

2. Chuỗi lũy thừa – Miền hội tụ

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ hay } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0, a_1, a_2, \dots \text{ là hằng số}$$

Số hạng tổng quát $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ (1) hoặc $u_n(x) = a_n x^n$ (2) phụ thuộc vào n và biến x , là 1 hàm lũy thừa theo x hoặc $(x - x_0)$.

Ta có thể đặt $X = x - x_0$ và đưa dạng (1) về thành dạng (2) nên ta chỉ viết các kết quả sau đây với số hạng tổng quát dạng (2)

2. Chuỗi lũy thừa – Miền hội tụ

Miền HT của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ là tập D nếu

" $x = x_0 \in D$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ HT

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Là chuỗi cấp số nhân nên HT khi và chỉ khi $|x| < 1$

Suy ra MHT của chuỗi là $(-1, 1)$

2. Chuỗi lũy thừa – Miền hội tụ

Ví dụ: Tìm MHT của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

$$u_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} \text{ xác định với mọi } x$$

Khi $|x| < 1$: Cho $n \in \mathbb{N}$ ta được $x^{2n} \rightarrow 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ chuỗi PK theo đkcsst

Khi $|x| = 1$: $x^{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{2}, \forall n$ Chuỗi PK

Khi $|x| > 1$: Cho $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}} : \frac{1}{(x^2)^n} = \frac{1}{|x|^{2n}}$

Chuỗi HT vì $|x| > 1$

Vậy MHT là $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Tổng quát: giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x=x_0$,

tức là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ HT. Theo [đkccsht](#) ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0 \quad \exists M > 0 : |a_n x_0^n| < M, \quad \forall n$$

Biến đổi số hạng tổng quát của chuỗi:

$$a_n x^n = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| < M \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| = v_n, \quad \forall n$$

Nếu $|x| < |x_0|$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ HT

Suy ra chuỗi ban đầu HTTĐ theo t/c so sánh.

Vậy ta chứng minh xong định lý Abel sau đây.

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Định lý Abel :

Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x_0 \neq 0$ thì nó HTTĐ tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$

Hệ quả: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ PK tại x_1 thì nó PK với mọi x thỏa $|x| > |x_1|$

Bán kính hội tụ (BKHT):

Số $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ HT với mọi $x: |x| < R$ và

PK với mọi $x: |x| > R$ được gọi là BKHT của chuỗi

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Cách tìm BKHT của chuỗi lũy thừa

Đặt:
$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}}$$
 Thì BKHT là
$$R = \frac{1}{r}$$

Cách tìm MHT của chuỗi lũy thừa

Sau khi tìm xong BKHT, ta chỉ còn xét sự HT của chuỗi tại 2 điểm $x=R$ và $x=-R$ nữa là có kết luận

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Ví dụ: Tìm BKHT, MHT của các chuỗi sau

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^2}$$

1. Với chuỗi lũy thừa này, ta đang có $a_n = n^n$:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \quad \text{và} \quad R = 0$$

BKHT $R=0$ tức là MHT chỉ gồm 1 điểm duy nhất **{0}**

$$2. a_n = \frac{1}{2^n \cdot n^2} \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \cdot n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad R = 2$$

Khi $x=2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là chuỗi số dương HT

Khi $x=-2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ là chuỗi HTTĐ

Vậy MHT **[-2,2]**

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

Ví dụ: Tìm BKHT, MHT của các chuỗi:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 5^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n-1)^n} (x-1)^{2n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! x^n}{5^n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n x^n}$$

1. Chuỗi lũy thừa với **BKHT $R=5$, MHT là $(-5,5)$**

$$a_n = \frac{1}{3^n + 5^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 5^n}} = \frac{1}{5} \rightarrow R=5$$

Khi $x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 5)^n}{3^n + 5^n}$ Là 2 chuỗi PK theo **đkccsht**

Chú ý: Khi chuỗi số dương PK theo **đkccsht** thì chuỗi đan dấu tương ứng cũng PK theo **đkccsht**

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

2. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{n+1}{2n-1} x^n$, $X = (x-1)^2 < 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{2n-1}} = \frac{1}{2} \rightarrow R=2$$

Ta chỉ xét $X=2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1} 2^n$ Chuỗi PK theo đkccsht vì

$$u_n = \frac{n+1}{2n-1} 2^n = \frac{n+1}{2n-1} 2^n = \frac{n+1}{2n-1} 2^n = \frac{n+1}{2n-1} 2^n$$

Suy ra, chuỗi đã cho HT khi

$$0 \leq X < 2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$$

Vậy BKHT $R=2$, MHT: $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

3. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{(n-1)!}{5^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5} = +\infty \rightarrow R=0$$

Vậy **BKHT** $R=0$, **MHT** là $\{0\}$

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

4. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

→ $R=e$

Khi $X=e$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$

$$D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! e^n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Tuy nhiên, vì $1 + \frac{1}{n} < e < 1 + \frac{1}{n-1}$, "

Nên $D_n < 1$. Vậy chuỗi PK theo t/c d'Alembert

2. Chuỗi lũy thừa – Bán kính HT, Miền HT

4. Chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $X = \frac{1}{x}$, **R=e**

Khi $X=-e$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (-e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$$

Chuỗi trị tuyệt đối PK theo tiêu chuẩn d'A nên nó cũng PK

Suy ra, chuỗi đã cho HT khi

$$|X| < e \ll \left| \frac{1}{x} \right| < e \ll \frac{1}{e} < |x| \ll \begin{matrix} \hat{e}^X > \frac{1}{e} \\ \hat{e}^X < -\frac{1}{e} \end{matrix}$$

Vậy **BKHT** $R=e$, **MHT** $(-\infty, -1/e) \cup (1/e, +\infty)$

2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

Tính chất của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$

Cho chuỗi (1) với **BKHT** là R , **MHT** là D và trong D có **tổng** là $S(x)$ Ta có các kết luận sau:

1. Hàm $S(x)$ liên tục trong MHT D

2. Trong MHT D , ta có thể *lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi* và được *chuỗi lũy thừa cũng có BKHT là R*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \frac{d}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R)$$

3. Trong MHT D , ta có thể *lấy tích phân từng số hạng của chuỗi* và được *chuỗi lũy thừa cũng có BKHT là R*

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-R, R)$$

2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

Ví dụ: Tìm BKHT và tính tổng các chuỗi sau

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + n}$$

1. Chuỗi có $a_n = \frac{1}{n}$ Dễ dàng suy ra **R=1**.

Ta tính tổng với **x trong khoảng $(-1,1)$** . Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\text{Đ } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1)$$

$$\text{Vậy: } S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), \quad x \in (-1,1)$$

2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

2. Để dễ dàng thấy $R=1$, " $x \in (-1,1)$ ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x} = x \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2}$$

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1)$$

2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

3. Dễ dàng thấy $R=1$, " $x \in (-1,1)$ ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{d}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \frac{d}{dx} (-x^2) \frac{1}{1 - (-x^2)}$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) + x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

Vậy: $S(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, " x \in (-1,1)$

2. Chuỗi lũy thừa – Tính tổng chuỗi

4. Dễ dàng thấy $R=1$, " $x \in (-1,1)$ " ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x}{1} \quad \text{Sử dụng kết quả câu 1.}$$

$$S(x) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x)$$

Vậy : $S(x) = \ln(1-x) \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + 1, \quad x \in (-1,1)$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Cho hàm $f(x)$ khả vi vô hạn lần trong lân cận của x_0

Ta gọi chuỗi Taylor của $f(x)$ là chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Khi $x_0=0$, ta được chuỗi Maclaurint của hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Tuy nhiên, các chuỗi trên chưa chắc đã HT với mọi x , tức là chưa chắc chúng đã có tổng để tổng có thể bằng $f(x)$.

2. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Định lý: (Điều kiện để hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor)

Giả sử trong lân cận (x_0-R, x_0+R) , hàm $f(x)$ thỏa

1. $f(x)$ khả vi vô hạn lần
2. Tồn tại hằng số $C>0$: $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$, với mọi n

thì

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Chú ý: Trong khi làm bài, ta sẽ không kiểm tra 2 điều kiện trên để có chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ mà ta sẽ sử dụng các kết quả sau đây để chỉ ra MHT của chuỗi Taylor - Maclaurint

2. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Một số chuỗi Maclaurint cơ bản

$$1 / e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{MHT: } D = R$$

$$2 / \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad D = -1, 1$$

$$3 / 1+x^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
$$D = \begin{cases} R, & \alpha \in N \\ -1, 1, & \alpha > 0 \\ -1, 1, & -1 < \alpha < 0 \\ -1, 1, & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$4 / \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad D = -1, 1$$

$$5 / \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad D = R$$

$$6 / \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad D = -1, 1$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurin các hàm:

$$1. f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2. f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$$

$$1. f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6} = x \cdot \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \right) = x \cdot \left(\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right)$$

Vậy: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} x^{n+1}$

MHT: (-2,2)

Chuỗi HT nếu $-1 < \frac{x}{3} < 1$ và $-1 < \frac{x}{2} < 1 \iff -2 < x < 2$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$2. f(x) = \ln(2-3x+x^2) = \ln((1-x)(2-x)) = \ln(1-x) + \ln(2-x)$$

$$f(x) = \ln(1 + (-x)) + \ln 2 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$f(x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

MHT: (-1,1)

Chuỗi HT nếu

$$\begin{aligned} & -1 < -x < 1 \\ & -1 < \frac{-x}{2} < 1 \end{aligned}$$

$$\hat{U} \quad -1 < x < 1$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Tìm chuỗi Maclaurin hàm: $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Ta tính $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Tìm chuỗi Maclaurin của hàm $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + \dots$$
$$+ \dots \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} + \dots$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$$

Hàm khai triển được nếu $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Suy ra: $f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$

$$\ln x + \sqrt{1+x^2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1}$$

MHT: $-1 \leq x \leq 1$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Tìm chuỗi Taylor ở lân cận $x_0=3$ của hàm

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Đặt $X=x-3$

$$f(x) = \frac{1}{2 + (x-3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x-3}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-3)^n$$

MHT: (1,5)

2. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ngoài việc áp dụng khai triển các hàm cơ bản thành chuỗi Maclaurint vào việc tìm chuỗi Taylor , chuỗi Maclaurint các hàm bình thường. Ta còn có thể áp dụng để tính tổng các chuỗi lũy thừa, chuỗi số

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n+1)}, \quad x \in (-1, 1)$$

Chuỗi trên là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

Nên dễ thấy BKHT $R=1$, tức là với $-1 < x < 1$ ta đặt

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n+1)}$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= (-1) \ln(1+x) + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{x} \\
 &= (-1) \ln(1+x) - \frac{1}{x} (\ln(1+x) - 1)
 \end{aligned}$$

Vậy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}, \quad x \in (-1, 1)$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} x \cdot x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n - x^n}{2^n \cdot n!}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n! 2^n} - x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} - x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n}$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} - 1$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(2n)!!} x^{n+1} = \frac{x^2}{2} e^{x/2} - x(e^{x/2} - 1)$$

$$= \frac{x^2}{2} - x \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \dots \right) + x$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Sử dụng khai triển Maclaurint hàm dưới dấu tích phân bằng chuỗi, tính tích phân

$$I = \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$$

Ta có: $\ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

Thay vào tích phân trên

$$I = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1}$$

Ta tính tổng của chuỗi số bằng định nghĩa

Tổng riêng: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ và tổng S

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$S_n = -\frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} - \frac{1}{24e^4} + \frac{1}{120e^5} - \frac{1}{720e^6} + \dots + \frac{1}{e^n} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$$

$$S_n = -\frac{1}{e} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$$

Vậy

$$I = \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx = -1$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

Ví dụ: Tính tổng các chuỗi số sau

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{n!}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n(n+2)7^{n+1}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n)!!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{2^{3n-1} \cdot n!}$$

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{n!} = 0 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!} = 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = e^5$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2^n n!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$= 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - 1 \right) = 2(e^2 - 1)$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$\begin{aligned}
 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n(n+2) \cdot 7^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{7 \cdot 7^n} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{7^n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{7^n} - \frac{1}{14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{7^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{14} \ln \left(1 + \frac{2}{7} \right) + \frac{1}{14} \cdot \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{7^n} - \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n(n+2) \cdot 7^{n+1}} = \frac{45}{56} \ln \frac{9}{7} - \frac{3}{14}$$

2. Chuỗi Taylor - Maclaurin

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{2^{3n-1} \cdot n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{3} - 2) \dots (\frac{1}{3} - (n-1)) \cdot 3^n}{2^{n-1} \cdot 2^{3n} \cdot n!}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3} - 1)(\frac{1}{3} - 2) \dots (\frac{1}{3} - (n-1))}{n!} 3^{\frac{n}{3}}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{3}{8} - 1 \right) = 2 \sqrt[3]{\frac{11}{8}} - 2 = \sqrt[3]{11} - 2$$