

CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

NỘI DUNG

1. Cực trị tự do.
2. Cực trị có điều kiện.
3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên tập compact.

CỰC TRỊ TỰ DO

Hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền mở D chứa $P_0(x_0, y_0)$

1. P_0 là **điểm cực đại** của f nếu tồn tại một lân cận V của P_0 sao cho:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in V$$

Bỏ dấu “ $\leq$ ” ta gọi P_0 là **điểm cực đại chặt** của f .

2. Thay $\leq$ bởi $\geq$ ta có định nghĩa điểm cực tiểu.

Lưu ý: dùng định nghĩa để xét cực trị là xét dấu biểu thức sau với (x,y) gần (x_0,y_0)

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

hay $\left\{ \begin{array}{l} \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ \Delta x, \Delta y \text{ gần } 0 \text{ (nhưng không đồng thời bằng } 0) \end{array} \right.$

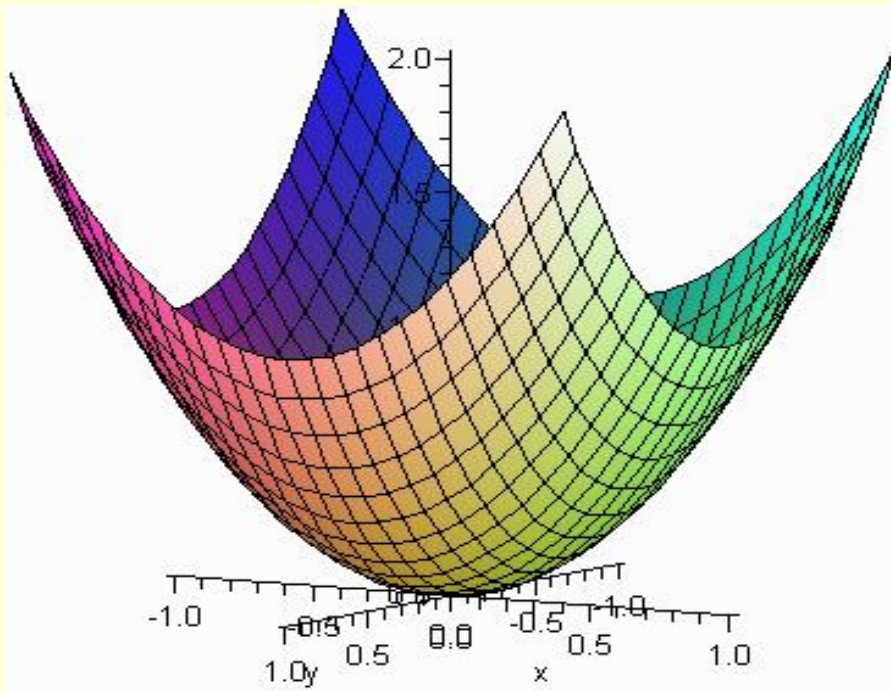
Nếu Δf giữ nguyên dấu trong 1 lân cận của (x_0, y_0) thì f đạt cực trị tại điểm này, ngược lại f không đạt cực trị tại đây.

Ví dụ

1/ $P(0, 0)$ là điểm cực tiểu chặt của $f(x, y) = x^2 + y^2$ vì

$$\Delta f(0,0) = f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 > 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

hay $f(x, y) > f(0, 0), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$



2/ $P(0, 0)$ là điểm cực tiểu không chặt của

$$f(x, y) = x^2y^2$$

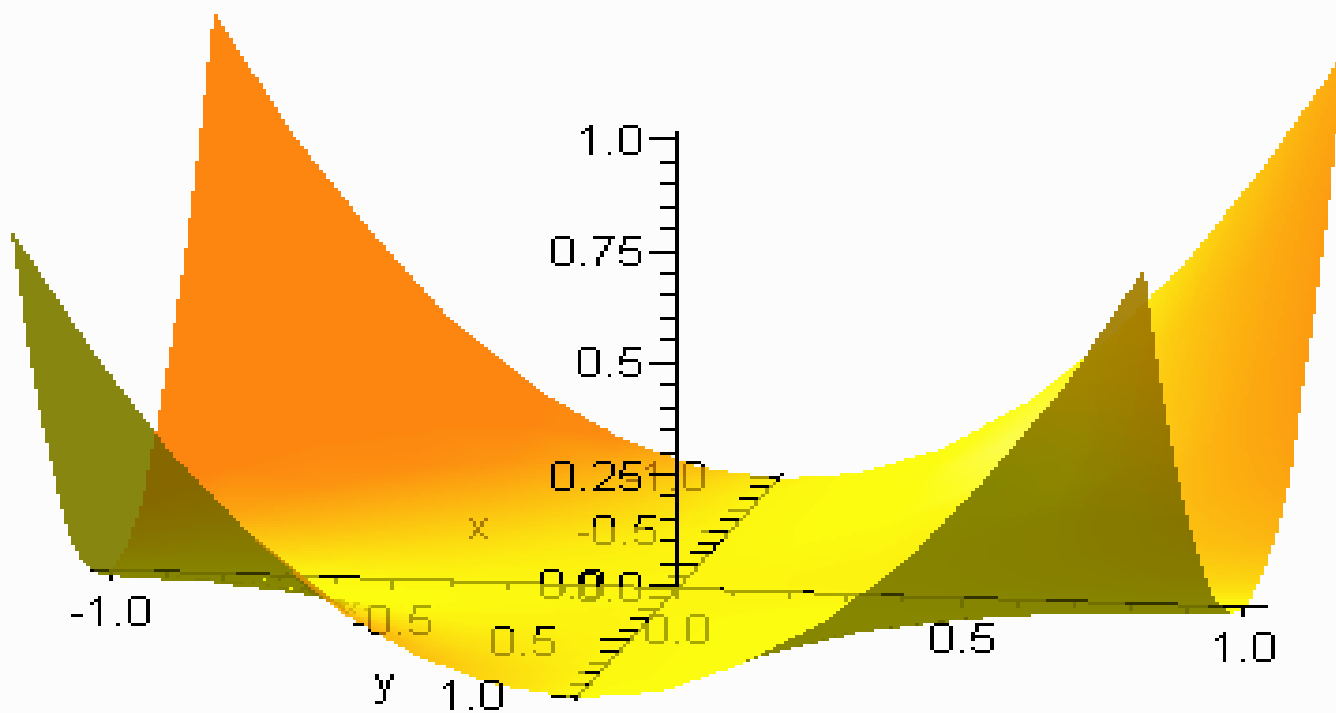
$$\text{vì } \Delta f(0,0) = f(x, y) - f(0, 0) = x^2y^2 \geq 0, \forall (x, y)$$

$$\text{hay } f(x, y) \geq f(0, 0), \forall (x, y)$$

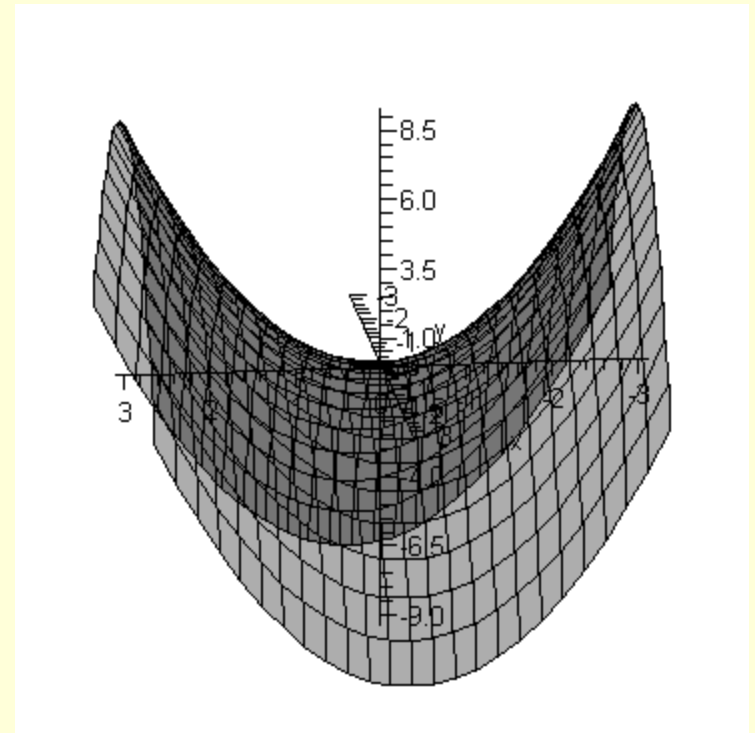
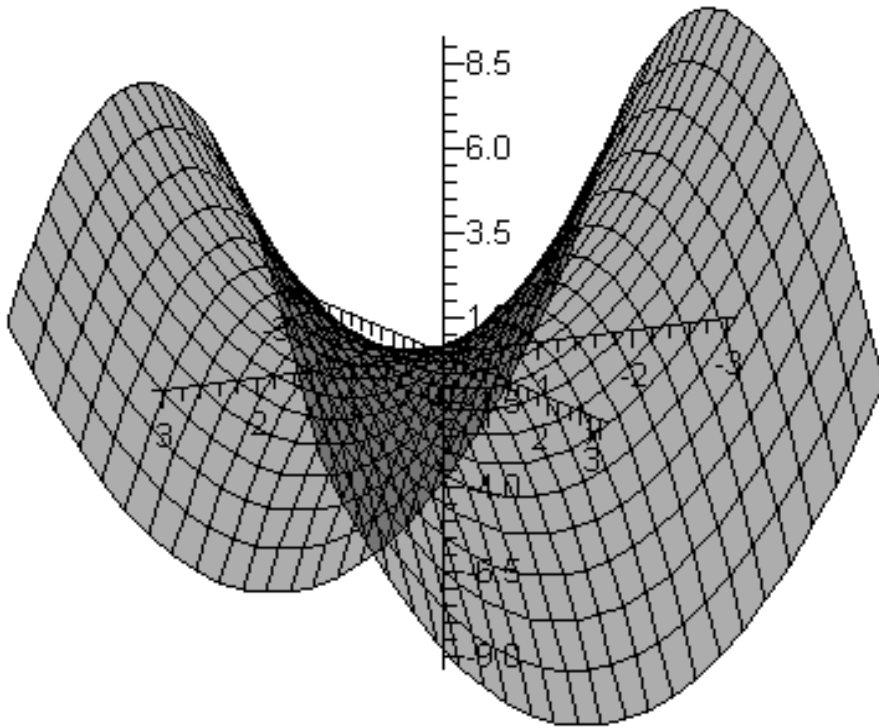
$$\text{nhưng } f(x, 0) = f(0, 0), \forall x \neq 0$$

$$\text{và } f(0, y) = f(0, 0), \forall y \neq 0$$

Tức là: trong lân cận V bất kỳ của $(0, 0)$ luôn luôn có ít nhất 1 điểm (x, y) để dấu “ $=$ ” xảy ra.



3/ $f(x, y) = x^2 - y^2$ không đạt cực trị tại $(0, 0)$ vì
 $f(x, 0) > 0 = f(0, 0), \forall x \neq 0$; $f(0, y) < f(0, 0), \forall y \neq 0$



Trong mọi lân cận của $(0, 0)$ luôn luôn có ít nhất 2 điểm P_1, P_2 mà $f(P_1) > f(0, 0)$ và $f(P_2) < f(0, 0)$.

Điều kiện cần của cực trị:

Nếu $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ thì

- Hoặc $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$
- Hoặc đạo hàm riêng tại P_0 không tồn tại.

Định nghĩa:

- $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$: P_0 là điểm dừng
- P_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow P_0$ là điểm dừng hoặc đạo hàm của f tại P_0 không tồn tại

Điều kiện đủ của cực trị:

Hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $P_0(x_0, y_0)$ của f .

1. Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ xác định dương thì f đạt cực tiểu chặt tại P_0 .
2. Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ xác định âm thì f đạt cực đại chặt tại P_0 .
3. Nếu $d^2f(x_0, y_0)$ không xác định dấu thì f không đạt cực trị tại P_0 .

Các bước để tìm cực trị hàm 2 biến

1. Giải hệ pt: $f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$

2. Tính : $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$

và $\Delta = AC - B^2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

f đạt cực tiểu chặt tại P_0

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$$

f đạt cực đại chặt tại P_0

$$\Delta < 0$$

f không đạt cực trị tại P_0

$$\Delta = 0$$

Xét P_0 theo định nghĩa.

VÍ DỤ

1/ Tìm cực trị $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \\ \text{hay } (x, y) = (1, 1)$$

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 6y$$

Tại (0,0): $A = f''_{xx}(0,0) = 0, B = f''_{xy}(0,0) = -3,$

$$C = f''_{yy}(0,0) = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$$

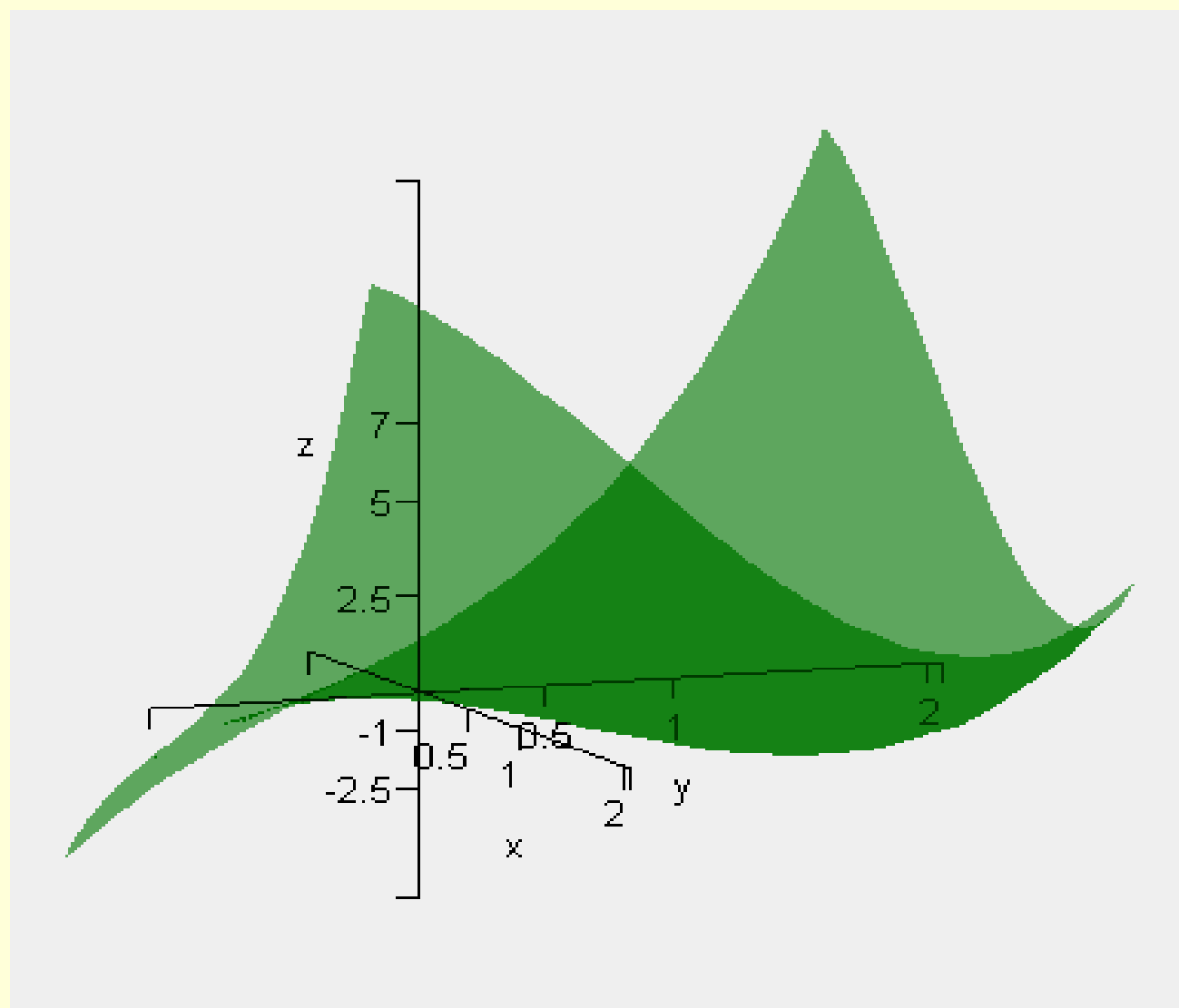
$\Rightarrow f$ không đạt cực trị tại (0,0)

$$f''_{xx} = 6x, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 6y$$

Tại (1,1): $A = f''_{xx}(1,1) = 6, B = f''_{xy}(1,1) = -3,$
 $C = f''_{yy}(1,1) = 6,$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 36 - 9 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại (1,1), $f(1,1) = -1$



2/ Tìm cực trị $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (1, 1) \\ (x, y) = (-1, -1) \\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (1,1): $A = f''_{xx}(1,1) = 10, B = f''_{xy}(1,1) = -2,$
 $C = f''_{yy}(1,1) = 10,$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ đạt cực tiểu tại } (1,1), f(1,1) = -2$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (1,1): $A = f''_{xx}(-1,-1) = 10,$

$$B = f''_{xy}(-1,-1) = -2,$$

$$C = f''_{yy}(-1,-1) = 10,$$

$$\begin{cases} \Delta = AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại $(-1,-1)$, $f(-1,-1) = -2$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại (0,0):

$$A = f''_{xx}(0,0) = -2, B = f''_{xy}(0,0) = -2,$$

$$C = f''_{yy}(0,0) = -2,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \Rightarrow \text{không có kết luận}$$

$$\text{Xét } \Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0)$$

$$= x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$= x^4 + y^4 - (x + y)^2$$

$$\Delta f(0,0) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$$

Nếu $x = -y$: $\Delta f(0,0) = 2x^4 > 0$

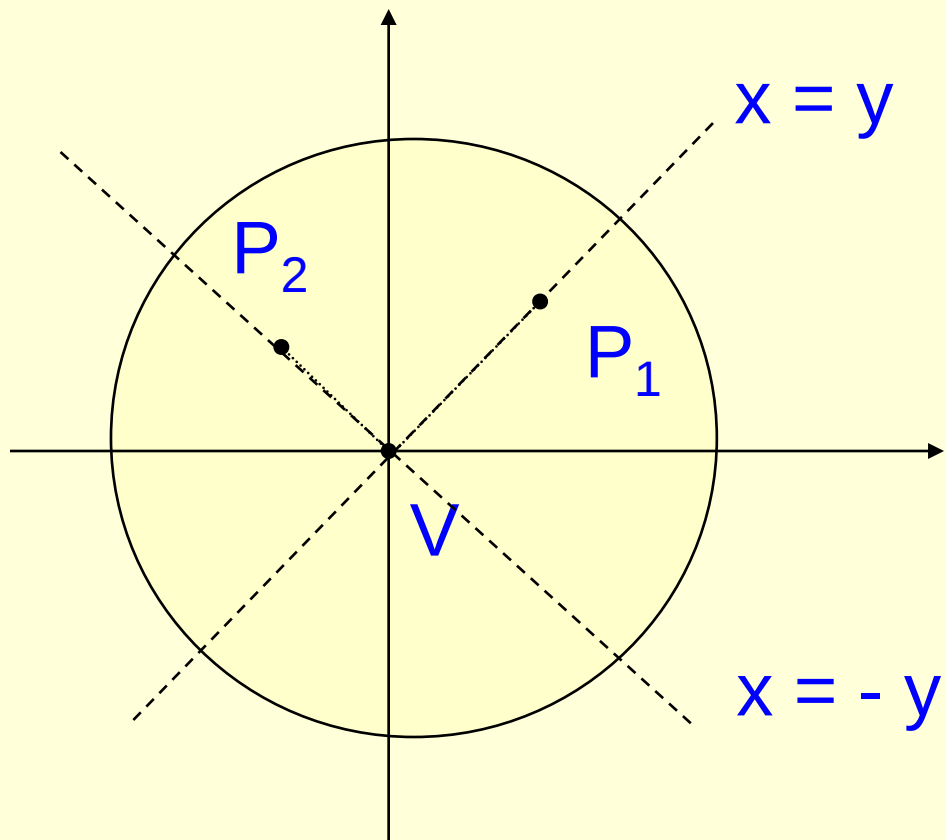
Nếu $x = y$: $\Delta f(0,0) = 2x^4 - 4x^2$

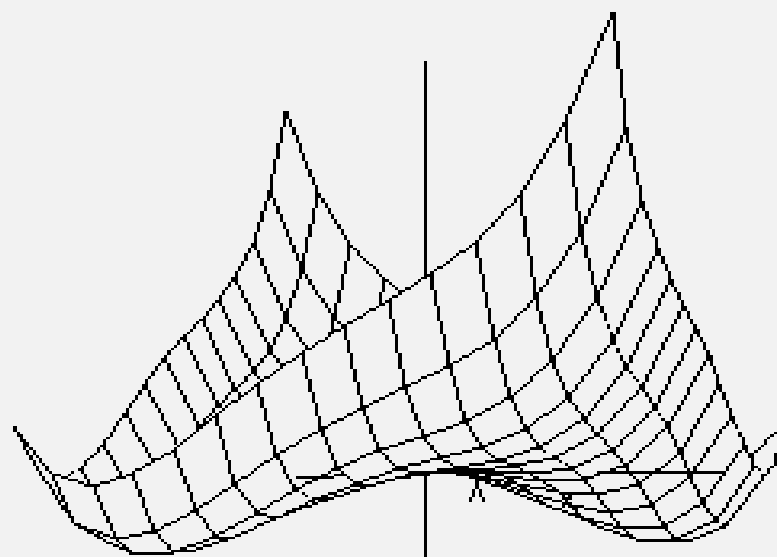
$$= 2x^2(x^2 - 2) < 0 \text{ với } x \text{ gần } 0$$

Vậy trong 1 lân cận tùy của $(0,0)$ luôn luôn có ít nhất 2 điểm P_1, P_2 mà

$$f(P_1) > f(0,0) \text{ và } f(P_2) < f(0,0).$$

Kết luận: f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.





3/ Cho $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

Điểm nào sau đây là cực trị của f

a/ $P_1(0,0)$ c/ $P_3(1/2, -1)$

b/ $P_2(-1, 1)$ d/ $P_4(0,1)$

Vì f có đhr trên R_2 nên f chỉ đạt cực trị tại điểm dừng.

Vậy phải kiểm tra xem điểm nào ở trên là điểm dừng rồi xét Δ tại các điểm này.

(Loại câu hỏi này chỉ xét xem điểm nào thỏa hệ $\{f'_x = 0, f'_y = 0\}$ nhưng không cần giải nếu hệ khó) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

Xét hệ:
$$\begin{cases} f'_x = 8x^3 - 2x = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

$P_1(0,0), P_2(-1, 1),$
 $P_3(1/2, -1),$
 $P_4(0,1)$

Chỉ có P_1, P_3 và P_4 thỏa hệ nên P_2 không là điểm dừng, vậy P_2 không là điểm cực trị

$$f''_{xx} = 24x^2 - 2, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = 12y^2 - 4$$

Tại $P_1(0,0)$: $A = -2$, $B = 0$, $C = -4$

$\Rightarrow \Delta = 8 > 0$, $A < 0$: f đạt cực đại chặt

Tại $P_3(1/2, -1)$: $A = 4$, $B = 0$, $C = 8$

$\Rightarrow \Delta = 32 > 0$, $A > 0$: f đạt cực tiểu chặt

Tại $P_4(0, 1)$: $A = -2$, $B = 0$, $C = 8$

$\Rightarrow \Delta = -16 < 0$: f không đạt cực trị

4/ Tìm cực trị

$$f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2 - 4xz + 4x + 6y - 2z$$

$$\begin{cases} f'_x = -2x - 4z + 4 = 0 \\ f'_y = 2y + 6 = 0 \\ f'_z = 2z - 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, -3, 1)$$

$$d^2z(0, -3, 1) = -2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 8dxdz$$

Đây là dạng toàn phương không các định
dấu nên f không đạt cực trị tại $(0, -3, 1)$ (hay
 f không có cực trị)