R_2^2$$

A là tập bị chặn $\Leftrightarrow$ tồn tại $M > 0$ sao cho $\forall x \in A, \|x\| \leq M$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

(A có thể được bao bọc bởi một mặt cầu (hoặc đường tròn))

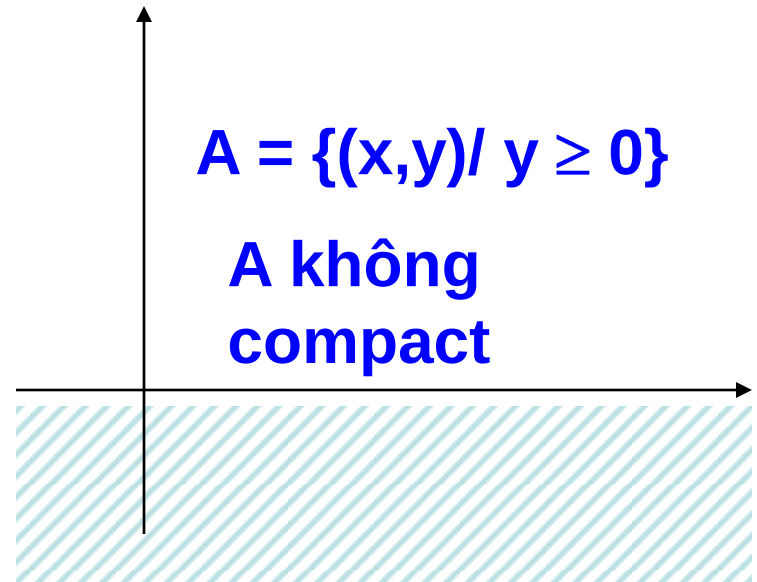
A là tập compact $\Leftrightarrow$ A là tập đóng và bị chặn

A compact

**A không
compact**

$A = \{(x,y) / y \geq 0\}$

**A không
compact**



HÀM NHIỀU BIẾN

Hàm nhiều biến là một ánh xạ biến 1 tập con D của R_n thành một tập con của R .

$$f : D \subset R_n \longrightarrow R$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

D gọi là miền xác định của f .

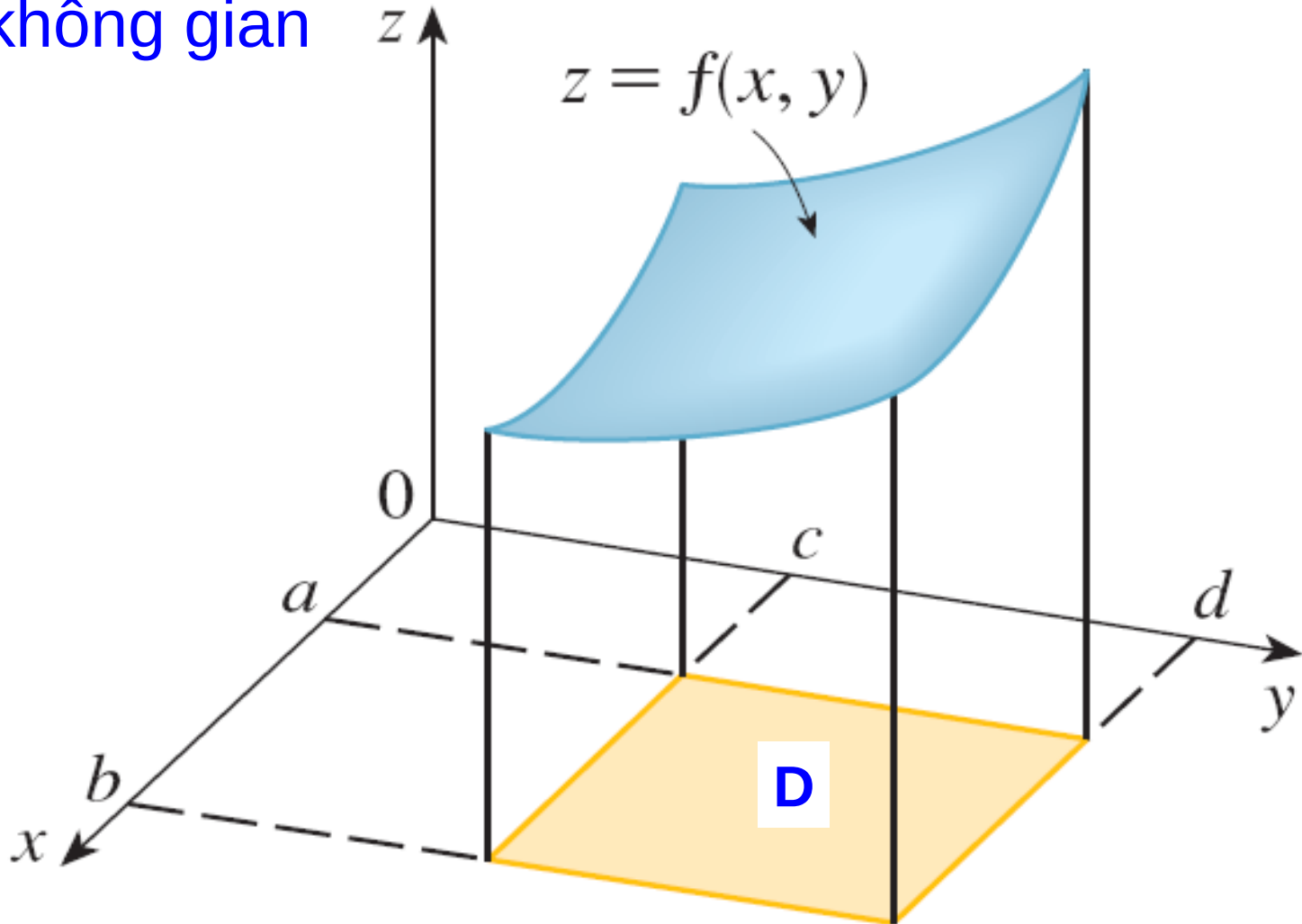
VD: 1/ $z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $D = R^2 \setminus \{(0,0)\}$

2/ $z = f(x,y) = x^y$, $D = \{(x,y) / x > 0\}$

3/ $F(x,y,z) = xz + z^2y + 2 = 0$ (hàm ẩn $z = z(x,y)$)

Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA HÀM 2 BIẾN

Hàm số $z = f(x, y)$ biểu diễn một mặt cong trong không gian



GIỚI HẠN HÀM 2 BIẾN

Cho $f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

f hội tụ về a khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ nếu:

$$\forall (x_n, y_n) \in D, (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0):$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = a$$

Cách viết giới hạn:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a$$

Lưu ý: không lấy giới hạn theo x trước, y sau hoặc ngược lại.

Ví dụ

$$f(x, y) = x, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = x_0,$$

Vì $D = \mathbb{R}_2$ và $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$\Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) = x_n \rightarrow x_0, \forall (x_n, y_n)$$

Vậy

$$f(x, y) = y, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = y_0,$$

Ví dụ

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + y}{\ln(x + y)} = \frac{2}{\ln 2},$$

Lấy $(x_n, y_n) \rightarrow (1, 1)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{\ln(x_n + y_n)} \rightarrow \frac{2}{\ln 2}$$

Một số lưu ý trong tính giới hạn

- Các phép toán và tính chất của giới hạn hàm 1 biến vẫn còn đúng cho hàm nhiều biến (tổng, hiệu, tích, thương, giới hạn kẹp, ...)
- Thay tương đương VCB, VCL, khai triển Taylor, qắc L'Hospitale chỉ áp dụng nếu chuyển được sang hàm 1 biến.
- Đề ý dạng vô định khi tính giới hạn.

$$3 / \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy - 2x - y + 2}{x - 1} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{y(x - 1) - 2(x - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (y - 2) = -1$$

$$4 / \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1 + xy} - 1}{\ln(1 + xy)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + u} - 1}{\ln(1 + u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{u}{2}}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Không có ghan khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Chọn 2 dãy điểm:

$$X_n = (0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0), Y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

nhưng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(Y_n) = \frac{1}{2}$$

$$6 / f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0$$

vì

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2}$$

$$\leq \frac{(x^2 + y^2) |y|}{x^2 + y^2}$$

$$= |y| \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0$$

nên

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |f(x, y)| = 0$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ TÍNH CHẤT

$f(x, y)$ liên tục tại $(x_0, y_0) \in D$
nếu:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Những tính chất quan trọng của hàm số liên tục

- Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định,
- f liên tục trên tập A đóng và bị chặn thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A .

Lưu ý: mọi phát biểu trên không gian n chiều cũng tương tự trên không gian 2 chiều.