

CHUỖI LŨY THỪA

ĐỊNH NGHĨA

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n \in R \quad \text{là giá trị cho trước}$$

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là tập hợp:

$$D = \left\{ x \in R : \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ hội tụ} \right\}$$

Nếu đặt $X = x - x_0$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$,

nên không mất tính tổng quát ta chỉ xét chuỗi này.

Định lý Abel

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối trong $[-|x_0|, |x_0|]$

Hệ quả:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_0 thì phân kỳ tại mọi $x \notin [-|x_0|, |x_0|]$

Chứng minh định lý

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : |a_n x_0^n| \leq M, \forall n$$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

$$\forall x \in (-|x_0|, |x_0|) : \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ hội tụ}$$

Bán kính hội tụ

Số $R > 0$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong $-R, R$

và phân kỳ bên ngoài $-R, R$ gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

$-R, R$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi.

Vậy nếu đã biết BKHT thì miền hội tụ của chuỗi chỉ cần xét thêm tại $\pm R$

Trường hợp chuỗi tổng quát

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Số $R > 0$ sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hội tụ trong

$x_0 - R, x_0 + R$ và phân kỳ bên ngoài $-R, R$
gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

Khoảng hội tụ: $(x_0 - R, x_0 + R)$

Cách tìm bán kính hội tụ

Tính: $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ hoặc $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$\Rightarrow R = \begin{cases} 0, & \alpha = +\infty \\ \frac{1}{\alpha}, & 0 < \alpha < +\infty \\ +\infty, & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 0 : \text{MHT} = 0 \text{ hoặc } x_0 \text{ cho chuỗi TQ} \\ R = \infty : \text{MHT} = -\infty, +\infty \end{cases}$$

Lưu ý

1. Có thể tính bán kính hội tụ như sau:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{hay} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

2. Trường hợp $R = 0$ hay $R = \infty$, không được gọi là bán kính hội tụ nhưng có thể gọi tạm cho dễ sử dụng.

Ví dụ

1 / Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \text{Khoảng ht: } (-1, 1)$$

$x = 1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ht theo tc L.

$x = -1$: chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, phân kỳ

Vậy miền hội tụ là: $D = (-1, 1)$

2 / Tìm bán kính hội tụ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

$$3 / \text{ Tìm miền hội tụ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n} \quad a_n = \frac{1}{n^2 2^n}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 2^n} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng ht: } (1-2, 1+2) = (-1, 3)$$

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ ht theo tc L.}$$

$$x = 3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ht. } \Rightarrow D = -1, 3$$

4 / Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{5} \right)^n : \text{chuỗi cấp số nhân}$$

Điều kiện hội tụ: $\left| \frac{x+3}{5} \right| < 1 \Leftrightarrow -8 < x < 2$

Vậy miền hội tụ là: $D = (-8, 2)$

Tính chất của chuỗi lũy thừa

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ R , gọi $S(x)$ là tổng chuỗi.

1 / $S(x)$ liên tục trên miền hội tụ.

$$2 / S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$3 / \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R, R)$$

Chú ý

1. Chuỗi lũy thừa liên tục trên miền xác định
2. Trong **khoảng hội tụ**, đạo hàm (tích phân) của tổng chuỗi bằng chuỗi đạo hàm (tích phân) tương ứng.
3. Bán kính hội tụ của chuỗi đạo hàm và chuỗi tích phân bằng BKHT của chuỗi ban đầu.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Ví dụ áp dụng: tính tổng chuỗi

Nhắc lại:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Điều kiện: $|x| < 1$

$$1 / S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{MHT: } D =]-1,1[$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\Rightarrow S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x), \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\text{Do } S(0) = 0 \Rightarrow S(x) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

$$S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} S(x) = -\ln 2$$

$$2 / S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{MHT: } D = -1,1$$

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}, x \in -1,1$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} x^n, x \in -1,1$$

$$= \frac{x^2}{1-x}, x \in -1,1$$

$$\Rightarrow S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}, x \in -1,1$$

$$3 / S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad \text{MHT: } D = -1,1$$

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)', x \in -1,1$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}, x \in -1,1$$

$$4 / S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n \cdot (n+1)}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right)$$

Xét chuỗi lũy thừa $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\text{MHT } D = -1, 1 \quad \exists \frac{1}{2}$$

Trong VD1 ta có: $S(x) = -\ln(1-x), |x| < 1$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), |x| < 1$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2^n}{n} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1/2^n}{n}$$

$$= S_{1/2} - 2 \left[S_{1/2} - \frac{1}{2} \right] = \ln 2 + 1$$

$$4 / S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}$$

Xét chuỗi lũy thừa $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

MHT: $D = (-1, 1) \ni \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}, x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-1,1] \Rightarrow S(x) = \arctan x, x \in [-1,1]$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}$$

$$= \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6}$$

CHUỖI TAYLOR

Nhận xét: vì chuỗi đạo hàm của chuỗi lũy thừa có cùng khoảng hội tụ với chuỗi ban đầu nên tổng chuỗi lũy thừa là hàm khả vi vô hạn trong khoảng hội tụ.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2.a_2(x - x_0) + 3.a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n + 1)!a_{n+1}(x - x_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = a_0, & f'(x_0) = a_1, & f''(x_0) = 2!a_2, \dots, \\ f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = f(x_0), & a_1 = f'(x_0) \\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \\ \dots \\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots \end{cases}$$

Định nghĩa

Cho hàm f khả vi vô hạn trong lân cận x_0
khi đó, chuỗi Taylor của f trong lân cận này là

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Chuỗi Taylor trong lân cận $x_0 = 0$ gọi là chuỗi Maclaurin.

Định lý

Nếu f khả vi vô hạn trong lân cận x_0 và tồn tại $C > 0, R > 0$ sao cho

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C^n, \forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

Khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

Chứng minh

Trong $x_0 - R, x_0 + R$, với $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n,$$

$$\forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_n| \leq \frac{C^{n+1} |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n, \quad (1)$$

$$\forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

$$|R_n| \leq \frac{C^{n+1} |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

qua giới hạn (1) ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

Định lý

Nếu f khả vi vô hạn trong lân cận x_0 và tồn tại $C > 0, R > 0$ sao cho

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C, \forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

Khi đó

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in x_0 - R, x_0 + R$$

Yêu cầu của 1 bài khai triển chuỗi

1. Vận dụng được chuỗi Maclaurin cơ bản .
2. Viết được dạng chuỗi lũy thừa theo $(x-x_0)^n$ với hàm f cho trước.
3. Chỉ ra miền hội tụ của chuỗi tìm được, đó chính là miền mà hàm f được khai triển thành chuỗi Taylor.

Chuỗi Maclaurin cơ bản

$$1 / e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{MKT: } D = R$$

$$2 / \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad D = -1, 1$$

$$3 / 1+x^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$D = \begin{cases} R, & \alpha \in \mathbb{N} \\ -1, 1, & \alpha > 0 \\ -1, 1, & -1 < \alpha < 0 \\ -1, 1, & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

$$4 / \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad D = -1, 1$$

$$\left. \begin{aligned} 5 / \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \right\} D = R$$

$$6 / \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad D = -1, 1$$

Ví dụ

1 / Tìm chuỗi Taylor trong lân cận $x = 2$

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

Đặt: $X = x - 2$

$$f(x) = \ln(4 + X) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{X}{4}\right)$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{X}{4}\right)^n, \text{ M K T : } \frac{X}{4} \in (-1, 1)$$

$$f(x) = \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{4} \right)^n, \quad \text{MKT} : \frac{x}{4} \in [-1, 1]$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 4^n} (x - 2)^n,$$

với $\frac{x-2}{4} \in [-1, 1] \quad \text{hay} \quad x \in [-2, 6]$

2 / Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$

$$f(x) = \ln \left[-2(x-1) \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \ln(1-x)(1+2x)$$

$$= \ln(1-x) + \ln(1+2x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n}$$

Điều kiện: $-1 < -x \leq 1$ và $-1 < 2x \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} < -x \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1 + (-2)^n}{n} x^n
 \end{aligned}$$

Với: $-\frac{1}{2} < -x \leq \frac{1}{2}$

3 / Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x) = e^{-x}(1+x)$

$$f(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} x \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$(1+x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-n) x^n \quad \mathbf{D = R}$$

4 / Tìm chuỗi Maclaurin : $f(x) = \ln x + \sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Khai triển cho $f'(x)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + \dots$$

$$+ \dots \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} + \dots$$

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

Điều kiện: $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$

Các ví dụ về tính tổng

$$1/S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n!}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + e^2 - 1$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + e^2 - 1$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} + e^2 - 1 = 2e^2 + e^2 - 1 = 3e^2 - 1$$

$$2 / S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{3^n}$$

Xét 2 chuỗi lũy thừa:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \quad \text{và} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$R(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n = - \frac{-x}{1+x}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$T(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow S = R\left(\frac{1}{3}\right) - T\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$3 / S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n(n+2) \cdot 5^{n+1}}$$

$$S = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

$$= \frac{1}{10} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n}{n} + \left(\frac{5}{3} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^{n+2}}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{10} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{10} \left[- \ln \left(1 + \frac{3}{5} \right) + \frac{9}{25} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{10} \left[-\ln \left(1 + \frac{3}{5} \right) + \frac{9}{25} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{10} \left[-\ln \left(1 + \frac{3}{5} \right) + \frac{9}{25} \left[\ln \left(1 + \frac{3}{5} \right) - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} \right] \right]$$

$$= \frac{1}{250} \left[16 \ln \frac{8}{5} - \frac{189}{2} \right]$$