

3 : Khả vi và Vi phân

Hàm 2 biến $f(x,y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ viết được dưới dạng $\Delta f = A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$, trong đó A, B là hằng số, $\alpha, \beta \rightarrow 0$ khi $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$. Khi ấy, đại lượng $A \Delta x + B \Delta y$ được gọi là vi phân của hàm $f(x,y)$ tại (x_0, y_0) và kí hiệu là $df(x_0, y_0) = A \Delta x + B \Delta y$

Định lý 1: Hàm khả vi tại (x_0, y_0) thì liên tục tại đó

Định lý 2: (Điều kiện cần khả vi) Nếu hàm $f(x,y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì nó có các đạo hàm riêng theo x, y tại (x_0, y_0) và tương ứng bằng A, B trong định nghĩa vi phân.

3 : Khả vi và Vi phân

Định lý 3: (Điều kiện đủ khả vi) Cho $f(x,y)$ xác định trong miền mở chứa (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng liên tục tại (x_0, y_0) thì hàm khả vi tại (x_0, y_0)

Từ 2 định lý 2, 3 ta có biểu thức của vi phân

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

Tương tự như hàm 1 biến, ta có các công thức

$$d(f + g) = df + dg$$

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$$

3 : Khả vi và Vi phân

Ví dụ: Cho hàm $f(x,y) = 2x^2y - 3xy^2$. Tính $df(2,-1)$

Giải:

Tính đạo hàm riêng $f'_x = 4xy - 3y^2, f'_y = 2x^2 - 6xy$

Thay vào công thức vi phân $df(2,-1) = -11dx + 20dy$

Ví dụ : Tính vi phân hàm $f(x,y,z) = (xy)^z$

Tương tự như hàm 2 biến, ta có vi phân hàm 3 biến

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \quad \text{Nên ta được}$$

$$df = zx^{z-1}y^z dx + zx^zy^{z-1} dy + (xy)^z \ln(xy) dz$$

3 : Khả vi và Vi phân

Vi phân cấp 2 là vi phân của vi phân cấp 1

$$\begin{aligned}
 d^2 f &= d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = d(f_x dx) + d(f_y dy) \\
 &= (d(f_x)dx + f_x d(dx)) + (d(f_y)dy + f_y d(dy)) \\
 &= f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2
 \end{aligned}$$

Hay ta viết dưới dạng

$$d^2 f = \frac{f_{xx}}{1} dx^2 + 2 \frac{f_{xy}}{1} dx dy + \frac{f_{yy}}{1} dy^2$$

Vậy ta viết dưới dạng quy ước sau

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

3 : Khả vi và Vi phân

Tổng quát công thức trên cho hàm 3 biến và cho vi phân cấp 3

Vi phân cấp 3 của hàm 2 biến $f(x,y)$

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

Vi phân cấp 2 của hàm 3 biến $f(x,y,z)$

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx$$

3 : Khả vi và Vi phân

Ví dụ : Cho hàm $f(x,y,z) = xy^2 - 2yz^2 + e^{x+y+z}$. Tính df, d^2f

Giải

Tương tự ví dụ trên, ta có

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$df = (y^2 + e^{x+y+z})dx + (2xy - 2z^2 + e^{x+y+z})dy + (-4yz + e^{x+y+z})dz$$

$$d^2f = f_{xx} dx^2 + f_{yy} dy^2 + f_{zz} dz^2 + 2f_{xy} dx dy + 2f_{yz} dy dz + 2f_{zx} dz dx$$

$$d^2f = e^{x+y+z} dx^2 + (2x + e^{x+y+z}) dy^2 + (-4y + e^{x+y+z}) dz^2 + 2(2y + e^{x+y+z}) dx dy + 2(-4z + e^{x+y+z}) dy dz + 2(e^{x+y+z}) dz dx$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Đạo hàm riêng cấp 1 của hàm hợp

Định lý : Cho hàm $z = z(x, y)$ khả vi trong miền D ; x, y là các hàm theo biến t : $x = x(t), y = y(t)$ khả vi trong khoảng (t_1, t_2) , khi ấy hàm hợp $z = z(x(t), y(t))$ cũng khả vi trong khoảng (t_1, t_2) và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Ví dụ : Cho hàm $z = x^2 - 3xy$, $x = 2t + 1$, $y = t^2 - 3$. Tính $\frac{dz}{dt}$

$$\text{Giải: } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x - 3y) \cdot 2 + (-3x) \cdot 2t$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

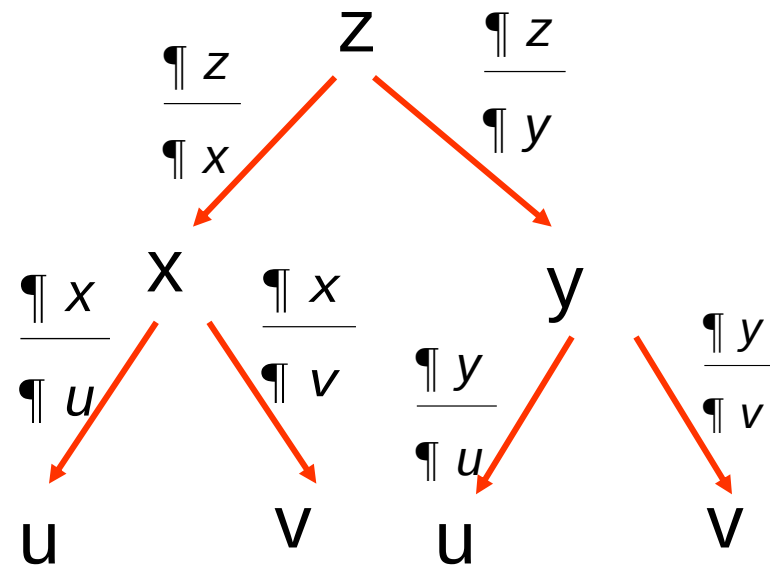
Tổng quát hơn:

Cho $z = z(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ tức là z là hàm hợp của 2 biến u, v . Ta có công thức tương tự:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Ta có thể tổng quát bằng sơ đồ sau :

Cần tính đạo hàm của z theo biến nào ta đi theo đường đến biến đó



4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ : Cho hàm $z = xe^y$, trong đó $x = \cos u + \sin v$,
 $y = u^2 + v^2$. Tính $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$

Giải: Ta sử dụng công thức trên để tính

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = e^y (-\sin u) + xe^y \cdot 2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = e^y (\cos v) + xe^y \cdot 2v$$

Chú ý: Có thể tính đạo hàm trên bằng cách *thay x, y theo u, v* vào biểu thức của hàm z rồi tính *đạo hàm thông thường*. Tuy nhiên, việc sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp (nói chung) sẽ cho ta kết quả nhanh hơn

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = y.f(x^2-y^2)$. Tính z'_x, z'_y, z''_{xy}

Giải: Ta đặt $t = x^2 - y^2$, thì f là hàm theo 1 biến t , $z = y.f$

Vậy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y.f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = y.f'(t) \cdot 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f + y.f'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f + y.f'(-2y)$$

$$\begin{aligned} z''_{xy} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = (2xy.f'(t))'_y \\ &= 2x.f'(t) + 2xy.f''(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \\ &= 2x.f'(t) - 2xy^2.f''(t) \end{aligned}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = x^2y - xy^2$, $x = u^v$, $y = u^2 - v^2$.

Tính z_{uv}

Giải:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u = (2xy - y^2)v u^{v-1} + (x^2 - 2xy)2u$$

Ta lấy đạo hàm theo v của biểu thức trên:

$$\begin{aligned} z_{uv} &= (2xy - y^2)_v v u^{v-1} + (2xy - y^2)(v u^{v-1})_v + (x^2 - 2xy)_v 2u \\ &= (2(u^v \ln u \cdot y + x(-2v)) - 2y(-2v))v u^{v-1} + (2xy - y^2)(u^{v-1} + v u^{v-1} \ln u) \\ &\quad + (2x u^v \ln u - 2(u^v \ln u \cdot y + x(-2v)))2u \end{aligned}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho hàm $z = f(x+y, 2x-3y)$. Tính các đhr đến cấp 2 của hàm z

Giải :

Ta đặt thêm 2 biến trung gian : $u = x+y, v = 2x - 3y$ để thấy rõ ràng hàm $z = f(u,v)$ là hàm hợp

Dùng công thức đh hàm hợp, ta được 2 đhr cấp 1:

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + 2f'_v ; \quad \text{Tương tự, ta được}$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - 3f'_v$$

Sau đó, lấy đhr của các đh cấp 1, ta được các đhr cấp 2:

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

$$z''_{xx} = [f'_u]'_x + 2[f'_v]'_x =$$

$$z''_{xx} = [(f'_u)'_u \cdot u'_x + (f'_u)'_v \cdot v'_x] + 2[(f'_v)'_u \cdot u'_x + (f'_v)'_v \cdot v'_x]$$

Giữ nguyên

Lấy đh theo u thì nhân
với đh của u theo x

Giữ nguyên

Lấy đh theo v thì nhân
với đh của v theo x

Lấy đh cấp 2 theo thì tương ứng nhân với đh
của u, v theo x

Tương tự: $z''_{xy} = f''_{uu} - f''_{uv} - 6f''_{vv}$ $z''_{yy} = f''_{uu} - 6f''_{uv} + 9f''_{vv}$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Vi phân cấp 1 : Cho $z = z(x,y)$ và $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ tức là z là hàm hợp của 2 biến u, v . Ta tính vi phân của hàm z theo vi phân của 2 biến độc lập u, v bằng cách dùng công thức *như hàm 2 biến thường*

$$dz = z_{\cancel{v}} dv + z_{\cancel{u}} du$$

Ta chỉ tính **vi phân cấp 2 của hàm z theo biến độc lập** u, v ; tức là ta sử dụng công thức vi phân cấp 2 của hàm $z(u,v)$. Vậy vi phân cấp 2 của hàm hợp là

$$d^2 z = z_{\cancel{uu}} du^2 + 2z_{\cancel{uv}} dudv + z_{\cancel{vv}} dv^2$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm hợp

Ví dụ: Cho $z = x \cos y$, $x = uv$, $y = u+v$. Tính dz , d^2z theo vi phân của biến độc lập du , dv

Giải:

Ta sẽ tính các đạo hàm riêng đến cấp 2, rồi thay vào công thức vi phân, ta được:

$$dz = (v \cos y - x \sin y)du + (u \cos y - x \sin y)dv$$

$$d^2z = (-2v \sin y - x \cos y)du^2 + (-2u \sin y - x \cos y)dv^2 \\ + 2(-v \sin y + \cos y - u \sin y - x \cos y)dudv$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Hàm ẩn 1 biến : Cho hàm $y=y(x)$ xác định từ phương trình hàm ẩn $F(x,y)=0$

Ta tính đạo hàm y' bằng cách lấy đạo hàm 2 vế phương trình $F(x,y)=0$ theo x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Ta tính } \frac{dy}{dx} \text{ từ đẳng thức này}$$

để được công thức

$$\frac{dy}{dx} = y' = - \frac{F_x'}{F_y'}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Tính y' , y'' biết $x - y + \arctan y = 0$

Giải:

Ta đặt $F(x,y) = x - y + \arctan y$, rồi áp dụng công thức

$$y' = - \frac{F_x}{F_y} = - \frac{1}{1 + \frac{1}{1+y^2}} = \frac{1+y^2}{y^2}$$

Để tính đạo hàm cấp 2, ta lấy đạo hàm của đạo hàm cấp 1 với ghi nhớ rằng y' đã có trước đó để thay vào cuối cùng.

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)' = - \frac{2yy'}{y^4} = - \frac{2(y^2 + 1)}{y^5}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Hàm ẩn nhiều biến: Cho hàm $z=z(x,y)$ xác định từ phương trình hàm ẩn $F(x,y,z) = 0$. Ta phải tính 2 đạo hàm riêng

Tương tự hàm ẩn 1 biến, ta lấy đạo hàm 2 vế pt hàm ẩn theo x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{Trong đó: } \frac{dx}{dx} = 1, \frac{dy}{dx} = 0$$

Thay vào đẳng thức trên, ta rút ra đạo hàm theo x cần tìm và làm tương tự để tính đh theo y

$$z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Cho hàm $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y - 5z + 2 = 0$. Tính z'_x, z'_y

Giải:

Cách 1: Lấy đạo hàm 2 vế phương trình đã cho theo x , coi y là hằng số

$$2x + 2zz'_x - 3 - 5z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{3 - 2x}{2z - 5}$$

Và lấy đạo hàm theo y , coi x là hằng số

$$2y + 2zz'_y + 6 - 5z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{6 + 2y}{5 - 2z}$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Cách 2: Sử dụng công thức bằng cách đặt $F(x,y,z)$ là vế trái của phương trình đã cho

$$F_x = 2x - 3, F_y = 2y + 6, F_z = 2z - 5$$

Ta cũng sẽ được kết quả như trên.

Để có đạo hàm cấp 2, ta lấy đạo hàm của đạo hàm cấp 1, và nhớ rằng z là hàm, biến còn lại là hằng số

Vi phân của hàm ẩn: hàm $y(x)$ hoặc $z(x,y)$ đều là các hàm theo 1 hoặc 2 biến độc lập nên ta tính vi phân các cấp của chúng như với hàm bình thường

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ: Tính dz , d^2z nếu $ze^x + 3y + z - 1 = 0$ tại $(0,1)$

Giải:

Trước tiên, ta thay $(x,y) = (0,1)$ vào phương trình để được $z = -1$

Tiếp đó, ta tính các đạo hàm riêng đến cấp 2 bằng cách đặt $F(x,y,z)$ là vế trái của phương trình trên

$$z'_x = -\frac{ze^x}{e^x + 1}, z'_y = -\frac{3}{e^x + 1} \quad \text{và} \quad z'_x(0,1) = -\frac{1}{2}, z'_y(0,1) = -\frac{3}{2}$$

$$\text{và} \quad dz(0,1) = \frac{1}{2}(dx - 3dy)$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3}{e^x + 1} \right) = 0, \quad z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{e^x + 1} \right) = -\frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{P} \quad z_{xy}(0,1) = \frac{3}{4}$$

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ze^x}{e^x + 1} \right) = -\frac{(ze^x + ze^x)(e^x + 1) - ze^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{P} \quad z_{xx}(0,1) = -\frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)2 + 1}{4} = 0$$

$$\text{Vậy} \quad d^2 z(0,1) = \frac{3}{2} dx dy$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ : Cho hàm $z = f(x+y, x.y)$, tính vi phân dz , d^2z

Giải: Ta đi tính đạo hàm riêng đến cấp 2 của hàm z

Trước hết, ta đặt $t = x+y$, $s = x.y$ thì z là hàm theo 2 biến t và s , còn t, s là hàm theo 2 biến x và y . Ta được

$$z'_x = f'_t \cdot t'_x + f'_s \cdot s'_x = f'_t \cdot 1 + f'_s \cdot y; \quad z'_y = f'_t \cdot t'_y + f'_s \cdot s'_y =$$

$$f'_t \cdot 1 + f'_s \cdot x$$

Suy ra $dz = (f'_t + f'_s \cdot y)dx + (f'_t + f'_s \cdot x)dy$

$$z''_{xx} = (f'_t + f'_s \cdot y)'_x = [(f''_{tt} \cdot t'_x + f''_{ts} \cdot s'_x) + (f''_{st} \cdot t'_x + f''_{ss} \cdot s'_x) \cdot y]$$

$$z''_{xx} = f''_{tt} + 2yf''_{st} + y^2 \cdot f''_{ss}$$

Tương tự, ta được 2 đạo hàm cấp cao còn lại và

$$d^2z = (f''_{tt} + 2yf''_{st} + y^2 \cdot f''_{ss})dx^2 + (f''_{tt} + 2xf''_{st} + x^2 \cdot f''_{ss})dy^2 + (f''_{tt} + (x+y)f''_{ts} + xyf''_{ss} + f''_{ss})2dxdy$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Ví dụ: Tính z'_x, z'_y nếu $z = z(x,y)$ xác định từ pt
 $F(x+y+z, x+y-2z) = 0$

Giải : Tương tự ví dụ trên, ta cũng đặt thêm 2 biến
trung gian $t = x+y+z, s = x+y-2z$

Trước tiên, ta dùng công thức đạo hàm hàm ẩn

$$z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z}$$

Tức là ta phải tính 3 đạo hàm riêng của hàm F. Khi
đó, ta coi F là hàm hợp theo t, s và t, s là hàm theo 3
biến x, y, z để sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp

$$F'_x = F'_t \cdot t'_x + F'_s \cdot s'_x = F'_t + F'_s = F'_y, F'_z = F'_t - 2F'_s$$

4 : Đạo hàm riêng và Vi phân hàm ẩn

Thay vào công thức trên, ta được kết quả

$$z'_x = - \frac{F'_t + F'_s}{F'_t - 2F'_s} = z'_y$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Công thức Taylor với phần dư Peano:

Cho hàm $f(x,y)$ khả vi đến cấp $(n+1)$ trong 1 hình cầu mở tâm M_0 là $B(M_0,r)$. Ta có công thức:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + R_n(x,y)$$

$$\text{Trong đó: } R_n(x,y) = O(r^n), r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Khi $(x_0,y_0) = (0,0)$ thì công thức Taylor được gọi là công thức Maclaurint

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(0,0)}{k!} + R_n(0,0)$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ : Khai triển Tay lor tại lân cận điểm $(1,-1)$ hàm $f(x,y) = x^2+2y^2-3xy+4x-5y+7$

Giải :

Do $f(x,y)$ là đa thức bậc 2 theo x hoặc theo y nên từ cấp 3 trở đi, các đạo hàm riêng bằng 0 tức là vi phân cũng bằng 0. Ta chỉ cần tính vi phân của f đến bậc 2

$$f(1,-1) = 22$$

$$f'_x = 2x - 3y + 4, \quad f'_y = 4y - 3x - 5$$

$$\implies f'_x(1,-1) = 9, \quad f'_y(1,-1) = -12$$

$$\implies df(1,-1) = 9dx - 12dy = 9(x-1) - 12(y+1)$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

$$f''_{xx} = 2, f''_{xy} = -3, f''_{yy} = 4$$

$$d^2f = 2dx^2 - 6dxdy + 4dy^2$$

$$\implies = 2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 4(y+1)^2$$

Vậy :

$$f(x,y) = 22 + [9(x-1) - 12(y+1)] + \\ \frac{1}{2} [2(x-1)^2 - 6(x-1)(y+1) + 4(y+1)^2]$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Chú ý :

Tương tự như hàm 1 biến, để khai triển Tay lor hàm $f(x,y)$ trong lân cận điểm (x_0,y_0) ta cũng làm như sau :

1. Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0 \iff x = X + x_0, y = Y + y_0$
2. Sử dụng khai triển Maclaurint hàm 1 biến để khai triển hàm $f(X, Y)$
3. Sắp xếp theo thứ tự bậc của $X, Y, X.Y$ tăng dần
4. Thay $X = x - x_0, Y = y - y_0$ vào để được khai triển cần tìm

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Taylor tại (2,1) đến bậc 2 hàm

$$f(x, y) = \frac{1}{2x - 3y}$$

Giải :

$$\text{Đặt } X = x - 2, Y = y - 1 \iff x = X + 2, y = Y + 1$$

$$\text{Thay vào hàm đã cho, ta được: } f(X, Y) = \frac{1}{2X - 3Y + 1}$$

Đặt $t = 2X - 3Y$ và áp dụng khai triển Maclaurint hàm

$$g(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + R_2 \quad \text{Và thay vào hàm } f$$

$$f(x, y) = 1 - (2(x-2) - 3(y-1)) + ((2(x-2) - 3(y-1))^2 + R_2$$

$$f(x, y) = 1 - 2(x-2) + 3(y-1) + 4(x-2)^2 + 9(y-1)^2 - 12(x-2)(y-1) + R_2$$

5 : Công thức Taylor - Maclaurint

Ví dụ: Khai triển Maclaurint hàm $f(x,y) = e^x \cos y$ đến bậc 2

Giải:

Ta áp dụng trực tiếp khai triển Maclaurint cho 2 hàm 1 biến e^x và $\cos y$ để có kết quả:

$$f(x,y) = (1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^2))(1-\frac{1}{2}y^2+O(y^2))$$

$$f(x,y) = 1+x+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y^2 + R_2$$

Ta bỏ các số hạng bậc lớn hơn 2 và sắp xếp theo thứ tự tăng dần của bậc, ta được :

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) + R_2$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến

Định nghĩa : Hàm $f(x,y)$ được gọi là **đạt cực đại chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại hình cầu mở $B(M_0,r)$ sao cho $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$, với mọi $M(x,y)$ thuộc hình cầu trên

Tức là: $\forall r > 0 : \forall M(x,y) \in B(M_0,r), f(x,y) < f(x_0,y_0)$

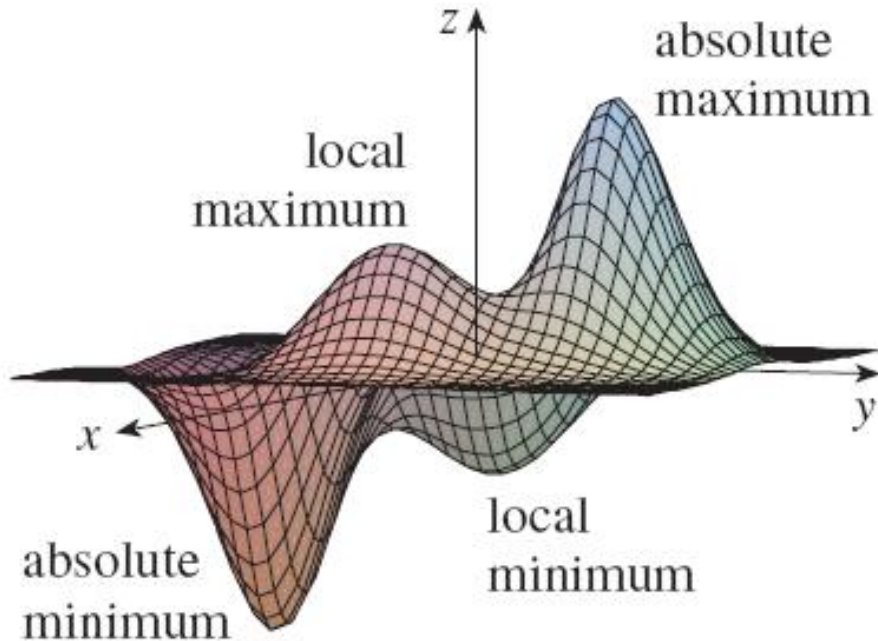
Định nghĩa : Hàm $f(x,y)$ được gọi là **đạt cực đại không chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại hình cầu mở $B(M_0,r)$ sao cho $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0$, với mọi $M(x,y)$ thuộc hình cầu trên

Tức là: $\forall r > 0 : \forall M(x,y) \in B(M_0,r), f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

6 : Cực trị hàm nhiều biến

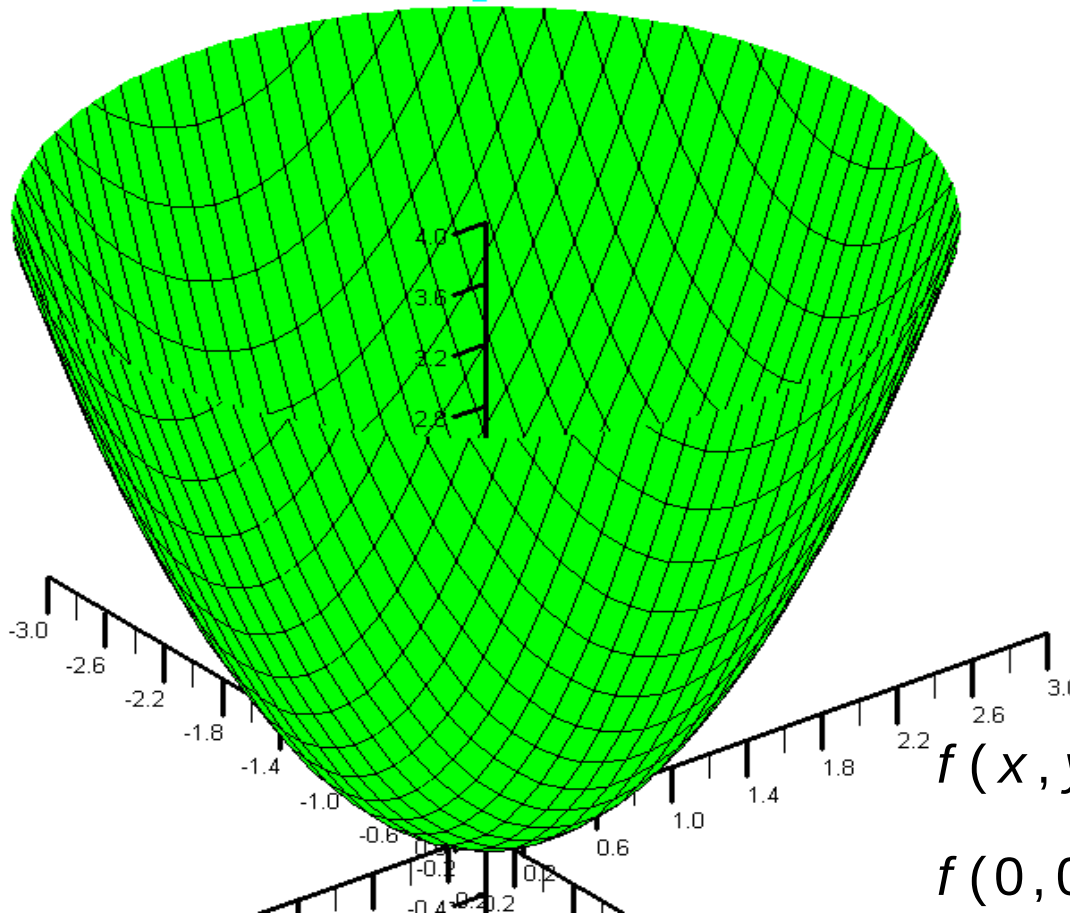
Định nghĩa tương tự cho khái niệm cực tiểu chặt và cực tiểu không chặt.

Chú ý: Khái niệm cực trị chỉ mang tính địa phương, nó khác với khái niệm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm trong một miền (Xem hình vẽ)



6 : Cực trị hàm nhiều biến - Cực trị tự do

Ví dụ: Hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu tại $(0,0)$ vì $f(x,y) - f(0,0) = (x^2 + y^2) \geq 0$, với mọi (x,y)



Hơn nữa,
 $f(0,0) = 0$ còn
là giá trị nhỏ
nhất của hàm
trong toàn
MXĐ vì :

$$f(x,y) - f(0,0) > 0, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Điều kiện cần của cực trị : Nếu hàm $f(x,y)$ có cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ thì tại M_0 hàm có các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 hoặc không tồn tại

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 hoặc không tồn tại thì gọi là **điểm tới hạn** của hàm tức là điểm nghi ngờ có cực trị.

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 thì gọi là **điểm dừng** của hàm.

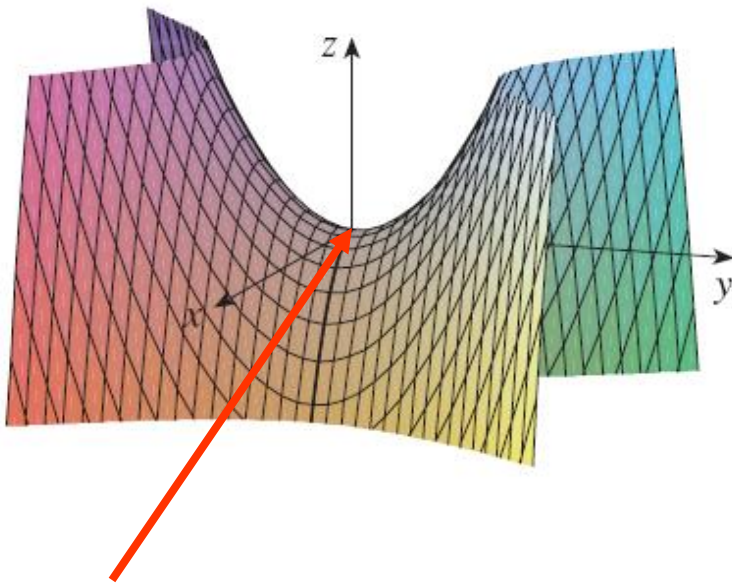
Điểm M mà tại đó các đạo hàm riêng đồng thời bằng 0 và trong 1 lân cận bất kỳ của nó tồn tại các điểm M_1, M_2 sao cho $f(M_1) < f(M) < f(M_2)$ được gọi là **điểm yên ngựa**

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Khảo sát cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 - y^2$

Giải:

Ta có : $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y \implies$ Điểm dừng của hàm là $O(0,0)$



Điểm yên ngựa

Với mọi x , ta có

$$f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$$

Với mọi y , ta có

$$f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$$

Vậy hàm không đạt cực trị tại $(0,0)$, điểm $(0,0)$ là điểm yên ngựa của hàm

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Điều kiện đủ của cực trị : Cho hàm $f(x,y)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong 1 lân cận của điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$. Ta có :

1. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ xác định dương thì hàm đạt **cực tiểu chặt** tại M_0 , $f_{ct} = f(M_0)$
2. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ xác định âm thì hàm đạt **cực đại chặt** tại M_0 , $f_{cd} = f(M_0)$
3. Nếu dạng toàn phương $d^2f(M_0)$ không xác định thì hàm **không đạt cực trị** tại M_0

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Các bước khảo sát cực trị hàm nhiều biến

Bước 1: *Tìm điểm tới hạn* bằng cách cho tất cả các đạo hàm riêng của hàm f bằng 0, ta được hệ phương trình, giải ra ta được điểm dừng hoặc tìm những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng không tồn tại

Bước 2: *Khảo sát dấu của d^2f tại từng điểm dừng* vừa tìm được (coi d^2f là dạng toàn phương theo $dx, dy, dz, \dots$)

Bước 3: Kết luận theo điều kiện đủ

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4x+6y-8z$

Giải:

Bước 1: Giải hpt tìm điểm dừng

$$f'_x = 2x - 4 = 0$$

$$f'_y = 2y + 6 = 0$$

$$f'_z = 4z - 8 = 0$$

$$x = 2$$

$$\hat{U} \quad y = -3$$

$$z = 2$$

Vậy hàm có điểm
dừng duy nhất
 $M(2,-3,2)$

Bước 2: Tính $d^2f(M) = 2dx^2+2dy^2+4dz^2 \geq 0$ với mọi M.

Bước 3: Kết luận Hàm đạt cực tiểu tại điểm dừng duy nhất $f_{ct} = f(2,-3,2) = -21$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Với riêng hàm 2 biến $f(x,y)$, ta có các bước khảo sát sau

1. Tìm điểm dừng (giả sử là $M_0(x_0, y_0)$)
2. Tính 3 đạo hàm riêng cấp 2 của hàm
3. Xét tại từng điểm dừng $M_i(x_i, y_i)$: đặt

$A = f''_{xx}(M_i)$, $B = f''_{xy}(M_i)$, $C = f''_{yy}(M_i)$ và xét dấu $B^2 - AC$

- $B^2 - AC > 0$: Hàm không đạt cực trị
- $B^2 - AC < 0$: Nếu $A > 0$ thì $f_{ct} = f(M_i)$

Nếu $A < 0$ thì $f_{cđ} = f(M_i)$

- $B^2 - AC = 0$: Xét dấu $\Delta f = f(x,y) - f(x_i, y_i)$ với (x,y) thuộc lân cận của (x_i, y_i) và kết luận theo định nghĩa cực trị

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Giải:

Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Hàm có 2 điểm dừng : $M_1(1,1)$ và $M_2(0,0)$

Tìm các đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{yy} = 6y$

Điểm dừng	A	B	C	B^2-AC	Kết luận
$M_1(1,1)$	6	-3	6	$9-36<0$	$f_{ct} = f(1,1) = -1$
$M_2(0,0)$	0	-3	0	$9>0$	Không đạt cực trị

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

Giải :

Tìm điểm dừng
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Hàm có vô số điểm dừng: tập tất cả các điểm $M(x_0, y_0)$ thỏa $x_0 - y_0 + 1 = 0$, $M(x_0, x_0 + 1)$

Các đạo hàm riêng cấp 2 là hằng số, nên :

$$A = f''_{xx} = 2, B = f''_{xy} = -2, C = f''_{yy} = 2$$

$$B^2 - AC = 0, \text{ tại mọi điểm dừng } M(x_0, x_0 + 1)$$

Do đó ta phải xét dấu $\Delta f(M) = f(x,y) - f(x_0, x_0 + 1)$ với mọi (x,y) thuộc lân cận của M .

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ta có : $\Delta f(M) = f(x, y) - f(M)$

$$\Delta f(M) = (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y) - (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0 + 2x_0 - 2y_0)$$

$$\Delta f(M) = (x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y) - ((x_0 - y_0)^2 + 2(x_0 - y_0))$$

Thay $x_0 - y_0 = -1$ vào, ta được

$$\Delta f(M) = (x - y + 1)^2 \geq 0 \iff f(x, y) \geq f(M)$$

Vậy theo định nghĩa, hàm đạt cực tiểu không chặt tại mọi điểm dừng M_0 và $f_{ct} = f(M_0) = f(x_0, x_0 + 1) = -1$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

Giải :

Tìm điểm dừng:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = 0 \end{aligned}$$

Ta được $x = y = 0$, tuy nhiên $(0,0)$ là điểm mà tại đó 2 đhr tính thông thường không tồn tại, hpt vô nghiệm.

Do đó, điểm $(0,0)$ không là điểm dừng của hàm.

Vậy ta sẽ tính đạo hàm riêng của f tại $(0,0)$ bằng định nghĩa:

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

$$f'_x(0,0) = \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{f(Dx, 0) - f(0,0)}{Dx} = \lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{Dx^2} - 0}{Dx} = \infty$$

Do vai trò x, y như nhau trong hàm f, nên tương tự ta cũng có $f'_y(0,0) = \infty$

Vậy tại (0,0) các đạo hàm riêng không tồn tại hữu hạn nên (0,0) chỉ là điểm tới hạn của hàm, tức là điểm nghi ngờ có cực trị.

$$\text{Mặt khác: } Df = f(x,y) - f(0,0) = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \geq 0, \forall (x,y)$$

Tức là (0,0) là điểm cực tiểu của hàm.

Hơn nữa, $f(0,0) = 0$ nên ta có

$$f_{ct} = f_{min} = f(0,0)$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ : Khảo sát cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$$

Giải :

$$\begin{aligned} \text{Tìm điểm dừng : } \begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta được 3 điểm dừng $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(0,0)$

Các đạo hàm riêng đến cấp 2 :

$$f''_{xx} = 12x^2 - 2, f''_{xy} = -2, f''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại $M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$:

$$C = 10 = A > 0, B = -2, B^2 - AC = 100 - 4 > 0$$

$$\text{Nên } f_{ct} = f(1,1) = f(-1,-1) = -2$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Tại $M_3(0,0)$: $A = B = C = -2$, $\Delta = 0$.

Ta phải xét dấu $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$, với mọi (x,y) gần với $(0,0)$ bằng cách chọn 2 điểm

$N_1(1/n, 1/n)$, $N_2(1/n, -1/n)$ và tính $\Delta f(N_1)$, $\Delta f(N_2)$

$$\Delta f(N_1) = \Delta f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} - \frac{4}{n^2} = \frac{2}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} - 2 \right) < 0, \text{ " } n > 1$$

$$\Delta f(N_2) = \Delta f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0, \text{ " } n > 1$$

Như vậy, Δf đổi dấu trong lân cận điểm dừng M_3 tức là hàm không đạt cực trị tại M_3

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

Ví dụ: Cho hàm $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.
Điểm nào sau đây là cực trị của hàm : $M_1(1, -2, 1/2)$,
 $M_2(-1/2, -5/4, -1/4)$

Giải:

Ta chỉ cần kiểm tra 2 điều kiện :

1. M_i là điểm tới hạn (với hàm này, chỉ cần là điểm dừng)
2. $d^2f(M_i)$ là xác định dương, âm hay không xác định

1. M_1, M_2 là điểm dừng tức là chúng nghiệm đúng hệ :

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + y - 2z = 0 \\ f'_y &= x + 2y + 3 = 0 \\ f'_z &= -2x + 4z = 0 \end{aligned}$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị tự do

2. Tính $d^2f(x,y,z) = 6dx^2+2dxdy+2dy^2-4dxdz+4dz^2$ và thay từng điểm dừng vào để xét dấu dạng toàn phương :

$d^2f(M_1) = 6dx^2+2dxdy+2dy^2-4dxdz+4dz^2$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D_1 = 6 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11 > 0, D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

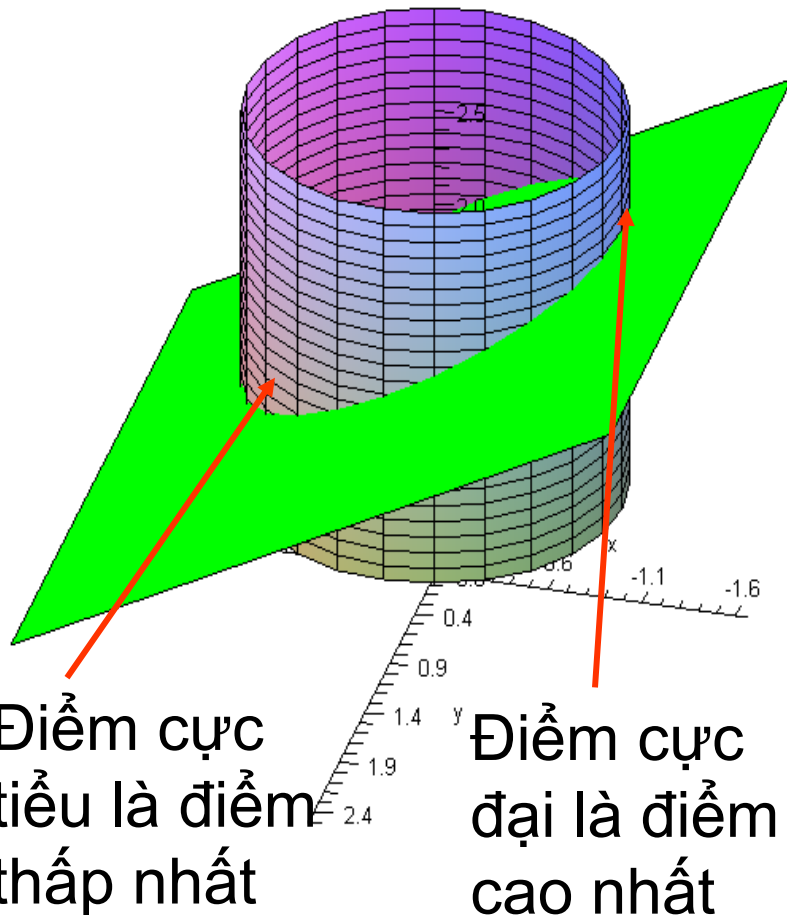
Tức là $d^2f(M_1)$ là xác định dương, hàm đạt cực tiểu tại M_1 , $f_{ct} = f(M_1) = -9/2$

$$d^2f(M_2) = -3dx^2+2dxdy+2dy^2-4dxdz+4dz^2$$

Bằng cách như trên (theo tiêu chuẩn Sylvester), ta có kết luận hàm không đạt cực trị tại M_2

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Xét hàm $f(x,y) = 2 - 2x - 2y$. Không khó khăn gì, ta thấy hàm không có cực trị.



Nếu vẽ đồ thị, thì ta được mặt phẳng $z = 2 - 2x - 2y$, rõ ràng **không có cực trị**. Tuy nhiên, nếu ta cắt mặt phẳng trên bởi hình trụ tròn xoay $x^2 + y^2 = 1$ thì giao tuyến là 1 ellipse và khi đó hàm ban đầu có cực trị.

Khi đó, ta nói **hàm f có cực trị với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$**

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Định nghĩa cực trị có điều kiện : Hàm $f(x,y)$ được gọi là đạt **cực đại chặt** tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$, với mọi M nằm trong hình cầu $B(M_0,r)$ và thỏa điều kiện trên

Thay dấu “<” bởi dấu “ $\leq$ ” ta được **cực trị không chặt có điều kiện**, và lấy dấu ngược lại ta có khái niệm cực tiểu có điều kiện

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = x^2 - 9y^2 + 3xy + 6x - 5$ với điều kiện $2x - 3y = 0$

Giải :

Từ điều kiện, ta rút ra $y = \frac{2}{3}x$ và thay vào hàm f:

$$f(x,y) = x^2 - 9\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 3x\left(\frac{2}{3}x\right) + 6x - 5 = -x^2 + 6x - 5$$

Tức là ta có hàm 1 biến và đi tìm cực trị của hàm 1 biến như bình thường.

$$\text{Tìm điểm dừng : } f' = 0 \iff -2x + 6 = 0 \iff x = 3$$

Vậy hàm đạt cực đại tại điểm dừng duy nhất (3,2)

$$f_{cd} = f(3,2) = 4$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Tuy nhiên, hầu hết các trường hợp cực trị có điều kiện, ta không dễ dàng rút ra y theo x hoặc x theo y như trên. Vì vậy, ta sẽ xây dựng cách tìm cực trị có điều kiện 1 cách tổng quát hơn dựa trên cách tìm cực trị tự do như sau

Ta sẽ giả thiết rằng điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ tại lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$, tức là $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, ta thay $y = y(x)$ vào hàm f , ta được hàm 1 biến $f(x, y(x))$. Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ thì theo định lý Fermat ta có

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$\frac{df}{dx}(x_0) = 0 \hat{=} f'_x(x_0, y_0) + y'_x(x_0) f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (1)$$

Mặt khác, từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, ta cũng có

$$\varphi'_x(x_0, y_0) + y'_x(x_0) \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (2)$$

Nhân 2 vế (2) với λ , rồi cộng với (1), ta được

$$[f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0)] + y'_x(x_0) [f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0)] = 0$$

Vì $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ nên ta có thể tìm được hằng số λ_0 sao cho :

$$l_0 = - \frac{f'_y(x_0, y_0)}{y'_y(x_0, y_0)} \iff f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

Thay vào đẳng thức trên, ta cũng được

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

Kết hợp điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ với các đẳng thức (3), (4) ta được hệ pt :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda'_j \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda'_j \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Và x_0, y_0, λ_0 là 1 nghiệm của hệ

Ta đặt hàm $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ thì hpt trở thành

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Vậy ta có điều kiện cần của cực trị có điều kiện :

Định lý : Cho hàm $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có các đhr liên tục trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$, $\varphi'_x(x_0,y_0) \neq 0$ hoặc $\varphi'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Khi đó, hàm $f(x,y)$ có cực trị với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ tại M_0 thì tồn tại số λ sao cho

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ \varphi(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange, hàm $L(x,y)$ ở trên được gọi là hàm Lagrange, điểm $M_0(x_0,y_0)$ là nghiệm của hệ gọi là điểm dừng

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Định lý : (Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện) Giả sử các hàm $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có các đhr đến cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$ ứng với $\lambda = \lambda_0$. Khi đó, ta có các kết luận:

1. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là xác định dương thì M_0 là điểm cực tiểu
2. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là xác định âm thì M_0 là điểm cực đại
3. Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ là không xác định hàm không đạt cực trị tại M_0

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Cách tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$

1. Nếu từ pt $\varphi(x,y) = 0$, ta rút ra $y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$ thì thay vào hàm f để được hàm 1 biến
2. Nếu không thực hiện được như trên thì ta làm theo phương pháp nhân tử Lagrange

a. Lập hàm Lagrange: $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

b. Giải hpt

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Để tìm điểm dừng
 $M_0(x_0, y_0)$ ứng với
 $\lambda = \lambda_0$

c. Xét dấu dạng toàn phương $d^2L(x_0, y_0)$, với $\lambda = \lambda_0$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$

Giải :

1. Lập hàm $L(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

2. Giải hpt tìm điểm dừng

$$\begin{array}{l} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \quad \hat{U} \quad \begin{array}{l} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{3}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

Thay x, y từ 2 pt trên xuống pt cuối cùng. Ta được 2 điểm dừng :

$$M_1(4/5, 3/5) \text{ và } \lambda_1 = 5/2; \quad M_2(-4/5, -3/5) \text{ và } \lambda_2 = -5/2$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

3. Tính vi phân cấp 2 của hàm $L(x,y)$

$$d^2L(x,y) = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$$

4. Xét dấu d^2L tại từng điểm dừng

Tại M_1 với $\lambda_1 = 5/2$, ta được $d^2L(M_1) = 5(dx^2 + dy^2)$ là **xác định dương**, vậy $f_{ct} = f(M_1) = f(4/5, 3/5) = 1$

Tại M_2 với $\lambda_2 = -5/2$, ta được $d^2L(M_2) = -5(dx^2 + dy^2)$ là **xác định âm**, vậy $f_{cđ} = f(M_2) = f(-4/5, -3/5) = 11$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$

Giải : Ta cũng làm theo các bước như với hàm 2 biến

1. Lập hàm $L(x,y,z) = x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$

2. Tìm điểm dừng bằng cách giải hpt

$$L'_x = 1 + 2\lambda x$$

$$L'_y = -2 + 2\lambda y$$

$$L'_z = 2 + 2\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Ta được 2 điểm dừng

$$M_1(1/3, -2/3, 2/3), \lambda_1 = -3/2$$

$$M_2(-1/3, 2/3, -2/3), \lambda_2 = 3/2$$

3. Tính $d^2L = 2\lambda(dx^2+dy^2+dz^2)$,

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

4. Xét tại từng điểm dừng

$$d^2L(M_1) = -3(dx^2+dy^2+dz^2) - \text{xác định âm nên}$$

$$f_{cd} = f(M_1) = f(1/3, -2/3, 2/3) = 3$$

$$d^2L(M_2) = 3(dx^2+dy^2+dz^2) - \text{xác định dương nên}$$

$$f_{ct} = f(M_2) = f(-1/3, 2/3, -2/3) = -3$$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ: Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 12xy$ với điều kiện $4x^2 + y^2 = 25$

Giải: $L(x,y) = x^2 + 2y^2 + 12xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$

Tìm điểm dừng :

$$L'_x = 2x + 12y + 8\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L'_y = 4y + 12x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 + y^2 = 25 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta tính λ theo x và y , cho bằng nhau để tìm ra mối liên hệ giữa x và y

$$\lambda = -\frac{x + 6y}{4x} = -\frac{6x + 2y}{y} \Rightarrow 24x^2 + 7xy - 6y^2 = 0 \quad (4)$$

Pt (4) là pt đẳng cấp đối với x, y ; ta giải bằng cách đặt $y = tx$ để được phương trình

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

$$24x^2 + 7x.tx - 6(tx)^2 = 0 \iff -6t^2 + 7t + 24 = 0 \iff \begin{array}{l} t = -\frac{3}{2} \\ t = \frac{8}{3} \end{array}$$

Suy ra $\begin{array}{l} y = -\frac{3}{2}x \\ y = \frac{8}{3}x \end{array}$ Ta thay vào pt (3), rồi tính λ tương ứng để được 4 điểm dừng

$M_1(2, -3)$ và $M_2(-2, 3)$ với $\lambda = 2$,

$M_3(\frac{3}{2}, 4)$ và $M_4(-\frac{3}{2}, -4)$ với $\lambda = -\frac{17}{4}$

Tính $d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + 2L''_{xy}dxdy$

$$d^2L = (2+8\lambda)dx^2 + (4+2\lambda)dy^2 + 24dxdy$$

Ta sẽ xét tại 2 điểm dừng một lần vì cùng chung λ

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Tại M_1 và M_2 : $d^2L=18dx^2+24dxdy+8dy^2 = 2(3dx+2dy)^2$

Đến đây, ta chưa thể kết luận về dấu của d^2f nên ta sẽ sử dụng điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ bằng cách **lấy vi phân 2 vế**: $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$ và thay giá trị x, y tại điểm đang xét để tìm thêm mối liên hệ giữa dx và dy

Từ : $4x^2+y^2 = 25 \implies 8xdx+2ydy = 0$

Thay $x=2$ và $y=-3$ (điểm M_1) hoặc $x=-2$ và $y=3$ (điểm M_2) vào trên ta được : $8dx = 3dy$

Suy ra: $d^2L(M_1) = d^2L(M_2) = (225/4)dx^2$ - xác định dương

Tương tự khi xét dấu d^2L tại M_3 và M_4 .

Vậy : $f_{ct} = f(2,-3) = f(-2,3) = -26,$

$f_{cđ} = f(3/2,4) = f(-3/2,-4) = -151/4$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Ví dụ : Dùng cực trị để tìm khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng :
 $x+y = 6, y+z = 12$

Giải

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M(x,y,z) bất kỳ là

$$d(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tức là ta có bài toán: Tìm cực trị hàm
 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ với 2 điều kiện $x+y = 6$ và $y+z = 12$

Ta có làm bằng 2 cách :

Cách 1: Thay $x = 6-y$, $z = 12-y$ vào hàm f để được hàm 1 biến y và tìm cực trị

6 : Cực trị hàm nhiều biến – Cực trị có điều kiện

Cách 2: Dùng hàm Lagrange với 2 điều kiện

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$$

$$L(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y-6)+\mu(y+z-12)$$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hpt

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$L'_z = 0$$

$$\varphi(x,y,z) = 0$$

$$\psi(x,y,z) = 0$$

$$L'_x = 2x + \lambda = 0$$

$$L'_y = 2y + \lambda + \mu = 0$$

$$L'_z = 2z + \mu = 0$$

$$x + y = 6$$

$$y + z = 12$$

Ta được 1
điểm
dừng
 $M(0,6,6)$
với $\lambda = 0$,
 $\mu = -12$

Tính $d^2L = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ xác định dương tại mọi điểm nên ta được $f_{ct} = f(0, \underline{6}, \underline{6}) = 72$. Vậy khoảng cách cần tìm là $6\sqrt{2}$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Định nghĩa: Cho hàm $f(x,y)$ xác định trong miền D đóng và bị chặn. Hàm f được gọi là đạt **giá trị lớn nhất (GTLN)** tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ nếu

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in D \text{ và } f_{\max} = f(x_0, y_0)$$

Thay **dấu $\leq$ bởi dấu $\geq$** trong định nghĩa trên ta có khái niệm **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm trên miền đóng D

Định lý Weierstrass : Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trên tập đóng và bị chặn D thì f đạt GTLN, GTNN trên D

Nhắc lại rằng: Tập D đóng tức là D chứa biên của nó, và D bị chặn tức là tồn tại 1 hình cầu mở $B(M_0, r)$ sao cho $D \subset B(M_0, r)$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Như vậy, để tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x,y)$ trên miền đóng D ta làm như sau :

1. Tìm các điểm dừng $M_1, M_2, \dots$ và là các điểm trong của D . Tính giá trị của hàm tại các điểm dừng đó
2. Tìm các điểm dừng trên biên của D tức là điểm dừng của hàm f thỏa điều kiện là phương trình biên D . Tính giá trị hàm f tại các điểm dừng đó.
3. So sánh giá trị của hàm f tại các điểm dừng trong và trên biên của D để tìm ra GTLN, GTNN của hàm f trên miền D .

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y) = (x-6)^2 + (y+8)^2$ thỏa điều kiện $x^2 + y^2 \leq 25$

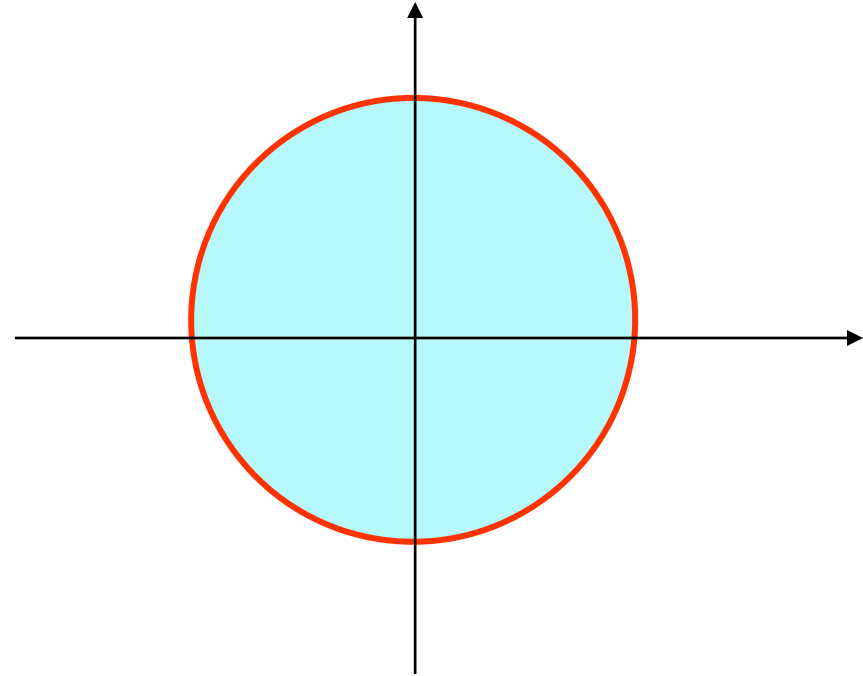
Giải:

Miền D là hình tròn, bao gồm cả đường tròn tâm

$O(0,0)$ bán kính $r = 5$

Tìm điểm dừng trong hình tròn tức là giải hpt

$$\begin{cases} f'_x = 2(x - 6) = 0 \\ f'_y = 2(y + 8) = 0 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$



2 pt trên cho ta nghiệm $x = 6, y = -8$, không thỏa bất đẳng thức tức là trong D không có điểm dừng

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

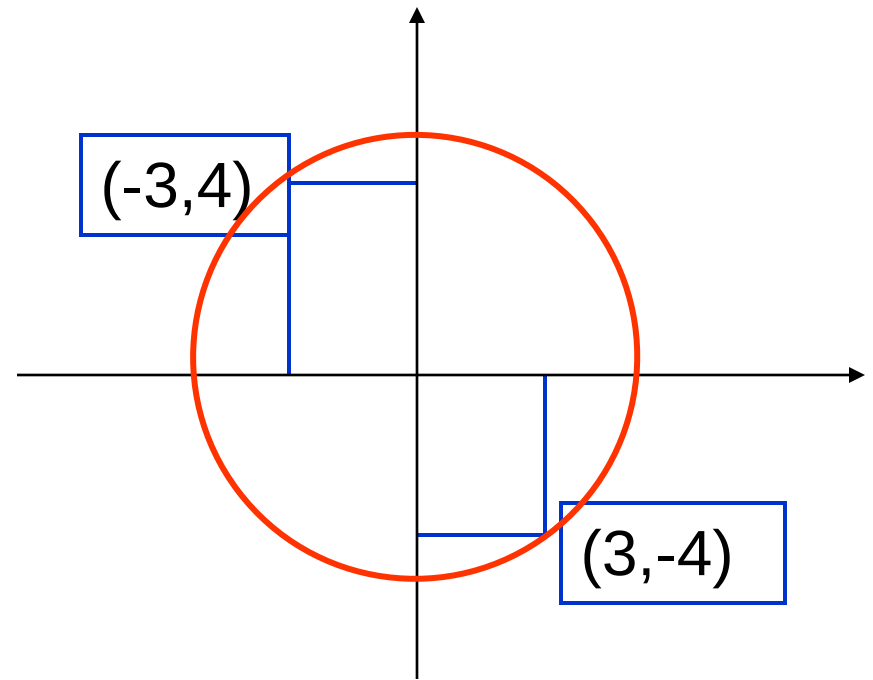
Tìm điểm dừng trên biên D tức là tìm điểm dừng có điều kiện bằng cách lập hàm Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda(x^2+y^2-25)$$

và giải hpt

$$\begin{cases} L'_x = 2(x-6) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(y+8) + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Ta được 2 điểm dừng trên biên $M_1(-3,4)$, $M_2(3,-4)$



Ta tính giá trị của f tại 2 điểm dừng trên và so sánh ta được $f_{\max} = f(-3,4) = 225$, $f_{\min} = f(3,-4) = 25$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ: Tìm GTLN GTNN của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ trong miền $|x| + |y| \leq 1$

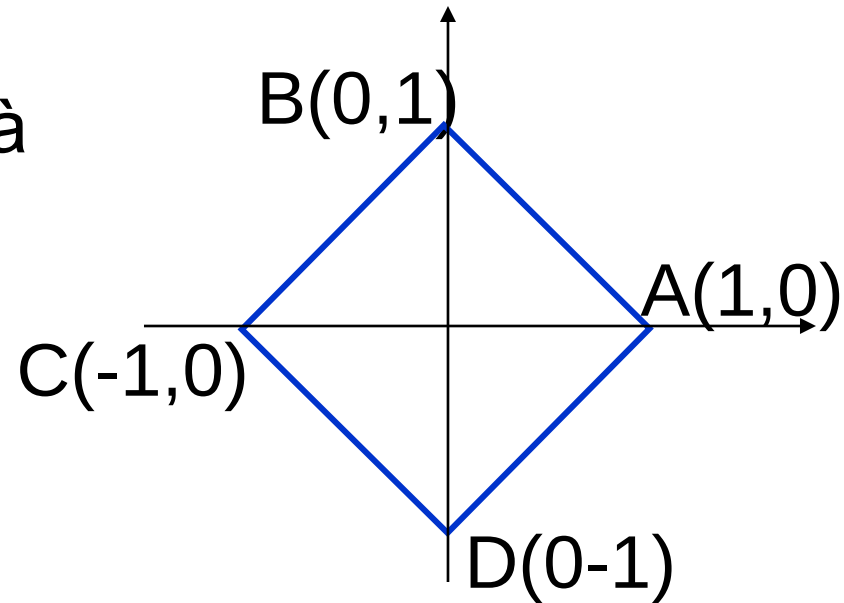
Giải:

Trước hết, ta xác định miền D là hình vuông ABCD như hình vẽ
Tìm điểm dừng trong hình vuông bằng cách giải hpt

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y = 0 \\ f'_y = 2y - x = 0 \end{cases}$$

Ta được điểm dừng $M_1(0,0)$

Tìm điểm dừng trên biên tức là lần lượt trên 4 cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông



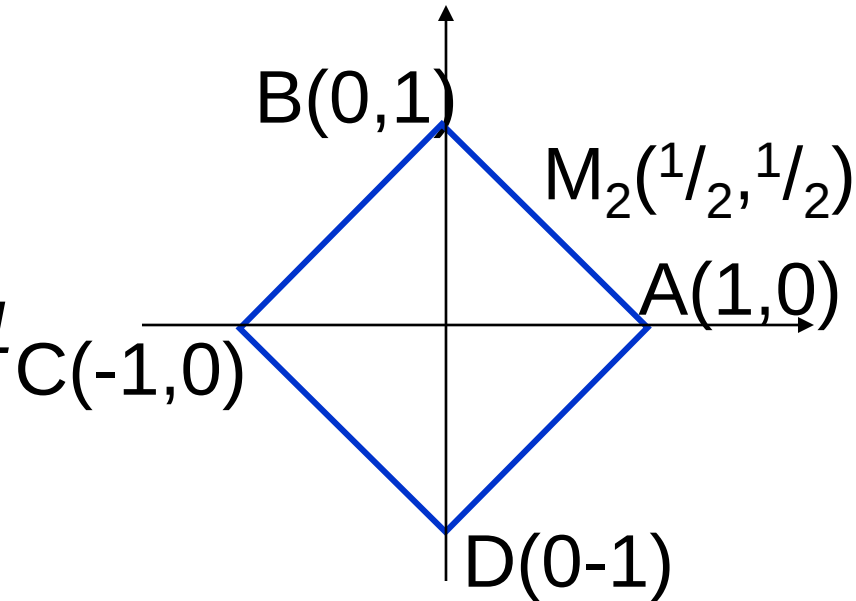
6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Trên cạnh AB với phương trình $x+y = 1 \leftrightarrow y = 1-x$

Thay vào hàm f ta được

$$f = x^2 + (1-x)^2 - x(1-x) = 3x^2 - 3x + 1$$

$f' = 6x - 3 = 0 \leftrightarrow x = 1/2$ ta được điểm dừng $M_2(1/2, 1/2)$



Tương tự trên 3 cạnh còn lại ta được 3 điểm dừng lần lượt là $M_3(-1/2, 1/2)$, $M_4(-1/2, -1/2)$, $M_5(1/2, -1/2)$

Cuối cùng, ta tính giá trị của hàm tại 5 điểm dừng vừa tìm: $f(M_1) = 0$, $f(M_2) = f(M_4) = 1/4$, $f(M_3) = f(M_5) = 3/4$

Và tại 4 điểm đặc biệt: $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 1$

Vậy: $f_{\max} = f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = 1$, $f_{\min} = f(M_1) = 0$

6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Ví dụ : Tìm GTLN, GTNN của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ trên miền

$$D : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$$

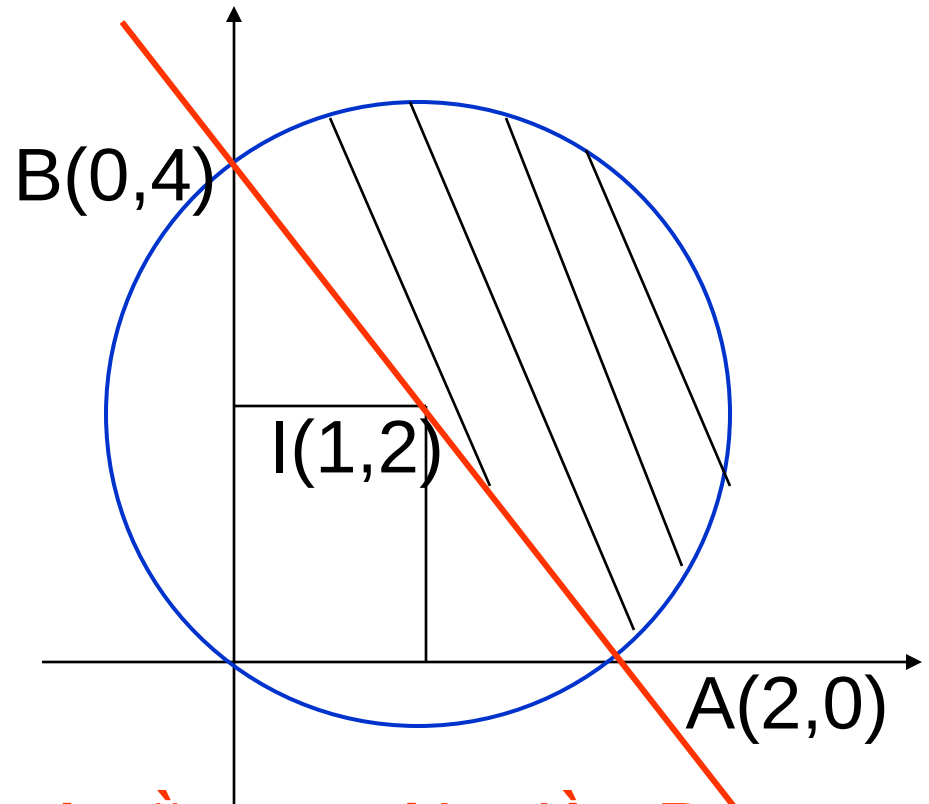
Giải:

Trước tiên, ta xác định miền D là phần hình tròn nằm trên đường thẳng

1. Tìm điểm dừng trong miền D :

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ta không nhận điểm này vì nó nằm ngoài miền D



6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

2. Tìm điểm dừng trên biên của D gồm 2 đường : đoạn thẳng AB và nửa trên đường tròn ACB.

Trên đoạn thẳng, ta có điều kiện: $2x+y = 4 \leftrightarrow y = -2x+4$, $0 \leq x \leq 2$

thay vào hàm f ta được

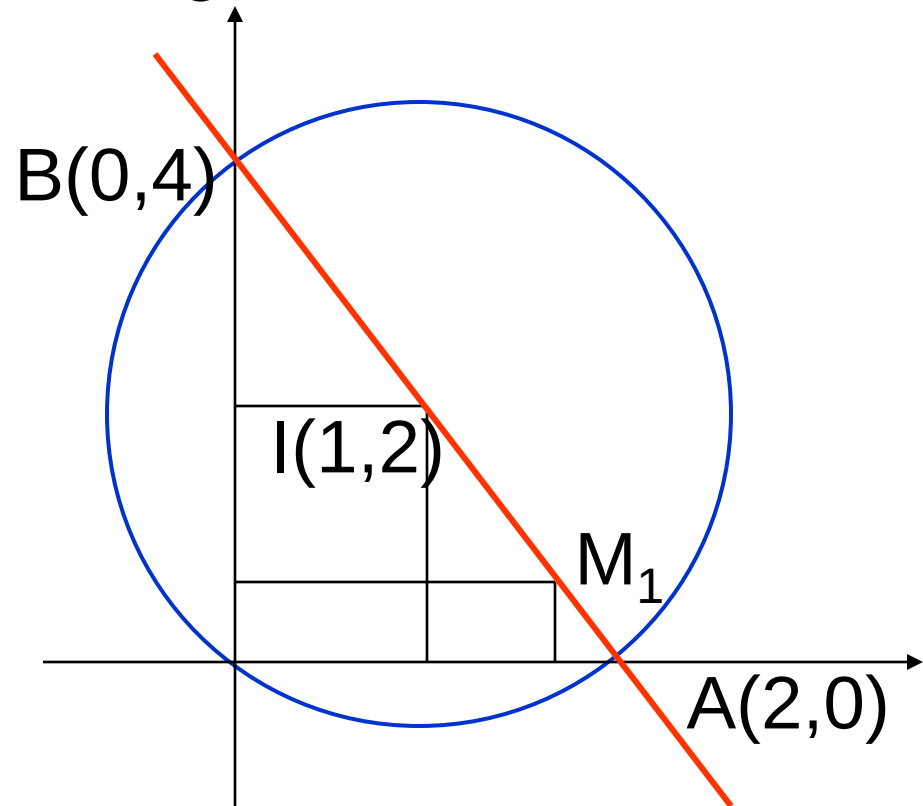
$$f = x^2 + (2x-4)^2 = 5x^2 - 16x + 16$$

Cho ta 1 điểm dừng

$$M_1(8/5, 4/5)$$

Trên nửa đường tròn, ta lập hàm Lagrange

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 5)$$



6 : Cực trị hàm nhiều biến – GTLN GTNN

Tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda(y-2) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0, \lambda = 0 \\ x = 2, y = 4, \lambda = -2 \end{cases}$$

Ta loại điểm $(0,0)$ vì nằm dưới đường thẳng và nhận điểm $M_2(2,4)$

Cuối cùng, ta tính giá trị f tại 2 điểm đặc biệt và tại 2 điểm dừng

$$f(M_1) = \frac{80}{25}, f(M_2) = 20, \\ f(A) = 4, f(B) = 16$$

và so sánh để được

$$f_{\max} = f(2,4) = 20, f_{\min} = f\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{80}{25}$$

