

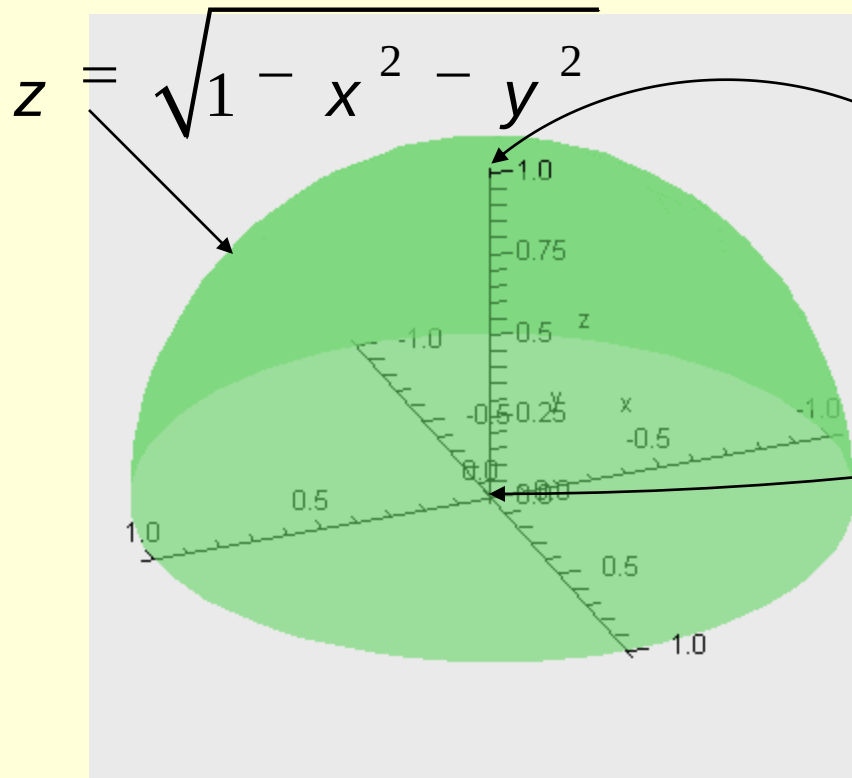
CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN

CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

Xét 2 bài toán:

Bài 1: Tìm cực trị

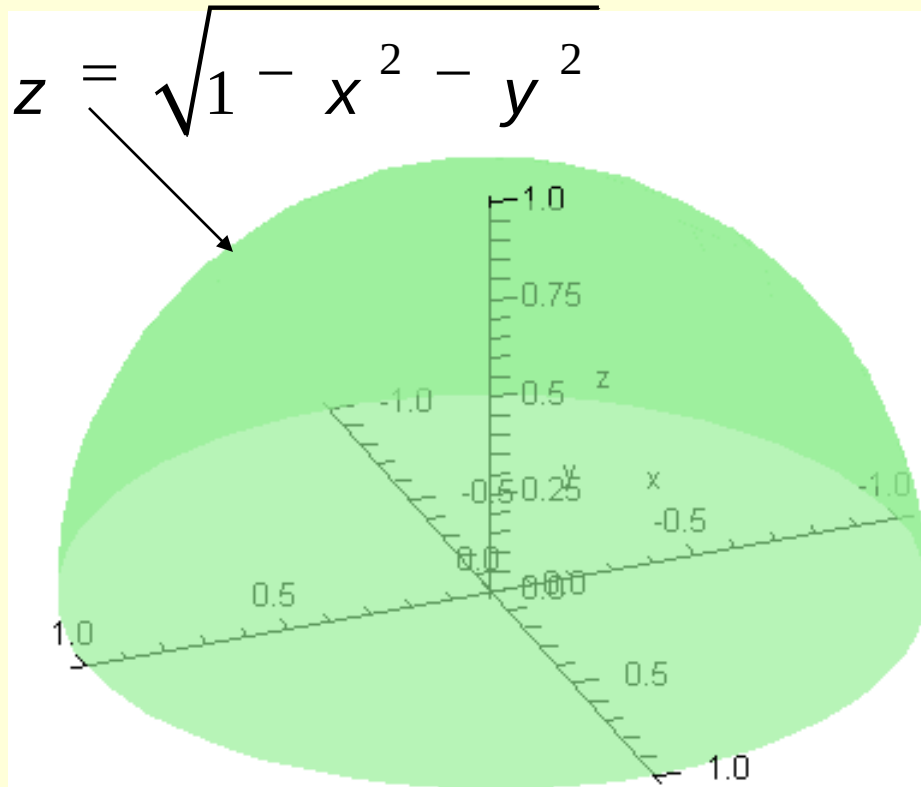
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



Cực đại đạt tại (0,0),
 $z = 1$

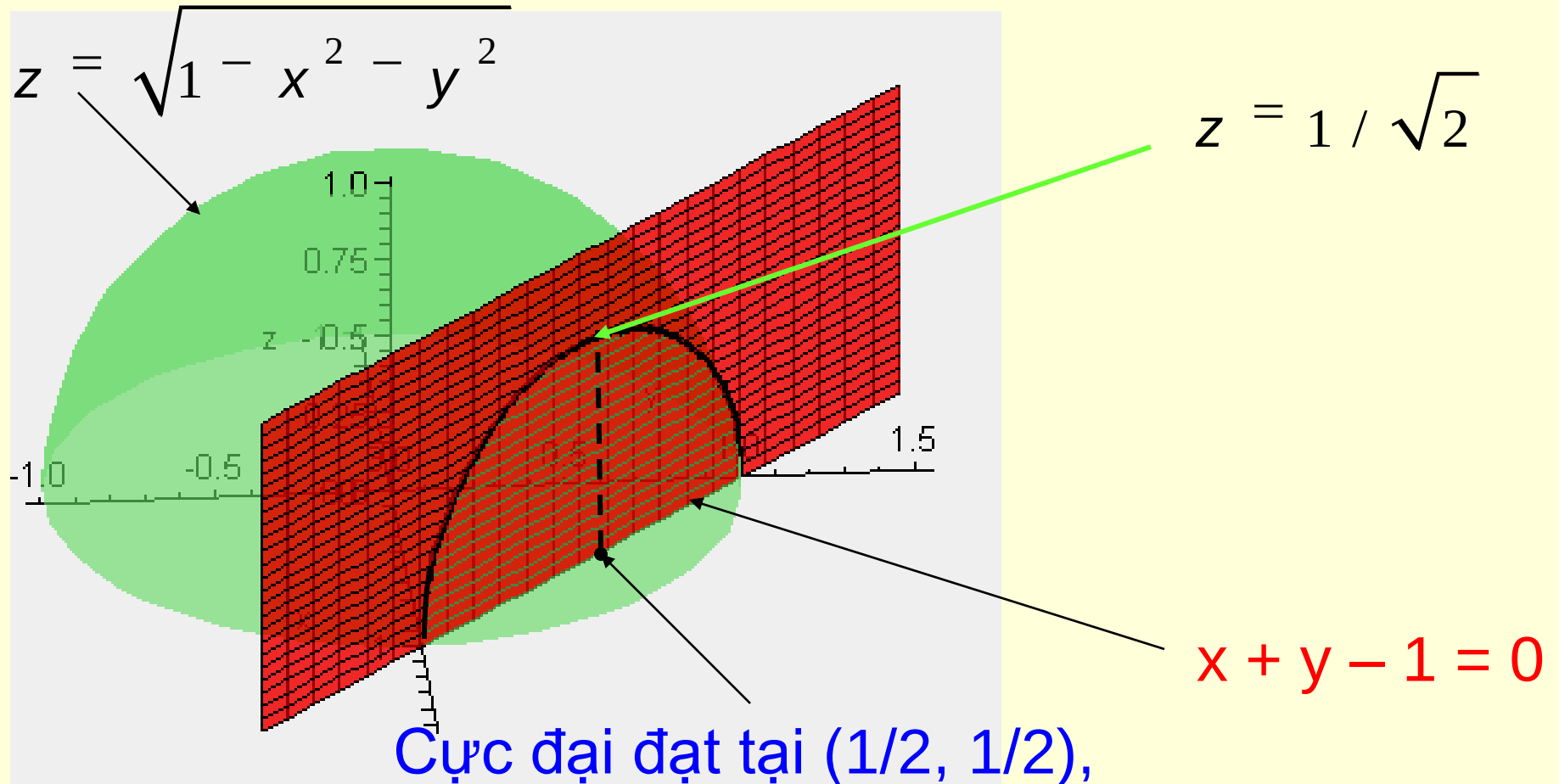
Bài 2: Tìm cực trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$



Bài 2: Tìm cực trị $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$



Định nghĩa:

Hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ đạt cực đại tại M_0 nếu tồn tại 1 lân cận V của M_0 sao cho

$$f(M) \leq f(M_0), \quad \forall M \in V \text{ và } \varphi(M) = 0$$

Tương tự cho định nghĩa cực tiểu có điều kiện.

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ khả vi trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và

$$\varphi'_x{}^2(M_0) + \varphi'_y{}^2(M_0) \neq 0,$$

Nếu f đạt cực trị tại M_0 với điều kiện $\varphi = 0$ thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda \varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

λ : nhân tử Lagrange

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda \varphi'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda \varphi'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

1. M_0 thỏa hệ (*) gọi là điểm dừng trong bài toán cực trị có điều kiện, cũng gọi là điểm dừng của hàm Lagrange

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

2. $d\varphi(M_0) = 0$ (dx và dy liên kết với nhau theo hệ thức này)

Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Giả sử f, φ có các đhr đến cấp 2 liên tục trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và M_0 là điểm dừng của $L(x, y)$,

$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$$

1. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định **dương** thì f đạt **cực tiểu** có điều kiện tại M_0 .
2. Nếu $d^2L(M_0)$ xác định **âm** thì f đạt **cực đại** có điều kiện tại M_0 .

Các bước tìm cực trị có điều kiện hàm 2 biến

Loại 1: điều kiện bậc nhất theo x, y (tìm trên đường thẳng)

$$\varphi(x, y) = ax + by + c = 0$$

$\Rightarrow$ đưa về cực trị hàm 1 biến khi thay y theo x trong f .

Loại 2:(tổng quát) dùng pp nhân tử Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$$

$$B1: \text{ tìm điểm dừng của } L(x, y) : \begin{cases} L'_x(M_0) = 0 \\ L'_y(M_0) = 0 \\ \varphi(M_0) = 0 \end{cases}$$

B2: xét dấu d^2L tại M_0 có kèm đk $d\varphi(M_0) = 0$

- Xác định dương: cực tiểu
- Xác định âm: cực đại

VÍ DỤ

1/ Tìm cực trị

$$z = 1 - 4x - 8y$$

thỏa điều kiện

$$\varphi(x, y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$$

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

$$= 1 - 4x - 8y + \lambda (x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} L'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{cases}$$

Điểm dừng:
$$\begin{cases} x = -4, y = 1, \lambda = -1/2 \\ x = 4, y = -1, \lambda = 1/2 \end{cases}$$

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = -16\lambda, \quad d\varphi = 2xdx - 16ydy$$

Tại $M_1(-4, 1), \lambda = -1/2$

$$\begin{cases} d^2L(-4, 1) = -dx^2 + 8dy^2 \\ d\varphi(-4, 1) = -8dx - 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(-4, 1) = -4dy^2 + 8dy^2 = 4dy^2 > 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1$ là điểm cực tiểu có đk của f , $f(M_1) = 9$

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = -16\lambda, \quad d\varphi = 2xdx - 16ydy$$

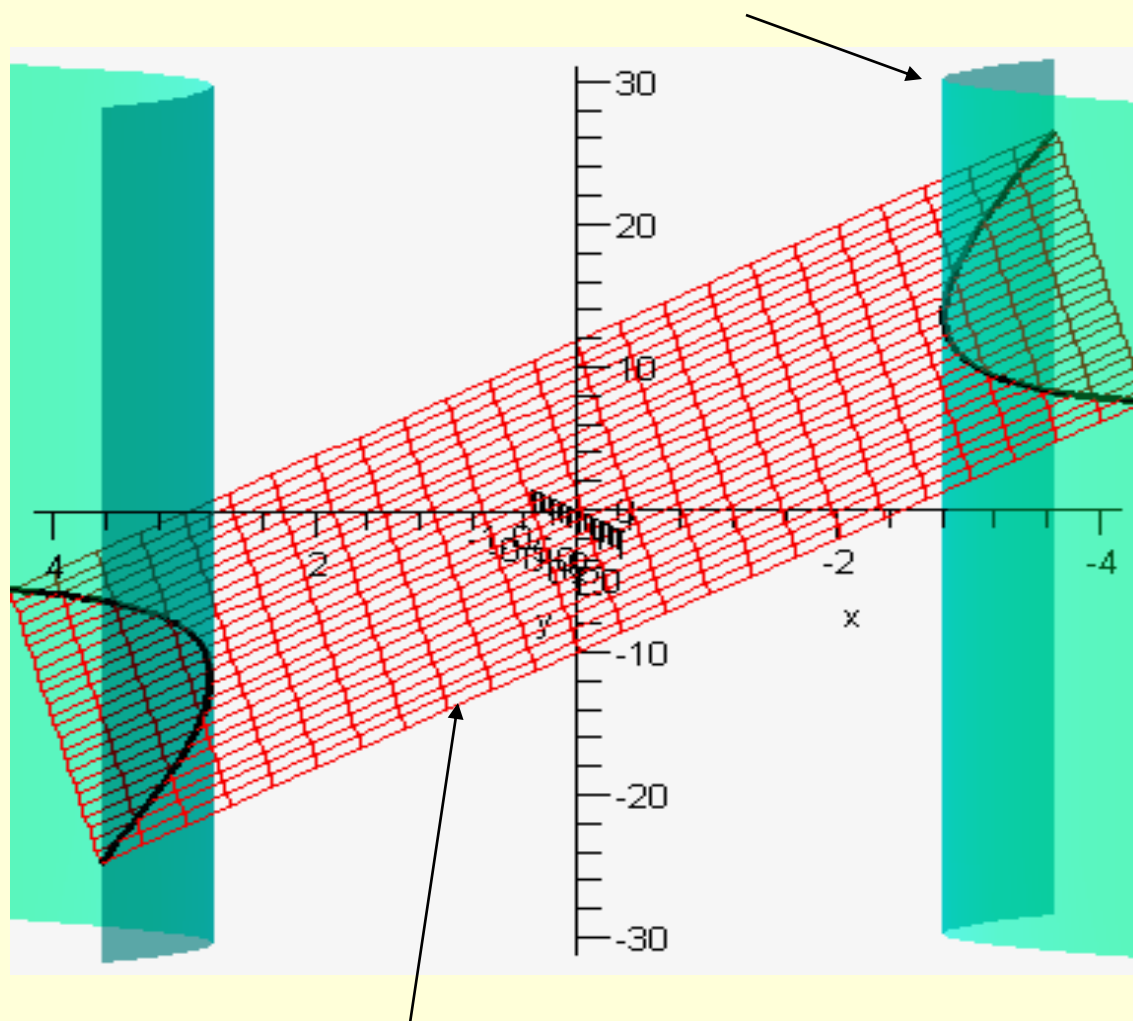
Tại $M_1(4, -1)$, $\lambda = 1/2$

$$\begin{cases} d^2L(4, -1) = dx^2 - 8dy^2 \\ d\varphi(4, -1) = 8dx + 16dy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2L(-4, 1) = 4dy^2 - 8dy^2 = -4dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{cases}$$

$\Rightarrow M_2$ là điểm cực đại có đk của f , $f(M_2) = 7$

$$\varphi(x, y) = x^2 - 8y^2 - 8 = 0$$

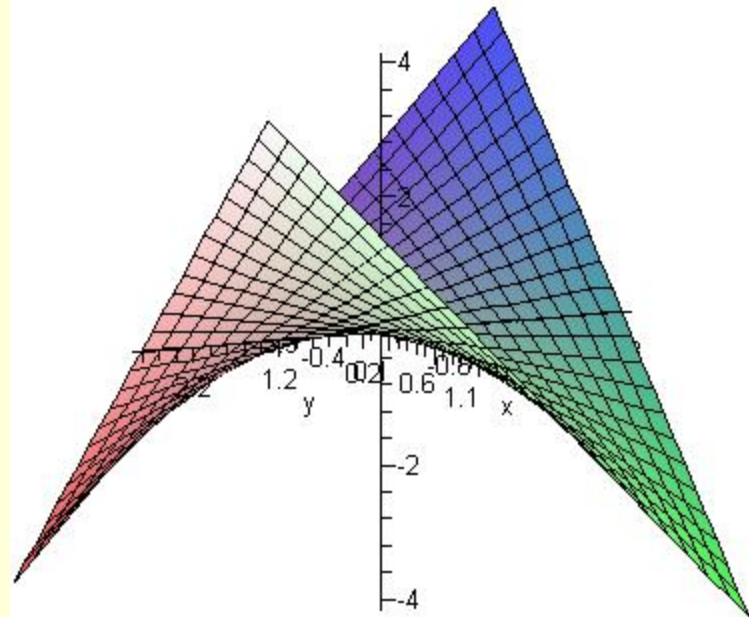
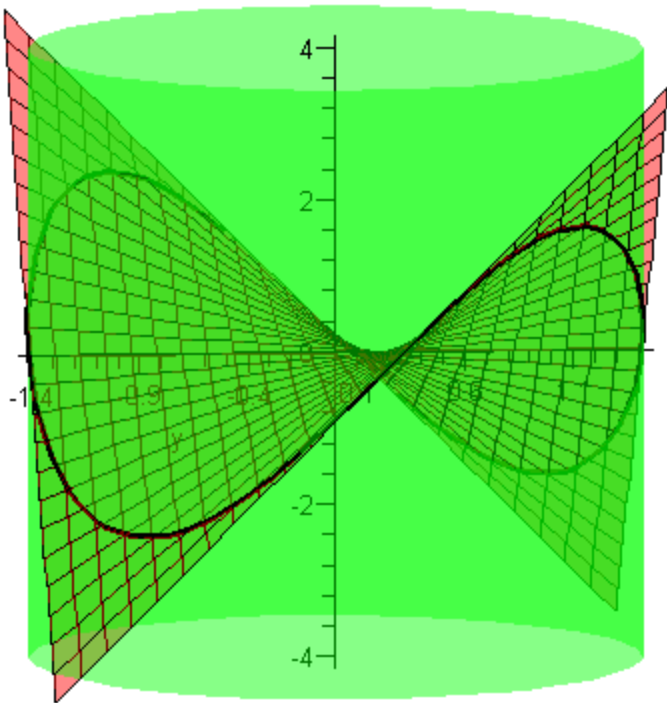


$$z = 1 - 4x^2 - 8y^2$$

2/ Tìm cực trị
thỏa điều kiện

$$z = xy$$

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$



$$z = xy$$

$$L(x, y) = xy + \lambda \left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \right)$$

Điểm dừng của L là n_0 hệ:

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = y + \lambda \frac{x}{4} = 0 \\ L'_y(x, y) = x + \lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2, (x, y) = (2, -1) \text{ hay } (x, y) = (-2, 1) \\ \lambda = -2, (x, y) = (2, 1) \text{ hay } (x, y) = (-2, -1) \end{cases}$$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}, \quad L''_{xy} = 1, \quad L''_{yy} = \lambda, \quad d\varphi(x, y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_1(2, -1)$, $\lambda = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2L(P_1) = \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 + 2dxdy \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi(P_1) = \frac{1}{2}dx - dy = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d^2L(P_1) = 8dy^2 > 0 \\ dx = 2dy \end{array} \right.$$

Vậy f đạt cực tiểu có đk tại P_1 , $f(P_1) = -$

2. Tương tự tại $P_2(-2, 1)$

$$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}, \quad L''_{xy} = 1, \quad L''_{yy} = \lambda, \quad d\varphi(x, y) = \frac{x}{4}dx + ydy$$

Tại $P_3(2, 1), \lambda = -2$

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2L(P_1) = -\frac{1}{2}dx^2 - 2dy^2 + 2dxdy \\ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi(P_1) = \frac{1}{2}dx + dy = 0 \\ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d^2L(P_1) = -8dy^2 < 0 \\ dx = -2dy \end{array} \right.$$

Vậy f đạt cực đại có đk tại $P_3, f(P_3) = 2$.

Tương tự tại $P_4(-2, -1)$

3/ Tìm cực trị $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

thỏa điều kiện $x + y - 1 = 0$

$$x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x \Rightarrow z = \sqrt{2x - 2x^2}$$

Bài toán trở thành tìm cực trị của z với $x \in (0, 1)$

$$z'(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt{2x - 2x^2}}$$

z' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua $x = 1/2$, nên

z đạt cđại tại $x = 1/2$ $f_{cd} = 1 / \sqrt{2}$

Vậy f đạt cđại có điều kiện tại $(x, y) = (1/2, 1/2)$.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT

Định lý: f liên tục trên tập compact D thì f đạt min, max trên D .

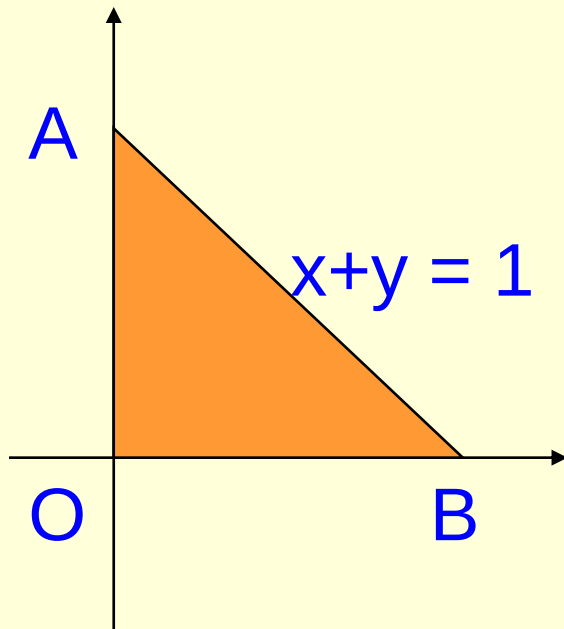
Nhắc lại: tập compact là tập đóng (lấy tất cả các biên) và bị chặn (có thể được bao bởi 1 hình tròn)

Cách tìm gtn, gtnn

1. Tìm điểm dừng của f trên miền mở của D (phần bỏ biên).
2. Tìm các điểm đặc biệt trên biên của D
 - a. Điểm dừng của hàm Lagrange (tổng quát).
 - b. Nếu biên là đoạn thẳng, chuyển f về hàm 1 biến, tìm các điểm có khả năng đạt min, max của hàm 1 biến này.
3. So sánh giá trị của f tại các điểm trên
 $\Rightarrow \min, \max$

VÍ DỤ

1/ Trên tam giác OAB, với $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ và $B(1, 0)$, tìm các điểm $M(x, y)$ có tổng bình phương khoảng cách đến các đỉnh là lớn nhất, bé nhất.



$$OM^2 = x^2 + y^2,$$

$$AM^2 = x^2 + (y - 1)^2,$$

$$BM^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

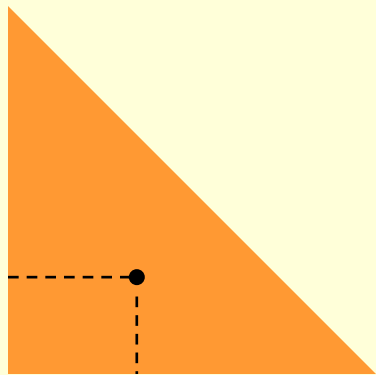
$$\text{Đặt } z = OM^2 + AM^2 + BM^2$$

$$\Rightarrow z = f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

Bài toán trở thành: tìm gtn, gtnn của z trên

$$D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$$

Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D là nghiệm hệ



$$\begin{cases} f'_x = 6x - 2 = 0 \\ f'_y = 6y - 2 = 0 \\ x > 0, y > 0, x + y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

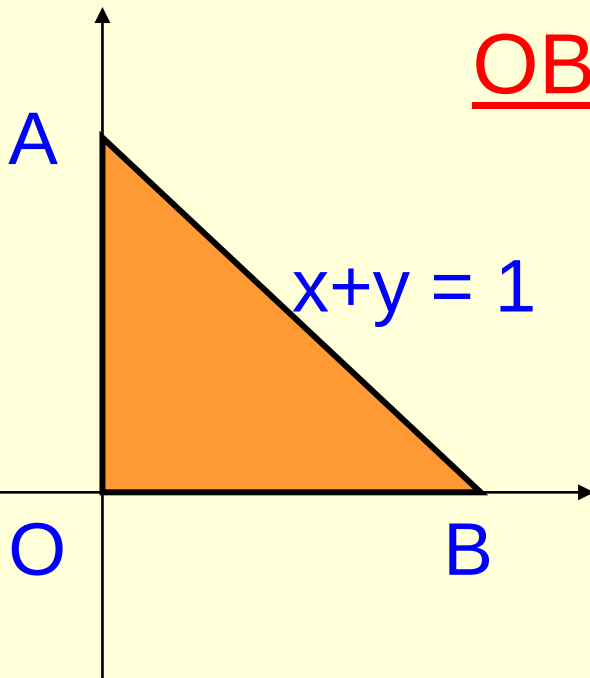
Xét trên biên D

$$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

OA: $x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 3y^2 - 2y + 2$

$$z'(y) = 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1/3$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: $(0,0), (0,1), (0,1/3)$



OB: $y = 0, 0 \leq x \leq 1, z = 3x^2 - 2x + 2$

$$z'(x) = 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt:

$(0,0), (1,0), (1/3,0)$

$$z = f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$$

AB: $y = 1 - x, 0 \leq x \leq 1, z = 6x^2 - 6x + 3$

$$z'(x) = 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

$\Rightarrow$ các điểm đặc biệt: $(1/2, 1/2), (0, 1), (1, 0)$

Tính f tại các điểm được chỉ ra

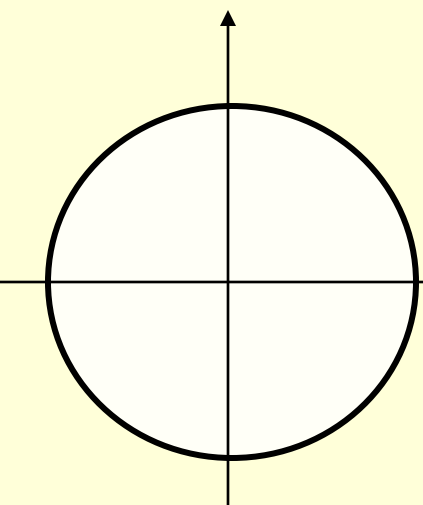
$$f(1/3, 1/3) = 4/3, f(0, 0) = 2, f(0, 1) = 3, f(1, 0) = 3$$

$$f(0, 1/3) = 5/3, f(1/3, 0) = 5/3, f(1/2, 1/2) = 3/2$$

Vậy $f_{\min} = f(1/3, 1/3) = 4/3,$

$$f_{\max} = f(1, 0) = f(0, 1) = 3$$

2/ Tìm gtn, gtnn của $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$ trên hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 1$



Điểm dừng của $z = f(x, y)$ trên miền mở của D là nghiệm hệ

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 3 = 0 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (3/2, -2) \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Trên biên $D: x^2 + y^2 = 1$, xét hàm Lagrange

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Điểm đặc biệt trên biên là điểm dừng của

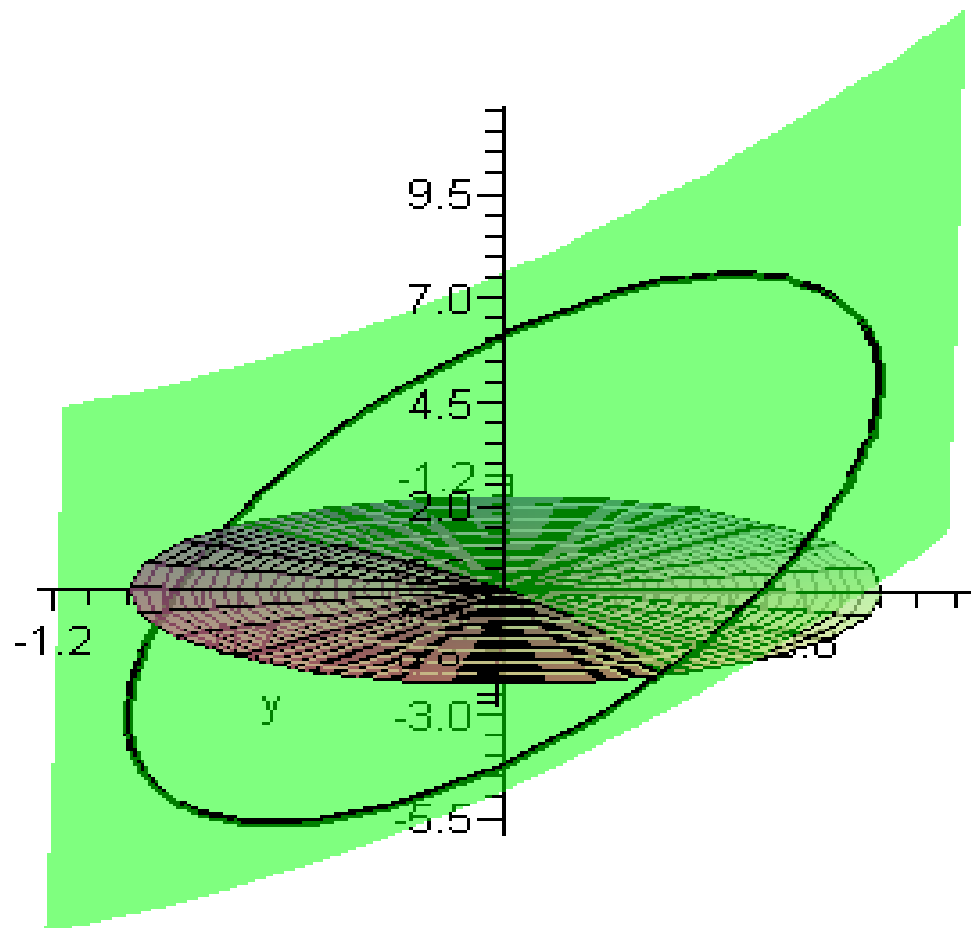
$$L(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 2x - 3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y(x, y) = 2y + 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right) \text{ hay } (x, y) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

(Không cần chỉ ra λ .)

$$\Rightarrow f\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{19}{5}, \quad f\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{29}{5}$$



$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 4y$$

