

GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN

- CHƯƠNG I: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN
- CHƯƠNG II : TÍCH PHÂN BỘI
- CHƯƠNG III: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG
- CHƯƠNG IV: TÍCH PHÂN MẶT
- CHƯƠNG V: CHUỖI SỐ - CHUỖI LŨY THỪA

CHƯƠNG I: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

- 1: Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục
- 2: Đạo hàm riêng
- 3: Khả vi và Vi phân
- 4: Đạo hàm riêng và vi phân hàm hợp
- 5: Đạo hàm riêng và vi phân hàm ẩn
- 6: Công thức Taylor – Maclaurin
- 7: Cực trị hàm nhiều biến : Cực trị tự do, cực trị có điều kiện, GTLN-GTNN trong miền đóng

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Định nghĩa hàm 2 biến : Cho D là tập con của $\mathbb{R}^2$

Hàm 2 biến $f(x,y)$ là ánh xạ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \in D \quad f(x, y) = z$$

Miền xác định của hàm là tất cả các giá trị của (x,y) làm biểu thức của hàm có nghĩa

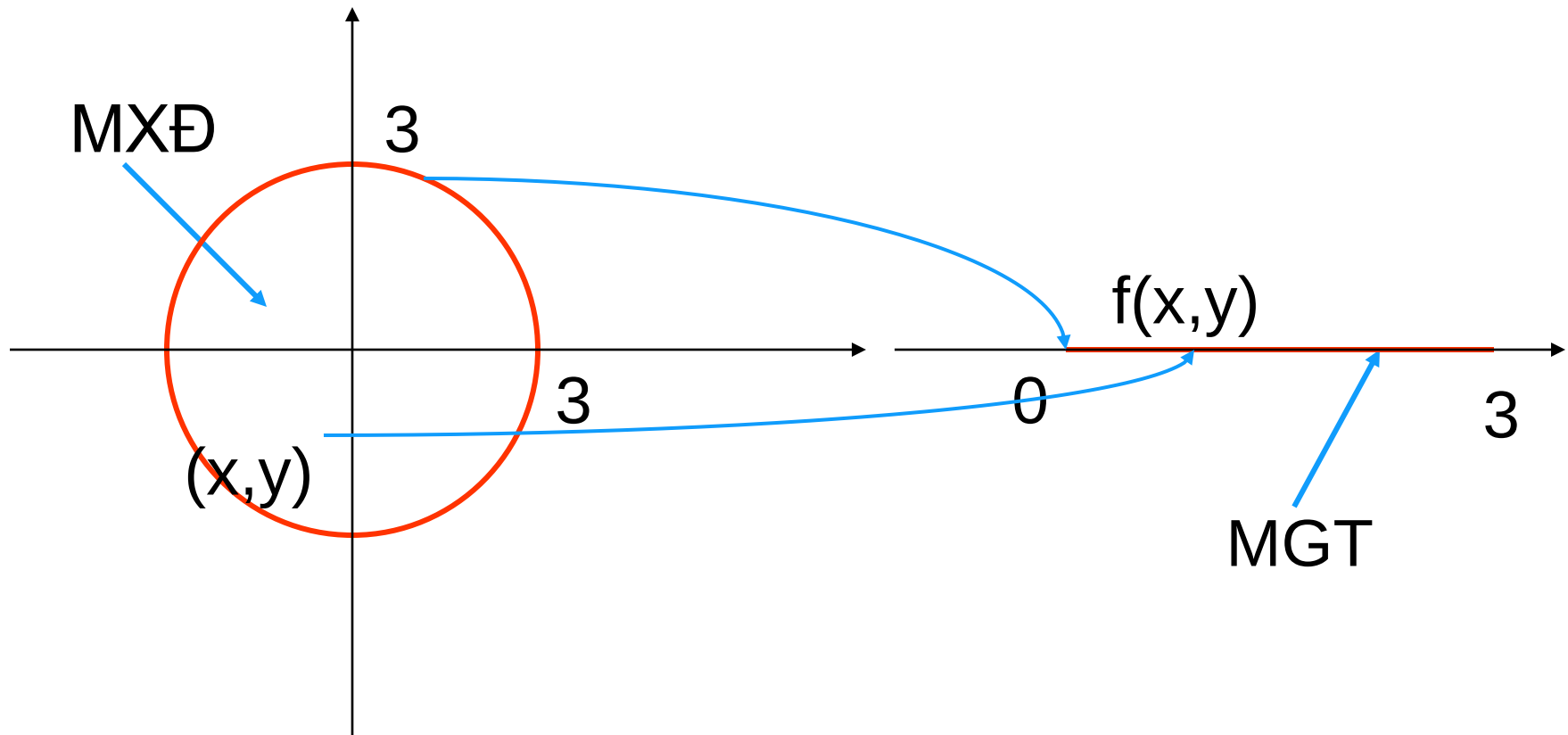
Miền giá trị của hàm là tập các giá trị mà hàm có thể nhận được

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Ví dụ : Tìm MXĐ, MGT của hàm $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

MXĐ là hình tròn $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$

MGT là đoạn $[0, 3]$



1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Ví dụ: Cho hàm $f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

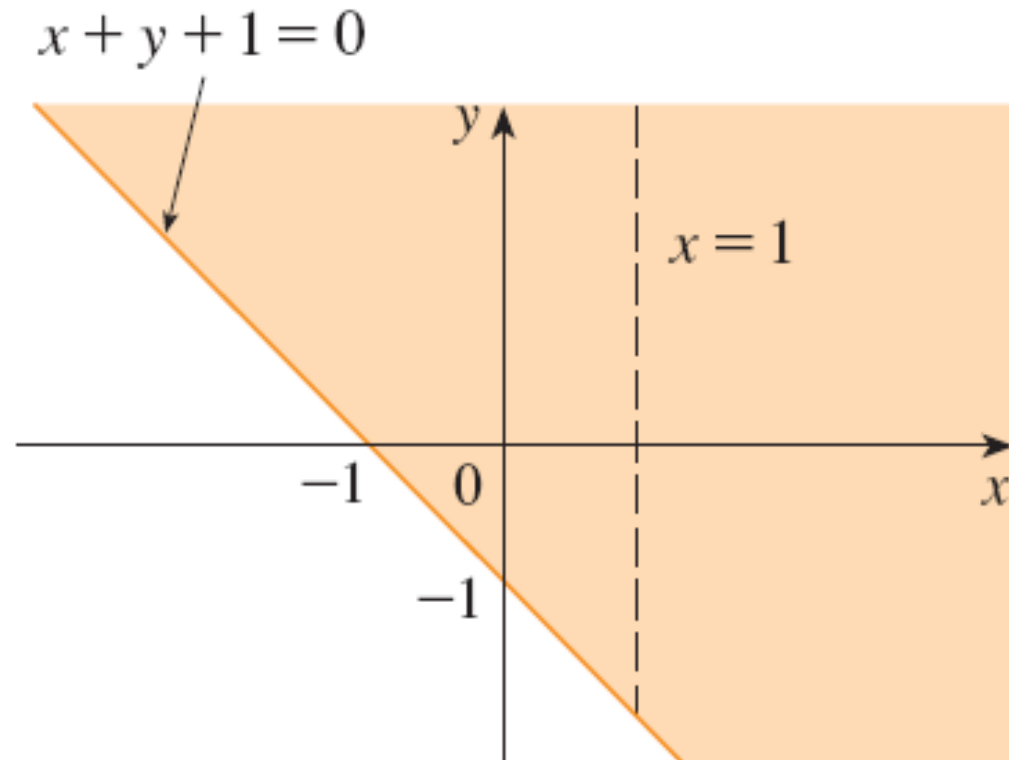
Tính $f(2,1)$ và tìm MXĐ của f

Giải :

a. $f(2,1) = 2$

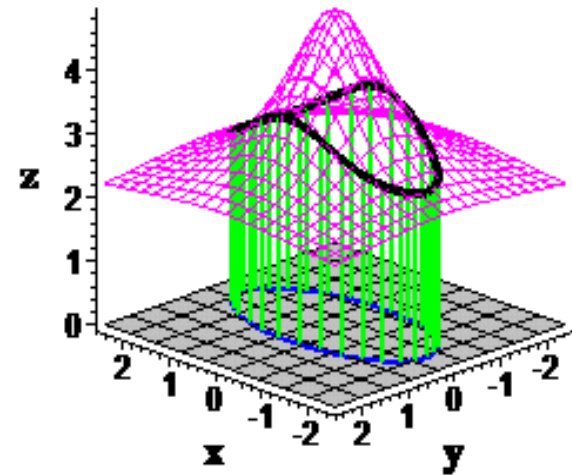
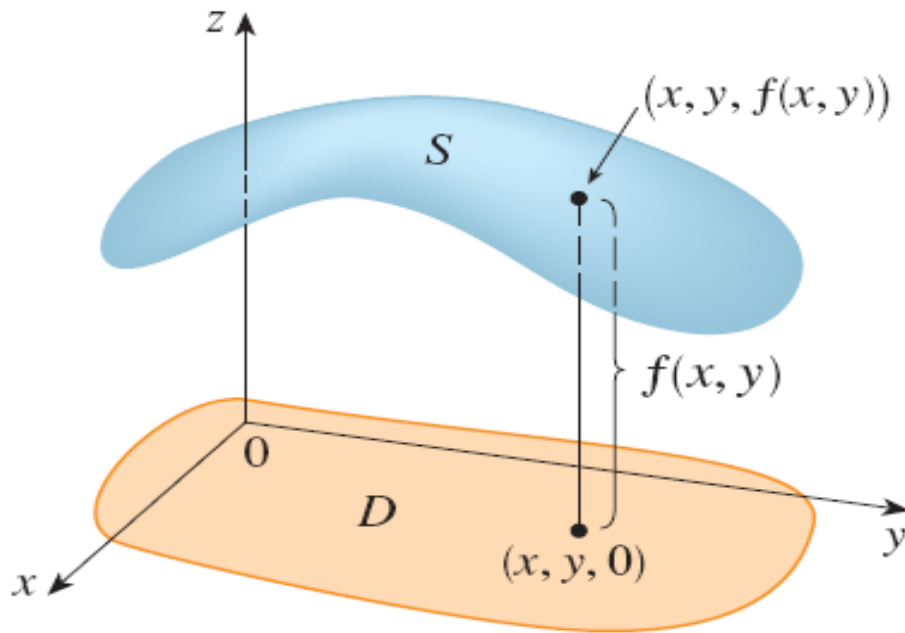
b. MXĐ :

Ta lấy nửa mặt
phẳng phía trên
đường thẳng $x+y+1$
 $= 0$ và bỏ đi toàn bộ
đường $x = 1$



1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Cho $f(x, y)$ là hàm 2 biến với MXĐ là D . Đồ thị của f là tập tất cả các điểm $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, với $(x, y) \in D$, $z = f(x, y)$



❖ Đồ thị hàm $z = f(x, y)$ là phần mặt S , khác với đồ thị hàm 1 biến $y = f(x)$ là phần đường cong.

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Hình tròn mở tâm $M_0(x_0, y_0)$, bán kính r – kí hiệu $B(M_0, r)$ là tập

$$B(M_0, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 : d(M, M_0) < r\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

Hình tròn mở này còn được gọi là một **r - lân cận của điểm M**

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Cho tập D và 1 điểm M thuộc $\mathbb{R}^2$. Ta định nghĩa 2 loại điểm như sau :

Điểm trong : M gọi là điểm trong của D nếu tồn tại ít nhất $r > 0$ sao cho r - lân cận của M là $B(M, r)$ nằm hoàn toàn trong D .

Điểm biên : M gọi là điểm biên của D nếu với mọi $r > 0$, hình cầu mở $B(M, r)$ chứa những điểm thuộc D và những điểm không thuộc D .

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Tập D được gọi là **tập đóng** nếu D chứa mọi điểm biên của nó. Tập các điểm biên của D gọi là biên của D

Tập D được gọi là **tập mở** nếu $\mathbb{R}^2 \setminus D$ là tập đóng, khi đó, mọi điểm thuộc D đều là điểm trong, D không chứa bất kỳ điểm biên nào

Tập D được gọi là **tập bị chặn** nếu nó được chứa trong một hình cầu nào đó, tức là $\exists r : D \subset B(O, r)$

Như vậy, có những tập chỉ chứa 1 phần biên mà không chứa toàn bộ biên nên sẽ là **tập không mở, không đóng**.

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Ví dụ : Cho D là phần hình cầu

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

Biên của D là toàn bộ mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, do đó D không chứa bất kỳ điểm biên nào tức là mọi điểm thuộc D đều là điểm trong. Vậy **D là tập mở**

Ví dụ : Cho hình vành khăn

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

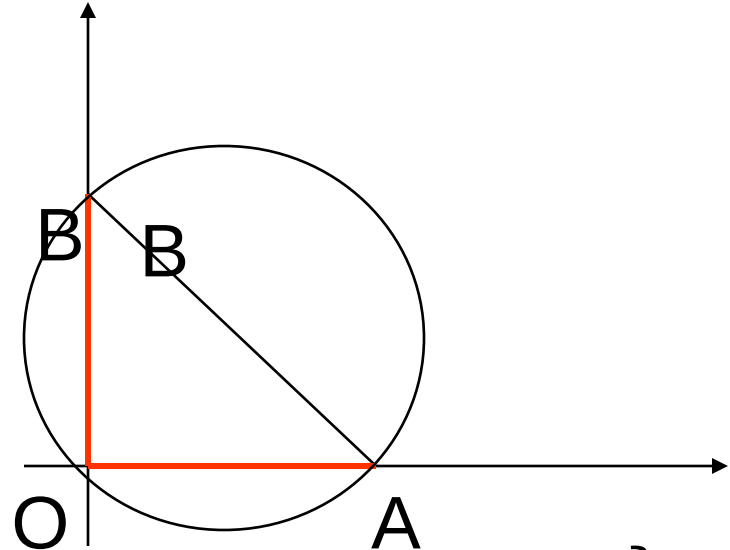
Biên của D là 2 đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$ nằm hoàn toàn trong D nên **D là tập đóng**

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Ví dụ : Trong $\mathbb{R}^2$ cho miền D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Biên của D là 3 đoạn OA , OB , AB . Miền D không chứa đoạn AB tức là D không chứa mọi điểm biên nên **D không là tập đóng.**



Tuy nhiên, **D không là tập mở** vì D chứa các điểm biên thuộc đoạn OA , OB

Tập **D là tập bị chặn** vì ta có thể lấy đường tròn ngoại tiếp D chứa D (đường tròn tâm I là trung điểm AB , bán kính $r = 1/2AB$) tức là D nằm hoàn toàn trong 1 hình cầu mở

1 : Các khái niệm cơ bản – Giới hạn và liên tục

Hàm liên tục : Hàm $f(x,y)$ được gọi là liên tục tại (x_0,y_0) nếu $f(x_0,y_0)$ xác định và

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Hàm liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền D

Tổng, tích, thương của 2 hàm liên tục là hàm liên tục

Hợp của 2 hàm liên tục là một hàm liên tục

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$

2 : Đạo hàm riêng

Định nghĩa đạo hàm riêng: Cho hàm 2 biến $f(x,y)$, đạo hàm theo biến x của hàm f tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn (nếu có)

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm riêng của hàm f theo biến y

Quy tắc: Khi tính đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến x , ta coi y là hằng số

2 : Đạo hàm riêng

Ví dụ: Tính đạo hàm riêng của các hàm sau:

$$a. f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b. f(x,y) = e^{\cos \frac{x}{y}}$$

$$c. f(x,y,z) = \ln(x + e^y) + xyz$$

Giải :

$$a. f_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$b. f_x' = e^{\cos \frac{x}{y}} \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \frac{1}{y}, f_y' = e^{\cos \frac{x}{y}} \left(-\sin \frac{x}{y} \right) \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

$$c. f_x' = \frac{1}{x + e^y} + yz, f_y' = \frac{e^y}{x + e^y} + xz, f_z' = xy$$

2 : Đạo hàm riêng

Ví dụ : Cho hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ Tính f'_x, f'_y tại $(0,0)$

Giải :

Nếu tính bằng cách thông thường, ta sẽ không tính được đhr tại điểm đặc biệt $(0,0)$. Do đó, ta sẽ tính các đhr trên bằng định nghĩa

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3} - 0}{\Delta x} = 1$$

Vì vai trò của x, y như nhau trong hàm f nên ta cũng có $f'_y(0,0) = 1$

2 : Đạo hàm riêng

Ví dụ : Tính các đhr của hàm $f(x,y,z) = (y/x)^z$

Giải: Ta tính 3 đhr của hàm 3 biến

Để tính đhr của f theo x hoặc y, ta viết lại

$$f(x,y,z) = y^z \cdot x^{-z}$$

rồi tính đạo hàm bình thường

Lấy đhr theo x: y^z , z là hằng số nên: $f'_x = y^z \cdot (-z)x^{-z-1}$

Tương tự: $f'_y = zy^{z-1}x^{-z}$

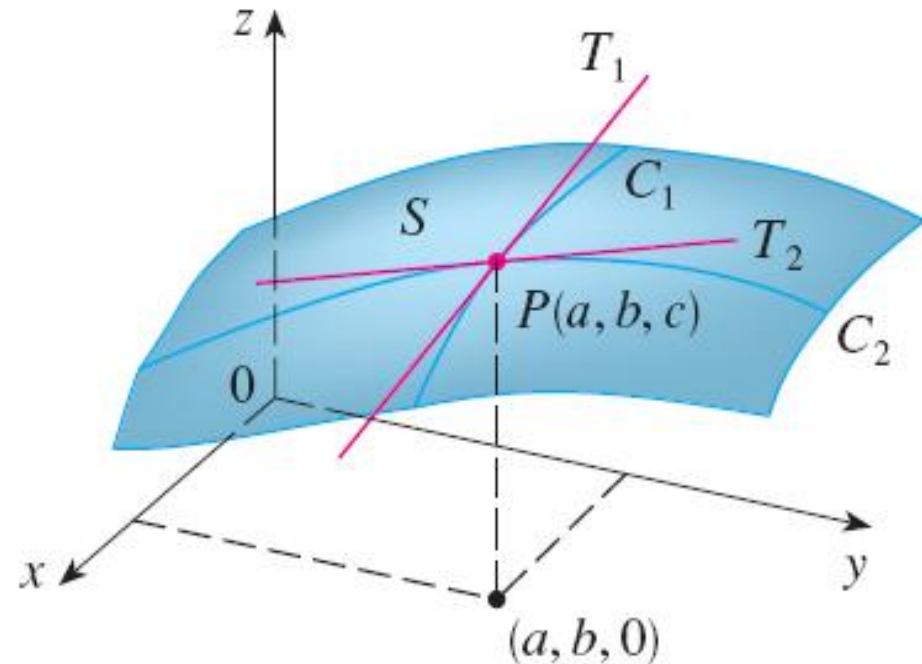
Cuối cùng, tính đhr theo z thì ta sẽ để nguyên hàm ban đầu vì y/x là hằng số nên : $f'_z = (y/x)^z \ln(y/x)$

2 : Đạo hàm riêng

Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ tại (a,b) :

Gọi S là mặt cong $z=f(x,y)$
 C_1 là giao của S và mặt phẳng $y=b$ thì đạo hàm

$f'_x(a,b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến T_1 hay là hệ số góc của mặt S theo phương Ox tại $P(a,b,c)$



Tương tự, hệ số góc của tiếp tuyến T_2 tức là hệ số góc của mặt S theo phương Oy là $f'_y(a,b)$

2 : Đạo hàm riêng

Đạo hàm cấp 2 của hàm $f(x,y)$ là đạo hàm của đạo hàm cấp 1:

Đạo hàm cấp 2 theo x :

$$f_{\cancel{xx}}(x_0, y_0) = \frac{\cancel{f}^2}{\cancel{x}^2}(x_0, y_0) = \cancel{f}_x(\cancel{f}_x)(x_0, y_0)$$

Đạo hàm cấp 2 theo y :

$$f_{\cancel{yy}}(x_0, y_0) = \frac{\cancel{f}^2}{\cancel{y}^2}(x_0, y_0) = \cancel{f}_y(\cancel{f}_y)(x_0, y_0)$$

Đạo hàm cấp 2 hỗn hợp:

$$f_{\cancel{xy}}(x_0, y_0) = \frac{\cancel{f}^2}{\cancel{y}\cancel{x}}(x_0, y_0) = \cancel{f}_x(\cancel{f}_y)(x_0, y_0)$$

2 : Đạo hàm riêng

Định lý Schwartz : Nếu hàm $f(x,y)$ và các đạo hàm riêng f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} tồn tại và liên tục trong miền mở chứa (x_0, y_0) thì $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Ghi chú :

1. Đối với các hàm sơ cấp thường gặp, định lý Schwartz đúng tại các điểm tồn tại đạo hàm
2. Định lý Schwartz còn đúng cho các đạo hàm riêng từ cấp 3 trở lên. Tức là các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau khi số lần lấy đạo hàm theo mỗi biến bằng nhau, mà không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm theo các biến

2 : Đạo hàm riêng

Ví dụ: Tính đạo hàm riêng đến cấp 2 của hàm

$$f(x, y) = \sin(e^x + e^y)$$

Giải :

Hàm 2 biến nên ta tính 2 đạo hàm riêng cấp 1

$$f'_x = e^x \cos(e^x + e^y), f'_y = e^y \cos(e^x + e^y)$$

và 4 đạo hàm riêng cấp 2

$$f''_{xx} = e^x \frac{d}{dx} \cos(e^x + e^y) - e^x \sin(e^x + e^y) \frac{d}{dx}(e^x + e^y)$$

$$f''_{yy} = e^y \frac{d}{dy} \cos(e^x + e^y) - e^y \sin(e^x + e^y) \frac{d}{dy}(e^x + e^y)$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = e^x e^y \frac{d}{dx} \sin(e^x + e^y)$$

2 : Đạo hàm riêng

Tương tự, ta có các đạo hàm riêng cấp $(n+1)$ là đạo hàm của đạo hàm cấp n

Ví dụ: Tính đạo hàm riêng cấp 3 của hàm:

$$f(x,y) = x^2y - 3e^{x+y}$$

Giải:

$$2 \text{ đạo hàm riêng cấp } 1 : f'_x = 2xy - 3e^{x+y}, f'_y = x^2 - 3e^{x+y}$$

$$4 \text{ đạo hàm riêng cấp } 2 : f''_{xx} = 2y - 3e^{x+y}, f''_{yy} = -3e^{x+y},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x - 3e^{x+y}$$

$$8 \text{ đạo hàm riêng cấp } 3 : f'''_{xxx} = -3e^{x+y}, f'''_{xxy} = 2 - 3e^{x+y} = f'''_{yxx} = f'''_{xyx},$$

$$f'''_{yyy} = -3e^{x+y}, f'''_{yyx} = -3e^{x+y} = f'''_{yxy} = f'''_{xyy}$$

2 : Đạo hàm riêng

Ghi nhớ: Đạo hàm riêng cấp cao hỗn hợp bằng nhau nếu số lần lấy đạo hàm theo các biến bằng nhau (không kể đến thứ tự lấy đạo hàm theo từng biến)

Ví dụ: Cho hàm $f(x,y,z) = x \cos y - 2y \sin z$. Tính đạo hàm riêng cấp 2.

3 đạo hàm cấp 1:

$$f'_x = \cos y, f'_y = -x \sin y - 2 \sin z, f'_z = -2y \cos z$$

9 đạo hàm cấp 2

$$f''_{xx} = 0, f''_{xy} = -\sin y = f''_{yx}, f''_{xz} = 0 = f''_{zx},$$

$$f''_{yy} = -x \cos y, f''_{yz} = -2 \cos z = f''_{zy}, f''_{zz} = 2y \sin z$$