

NHẬN DẠNG MẶT BẠC 2

Nhận dạng mặt bậc 2

Phương trình tổng quát của mặt bậc 2:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + ax + by + cz + d = 0$$

trong đó ít nhất 1 số hạng bậc 2 phải khác 0.

Phương trình chính tắc của mặt bậc 2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elippsoid

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Mặt cầu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hyperboloid 1 tầng.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Hyperboloid 2 tầng.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{Nón}$$

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (\text{Dạng thường gặp của nón})$$

$$cz + d = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{Paraboloid elipptic}$$

$$cz + d = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{Paraboloid hyperbolic}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Trụ elipptic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

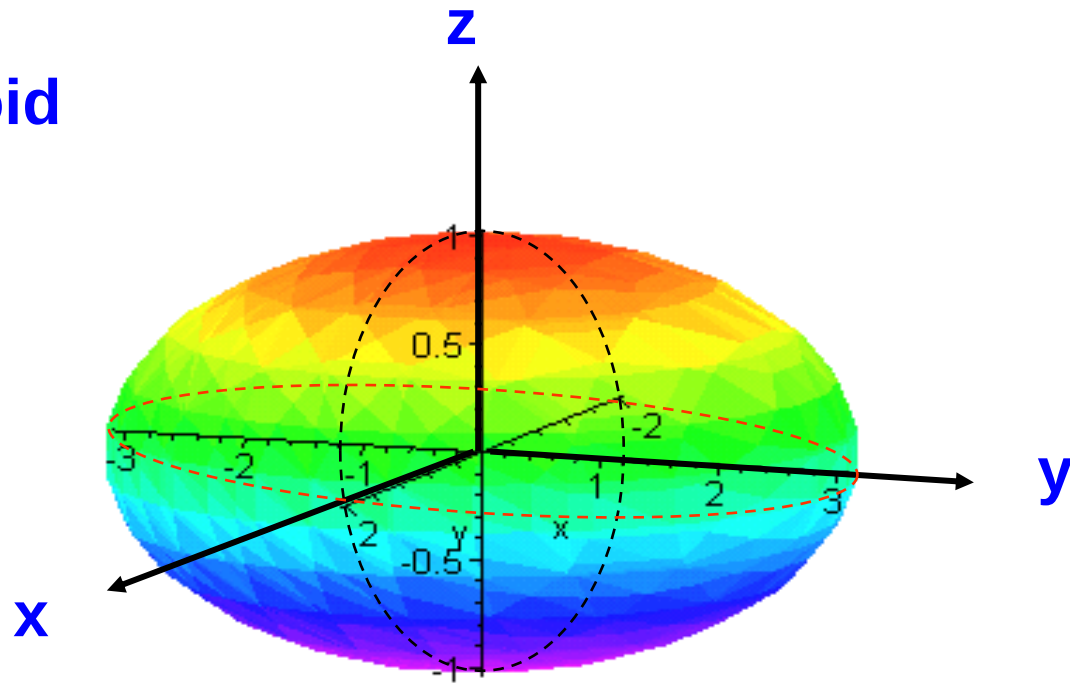
Trụ hyperbolic

$$y^2 = 2px$$

Trụ parabolic

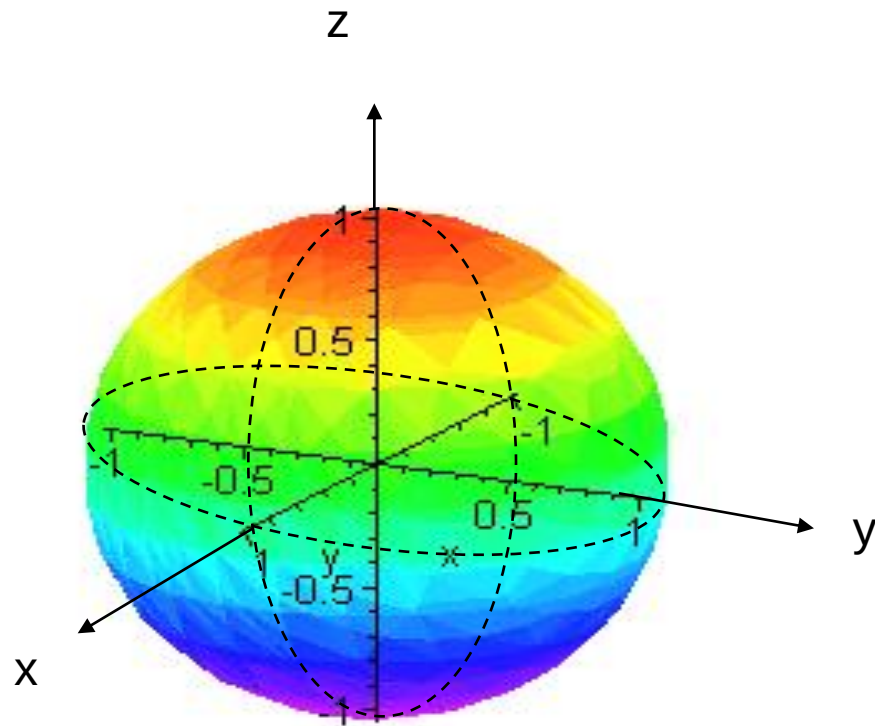
Hình ảnh các mặt cơ bản

Elippsoid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

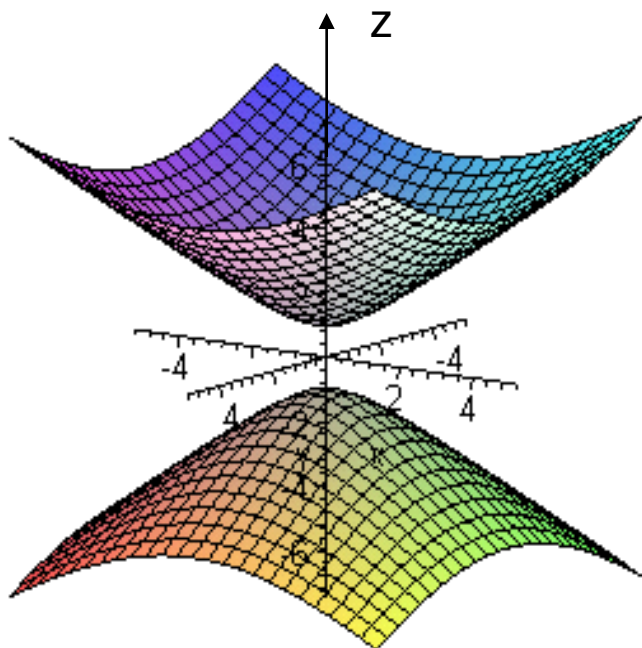
Mặt cầu



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

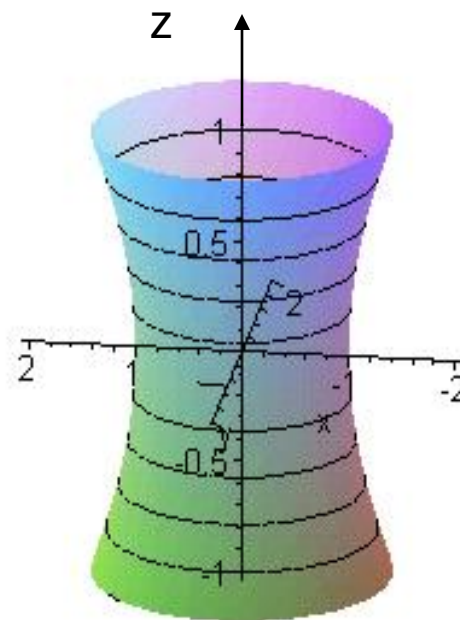
Hyperboloid

Hai tầng



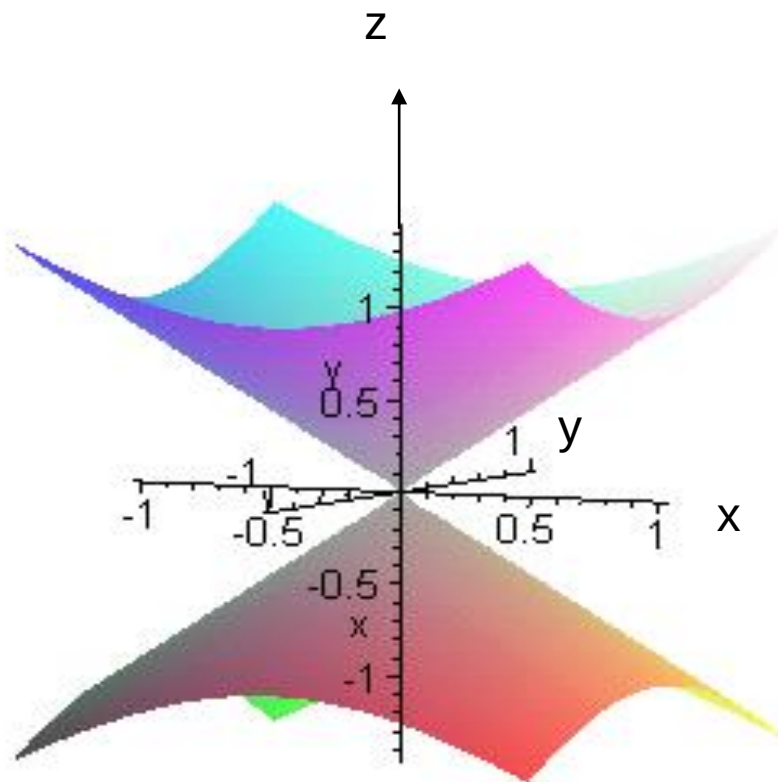
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Một tầng



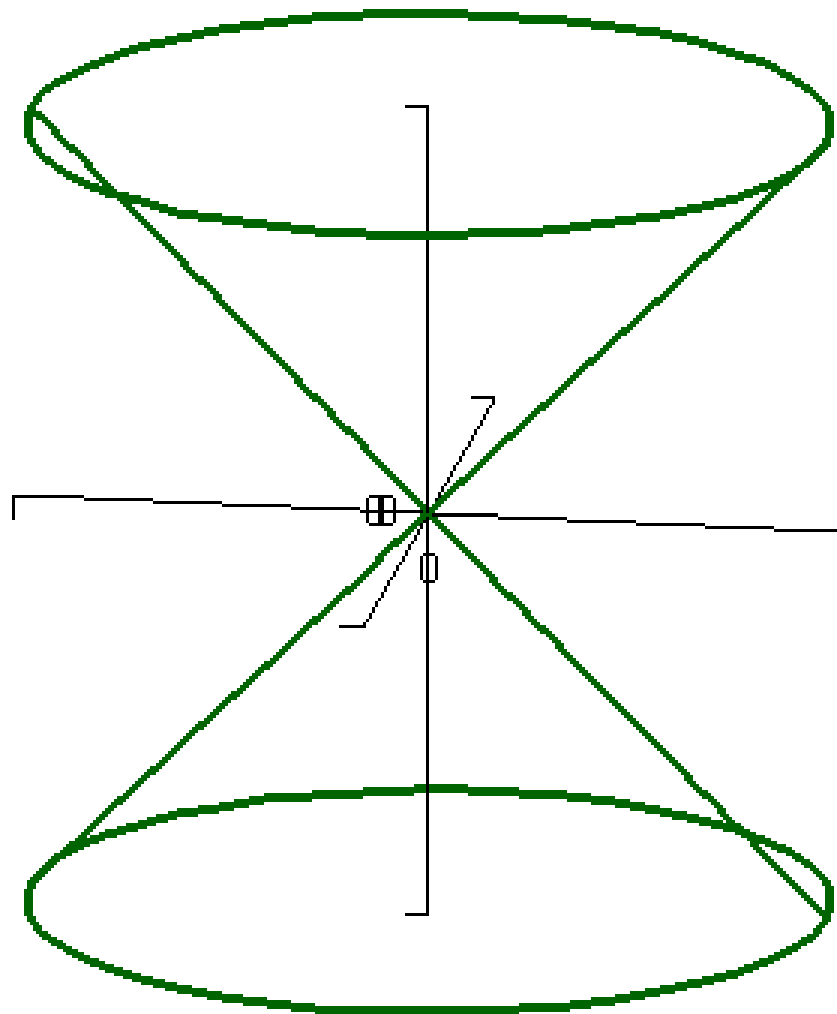
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Nón

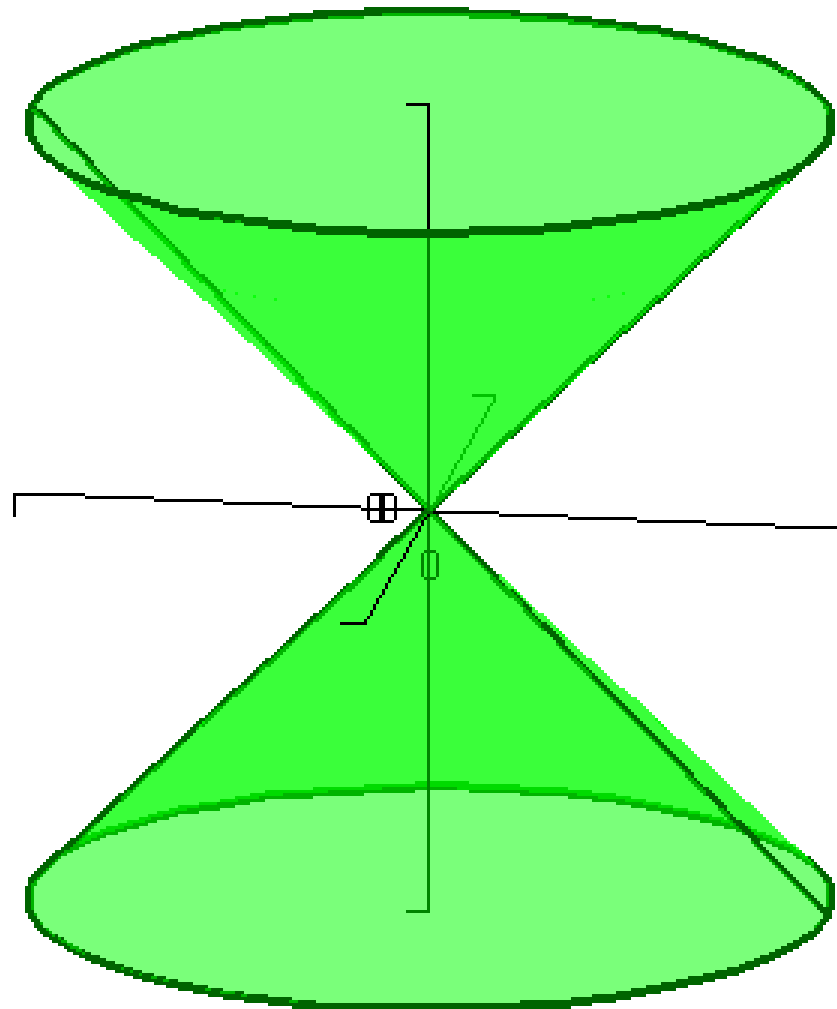


$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

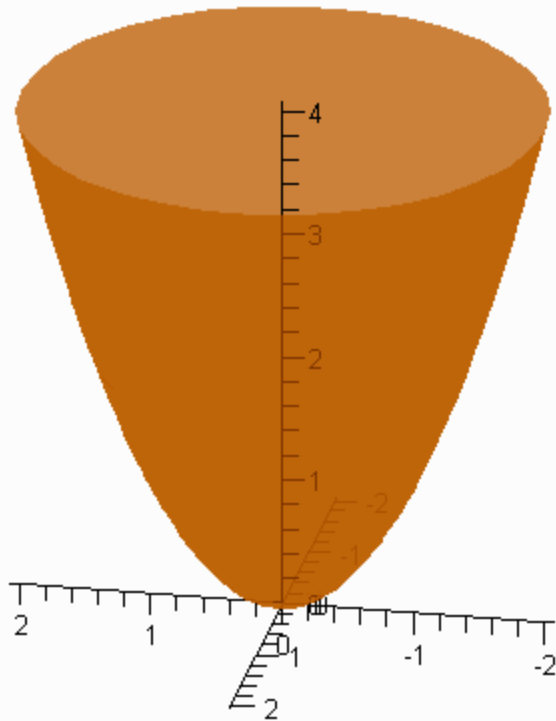
Vẽ nón



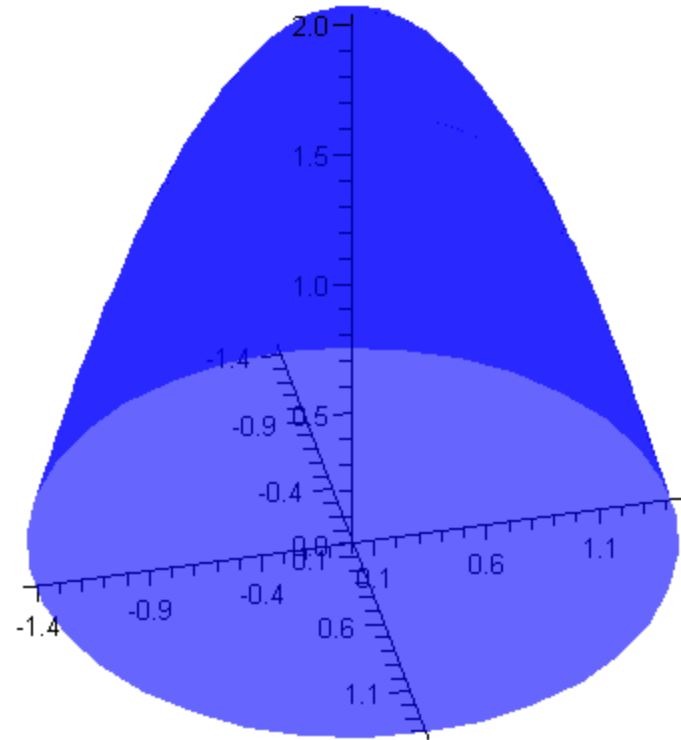
Vẽ nón



Paraboloid elliptic

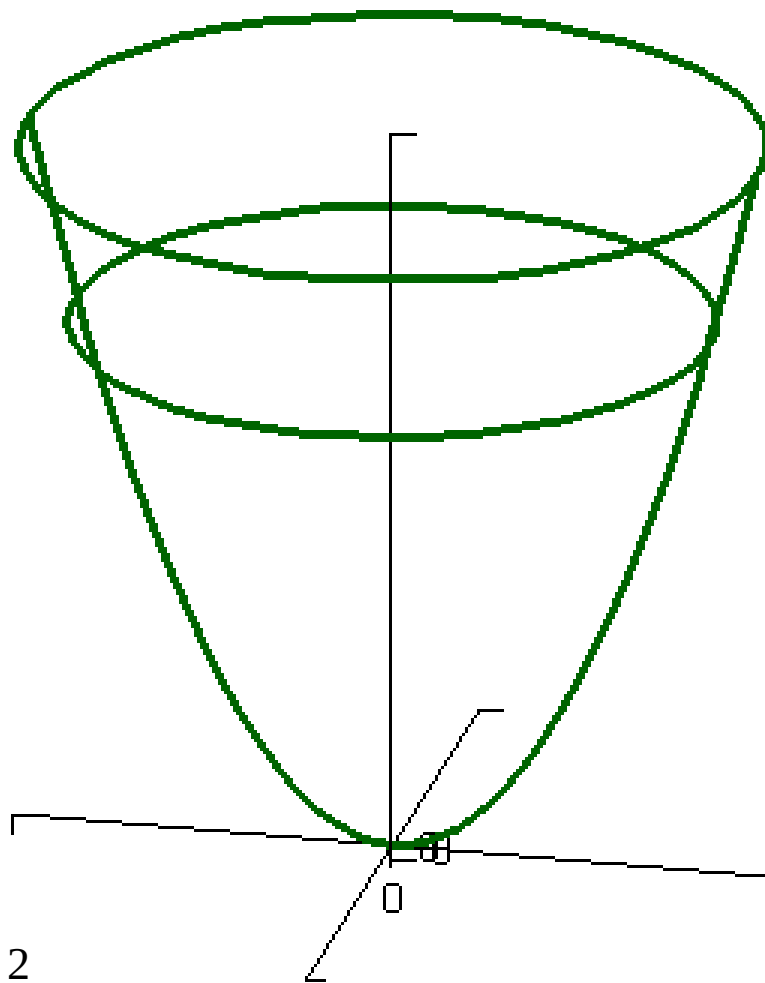


$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



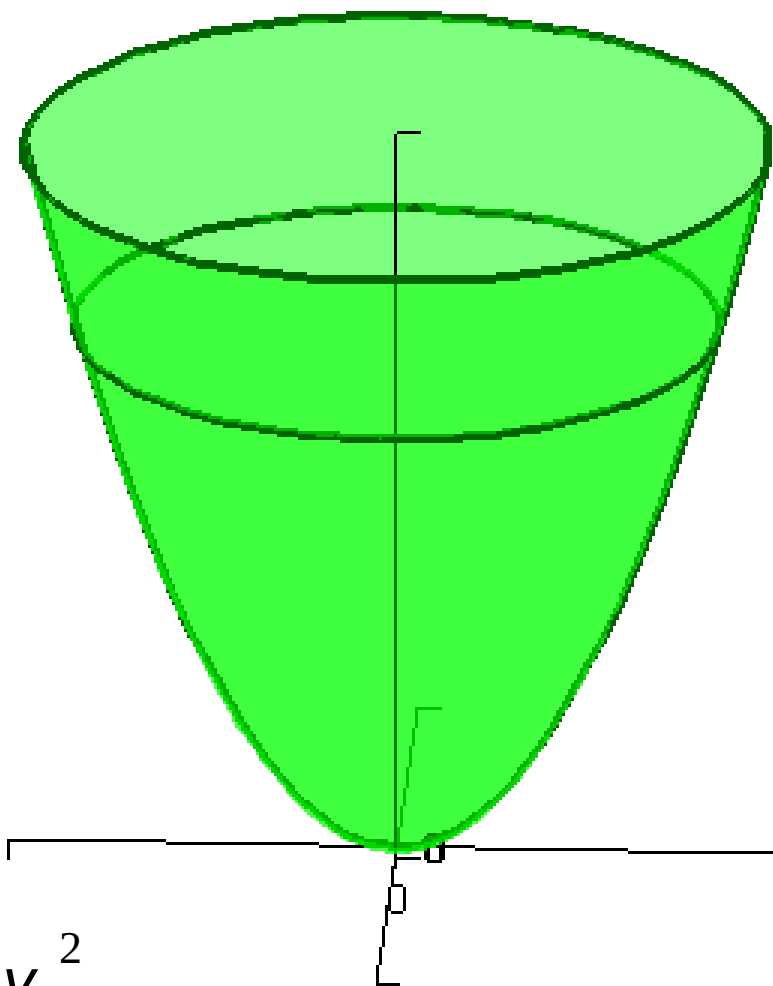
$$z = 2 - x^2 - y^2$$

Vẽ paraboloid elliptic



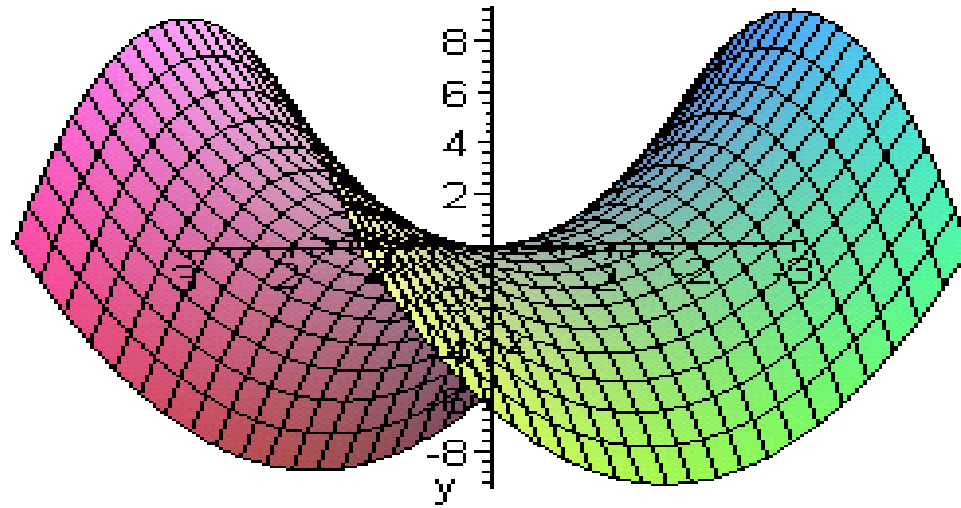
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Vẽ paraboloid elliptic



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Paraboloid hyperbolic

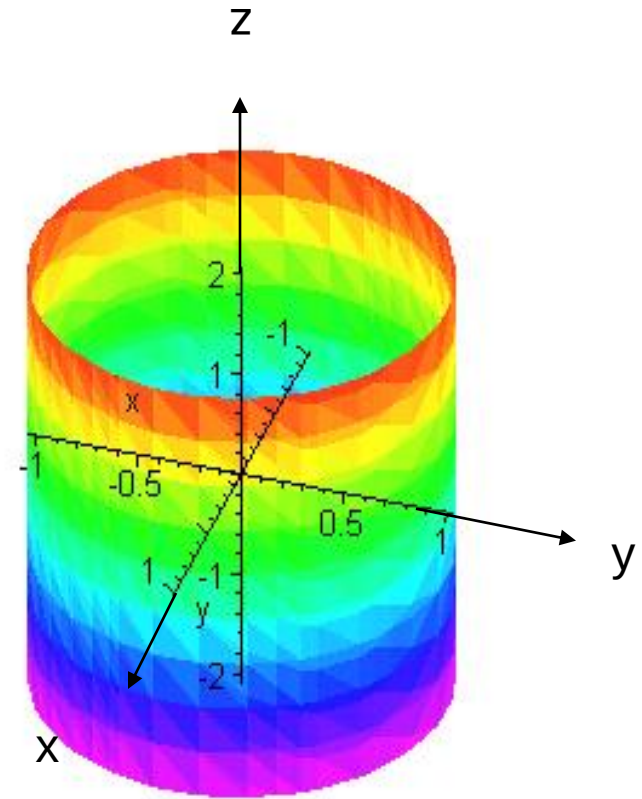


$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Trụ elliptic

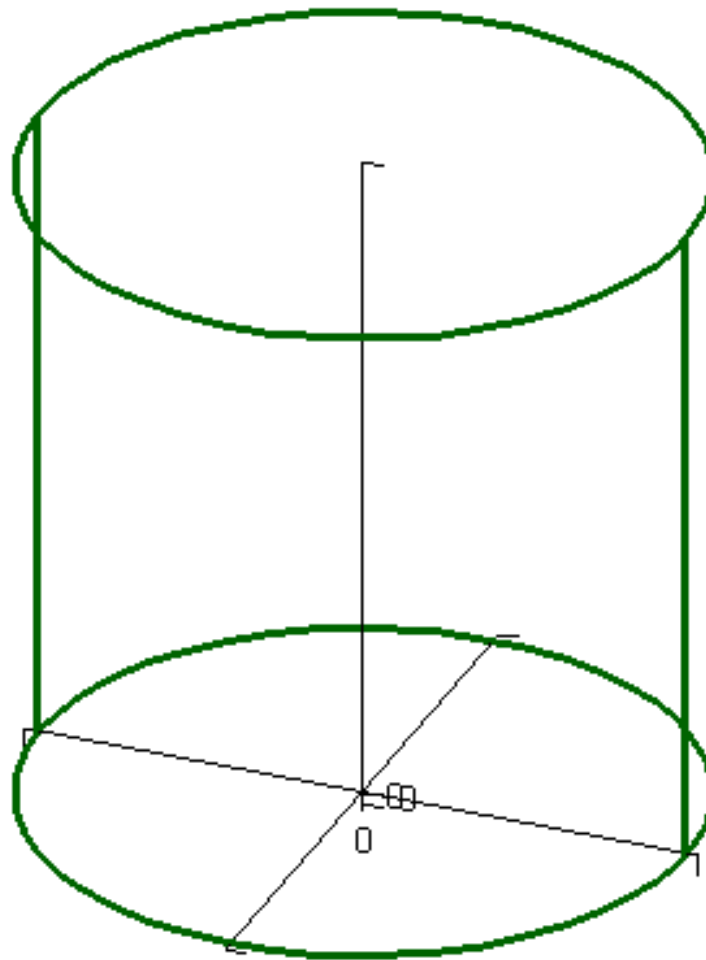
Cách vẽ các mặt trụ:

1. Vẽ đường chuẩn (là đường cong bậc 2 trong phương trình mặt)
2. Cho đường bậc 2 di chuyển dọc theo trục không chứa biến xuất hiện trong phương trình mặt



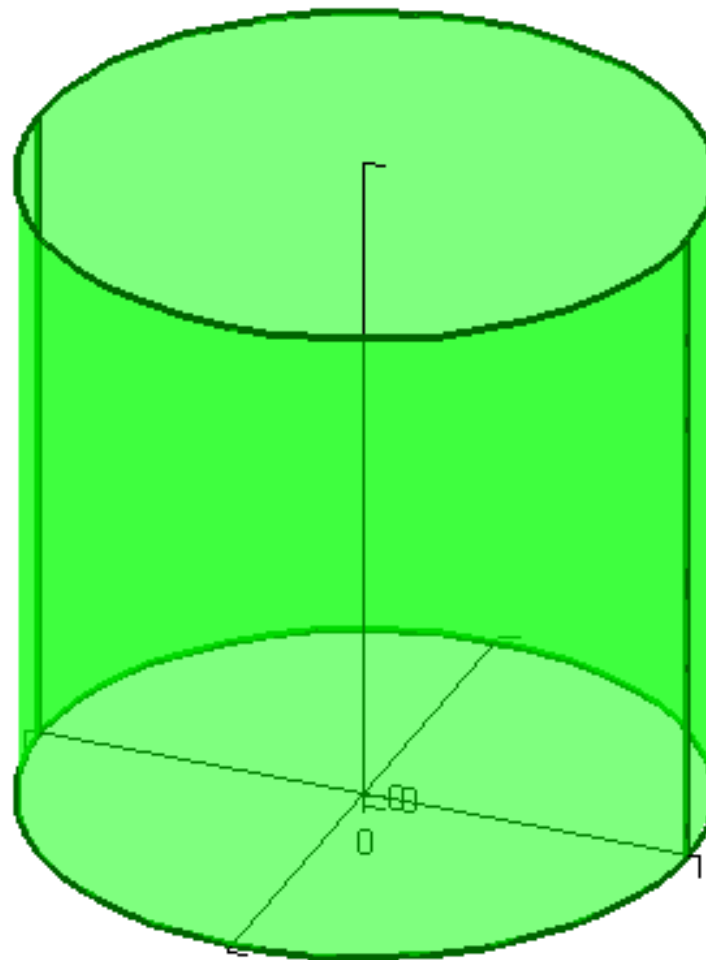
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vẽ trụ



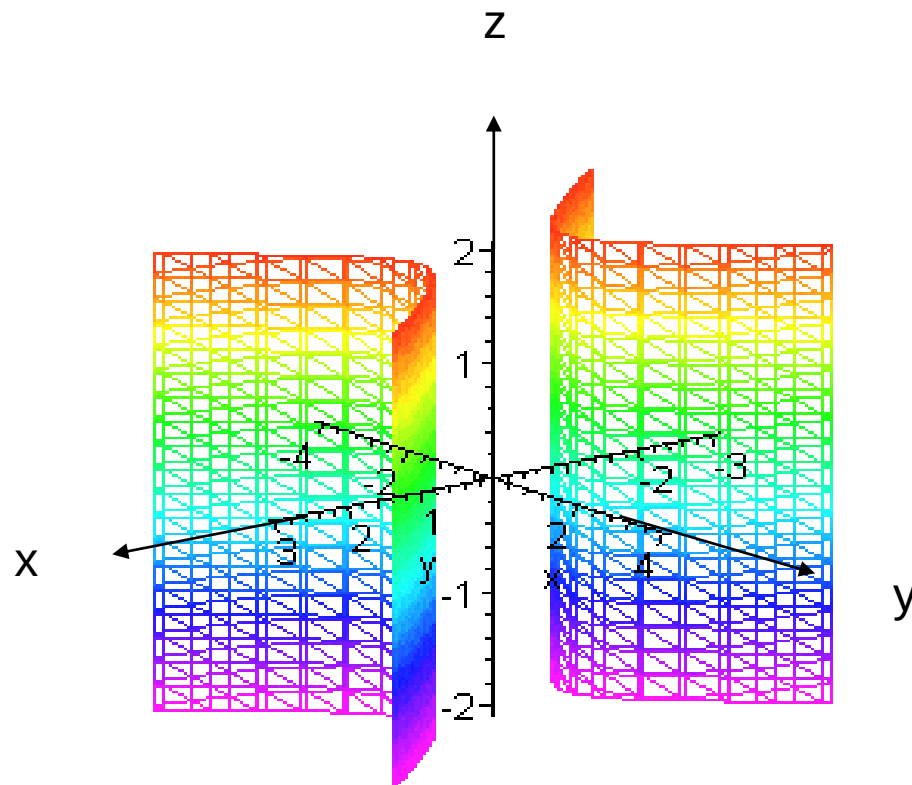
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vẽ trụ



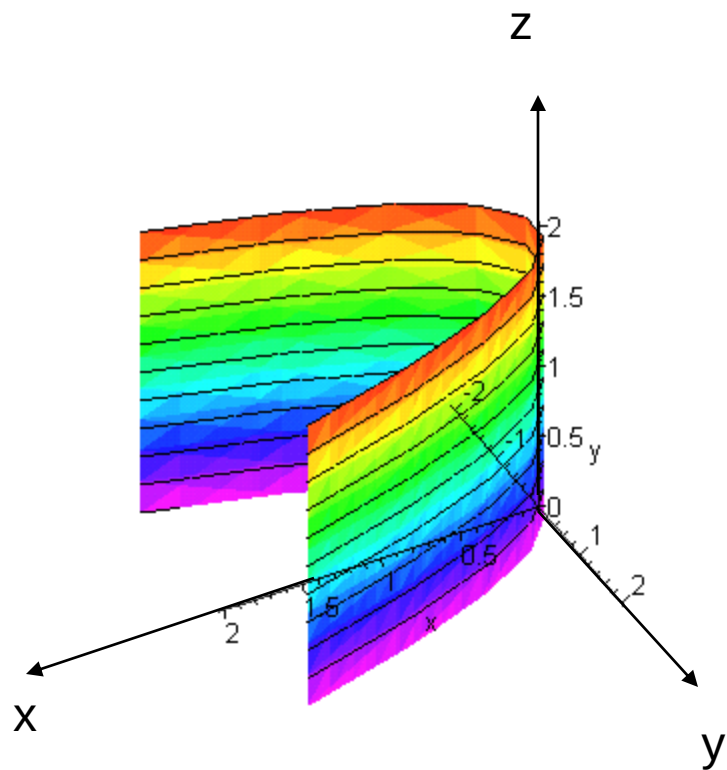
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Trụ hyperbolic

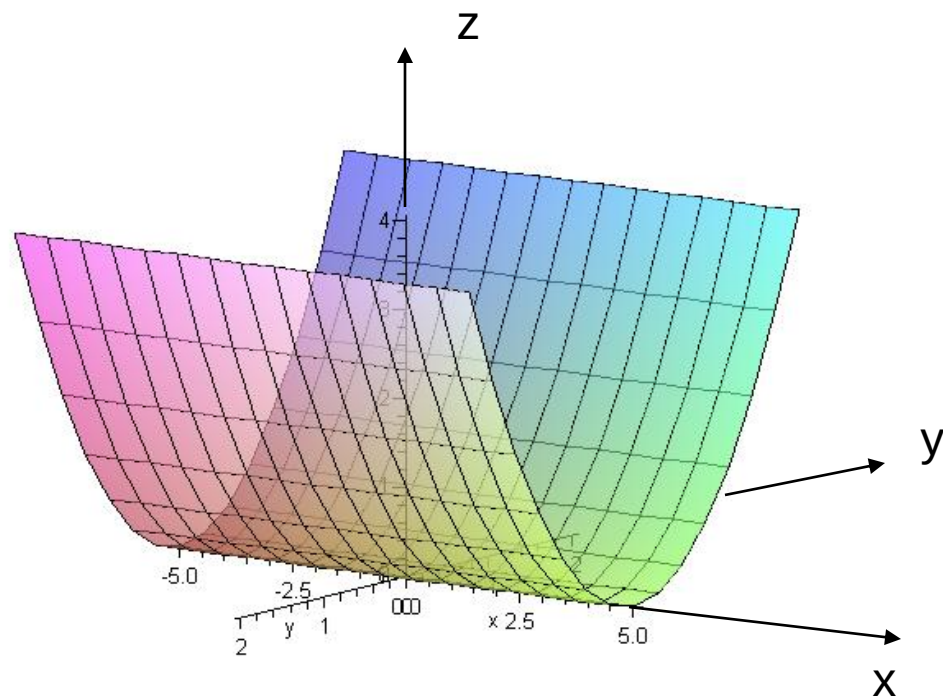


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Trụ parabolic



$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = 2pz$$

Cách phân loại mặt bậc 2:

- Đưa dạng toàn phương trong phương trình tổng quát về chính tắc.
- Khử các số hạng bậc nhất (nếu có số hạng bậc 2 đi chung) để đưa pt về dạng chính tắc và nhận dạng.

Trong chương trình chỉ vẽ những mặt chính tắc.

Ví dụ

Tìm pt chính tắc và phân loại các mặt bậc 2:

$$\boxed{1 / 4 x^2 + 4 y^2 - 8 z^2 - 10 x y + 4 x z + 4 y z - 16 x - 16 y - 8 z + 72 = 0} \quad (1)$$

Đưa dạng toàn phương (các số hạng bậc 2) về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao:

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz$$

$$Q(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz$$

$$= 9x'^2 - 9y'^2$$

Phép biến
đổi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{3\sqrt{2}} + \frac{2z'}{3}, y = \frac{-x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{3\sqrt{2}} + \frac{2z'}{3} \\ z = \frac{-4y'}{3\sqrt{2}} + \frac{z'}{3} \end{cases}$$

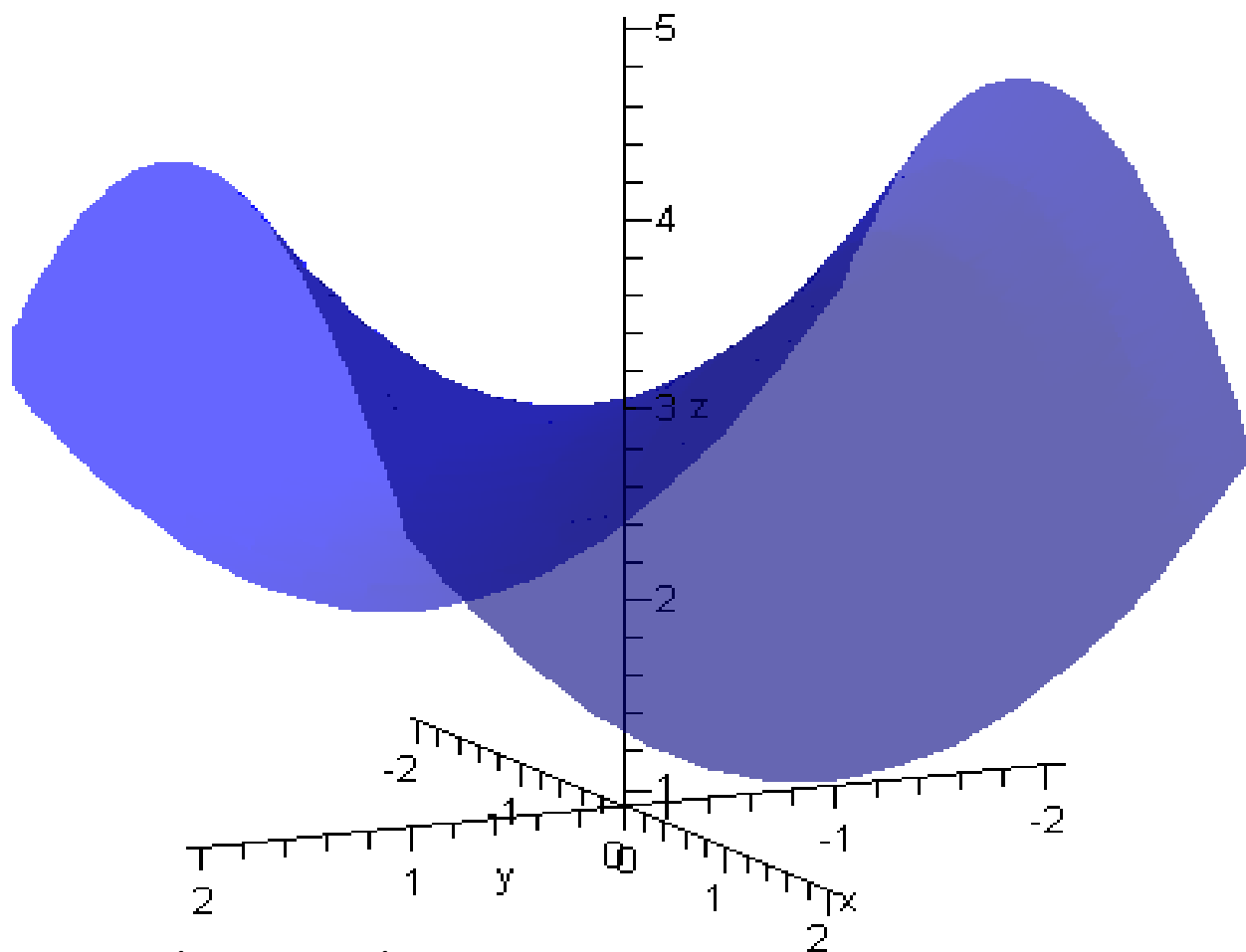
$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{3\sqrt{2}} + \frac{2z'}{3}, & -16 \\ y = \frac{-x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{3\sqrt{2}} + \frac{2z'}{3} & -16 \\ z = -\frac{4y'}{3\sqrt{2}} + \frac{z'}{3} & -8 \end{cases}$$

Phương trình (1) viết lại $9x'^2 - 9y'^2 - 24z' + 72 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{8} = \frac{z'}{3} - 1$$

Paraboloid hyperbolic



$$\frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{8} = \frac{z'}{3} - 1$$

(2)

$$\begin{aligned} 2 / 6 x^2 + 5 y^2 + 7 z^2 - 4 x y + 4 x z \\ + 4 x + 4 y + 16 z - 8 = 0 \end{aligned}$$

Đưa dạng toàn phương về chính tắc

$$6 x^2 + 5 y^2 + 7 z^2 - 4 x y + 4 x z = 3 x'^2 + 6 y'^2 + 9 z'^2$$

Phép biến đổi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Phương trình (2) viết lại

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 + 12y' + 12z' - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x'^2 + 6(y' + 1)^2 + 9(z' + 2/3)^2 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x''^2 + 6y''^2 + 9z''^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''^2}{6} + \frac{y''^2}{3} + \frac{z''^2}{2} = 1 \quad \text{Elippsoid}$$

$$3 / z = xy$$

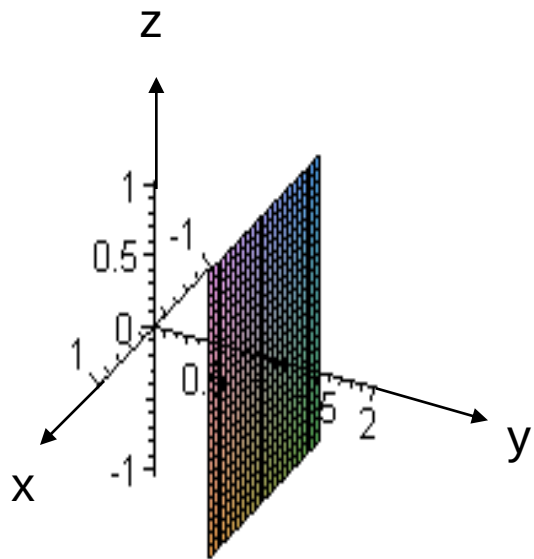
Dùng phép biến đổi Lagrange

$$x = x' + y', y = x' - y', z = z'$$

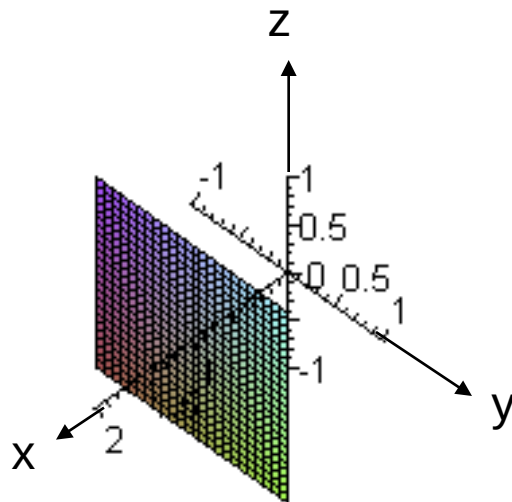
$$z' = x'^2 - y'^2$$

Paraboloid hyperbolic

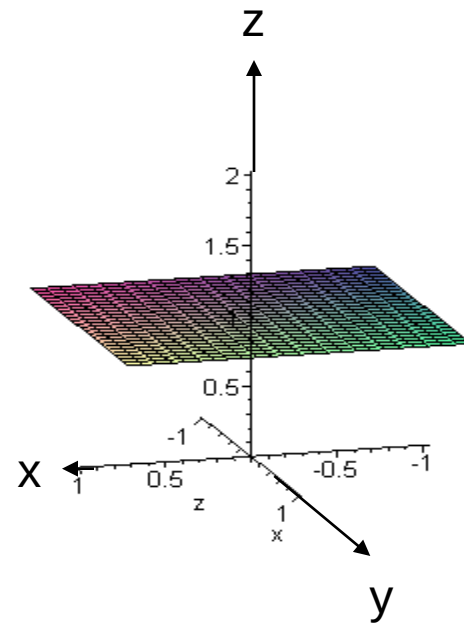
Các mặt phẳng song song các mặt tọa độ



$$y = a$$

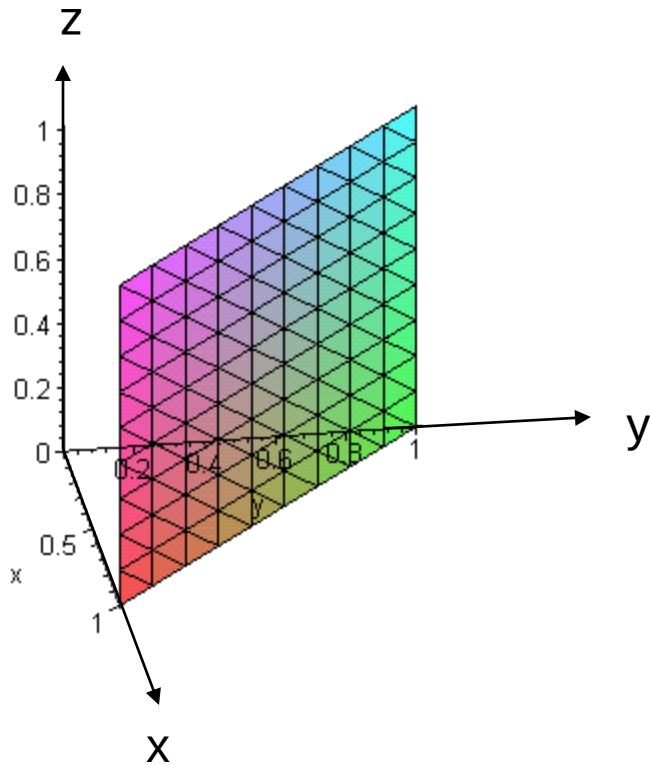


$$x = a$$

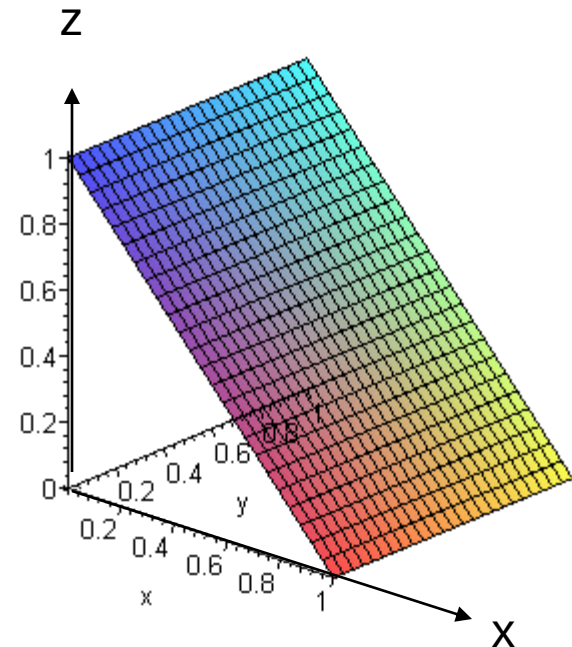


$$z = a$$

Một số mặt phẳng

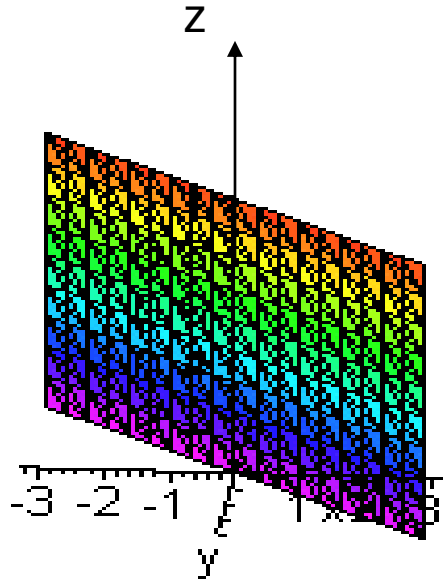


$$x + y = 1$$

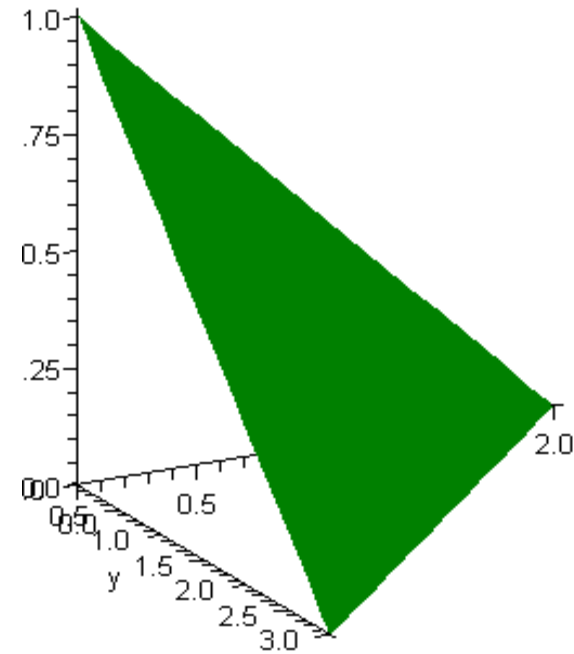


$$x + z = 1$$

Một số mặt phẳng



$$y = x$$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Nhận dạng các mặt cong sau

$$x^2 - xy + z^2 = 0$$

$$z = x^2 + 4xy - y^2$$

$$xy + 2yz + x - y = 0$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 = 9$$

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$