

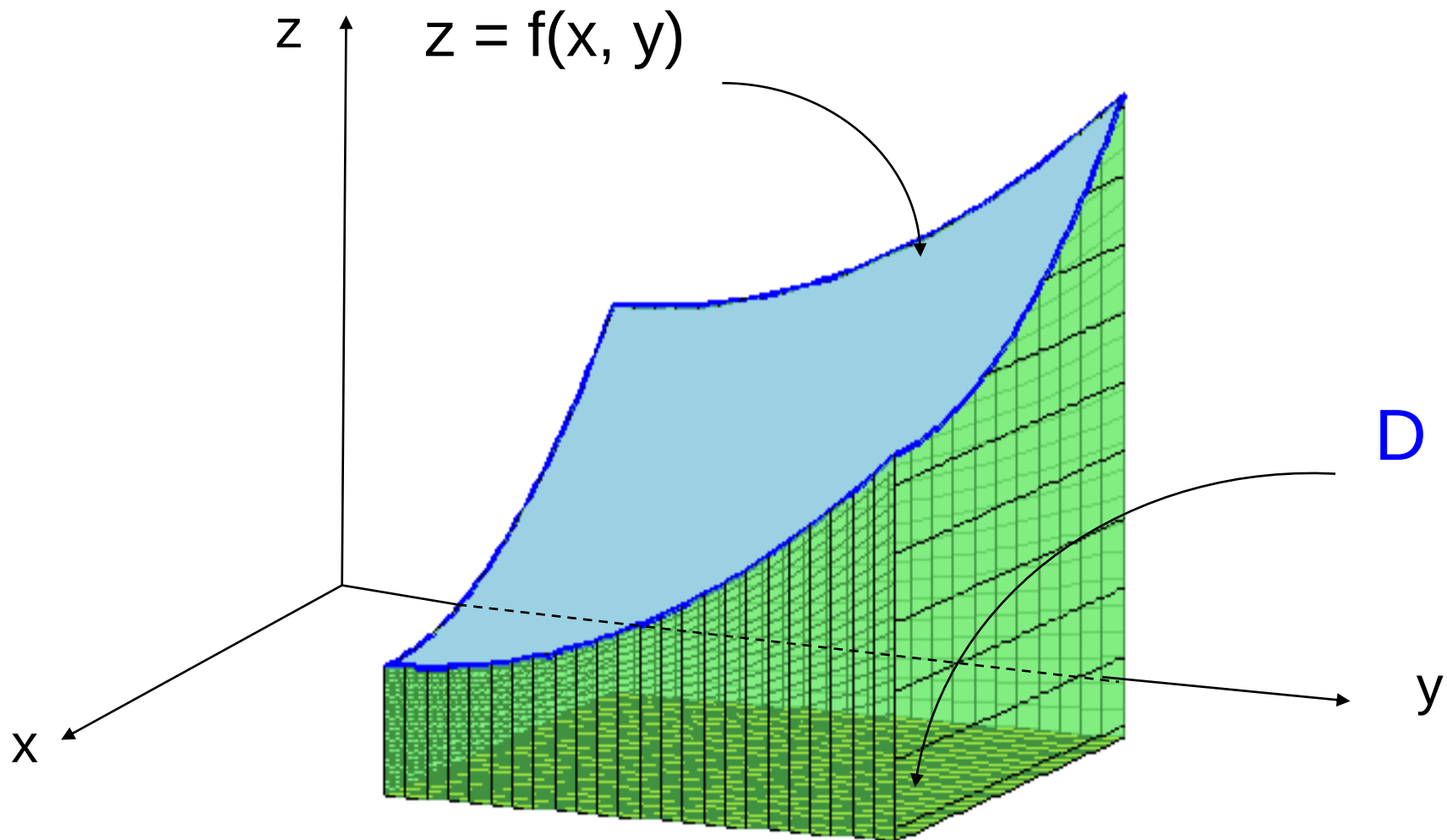
Chương 2:

TÍCH PHÂN BỘI

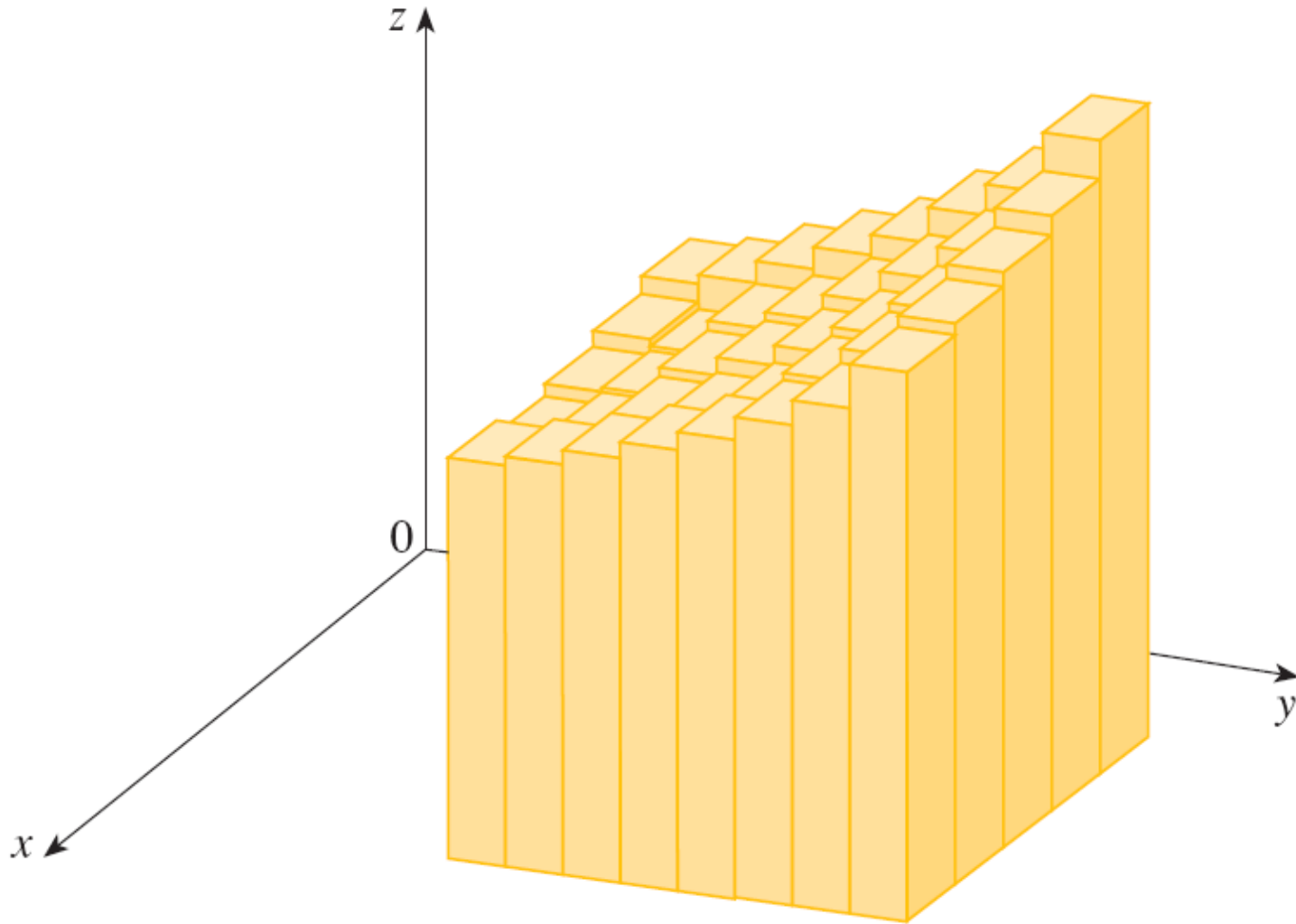
Phần 1: TÍCH PHÂN KÉP

BÀI TOÁN THỂ TÍCH

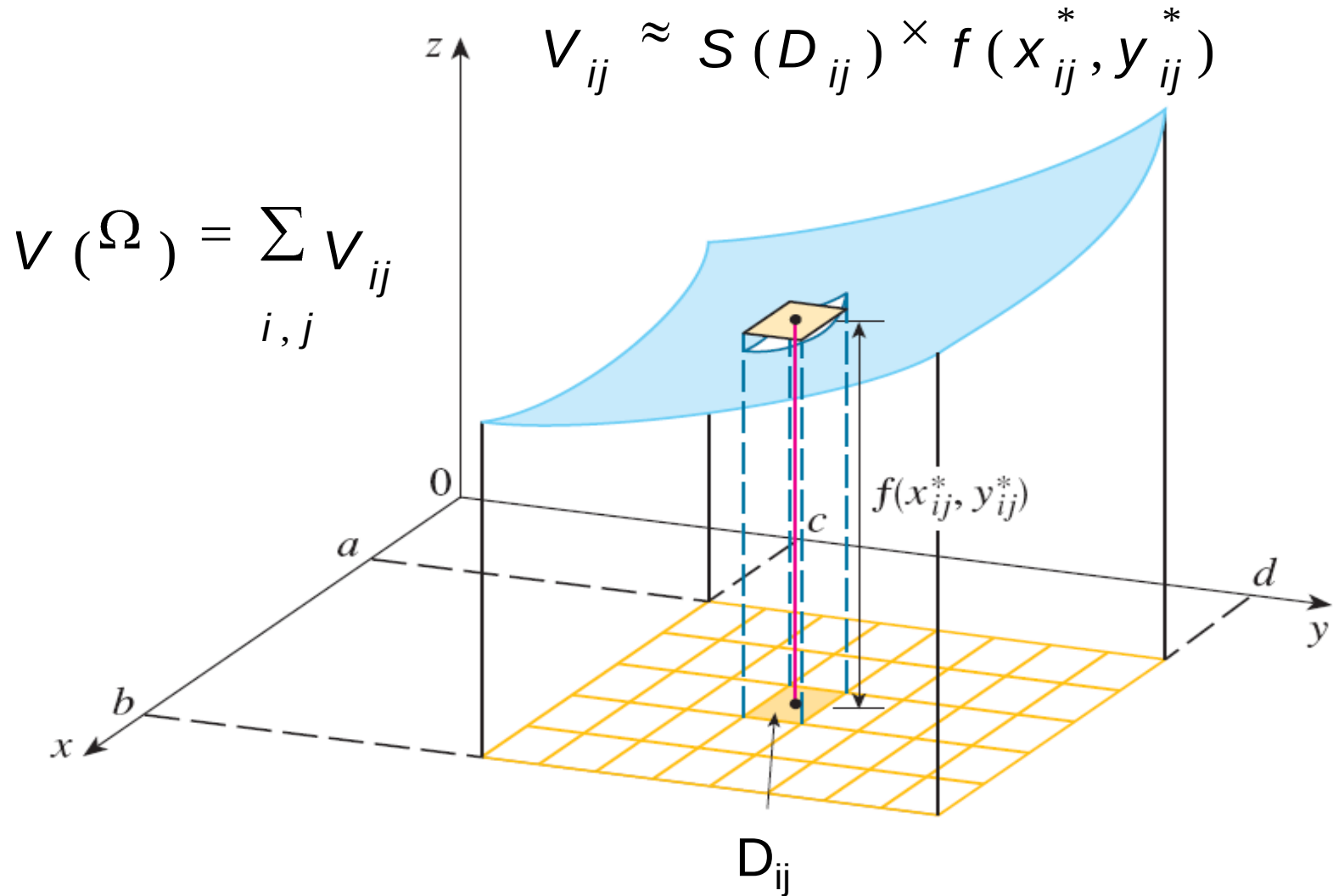
Xét vật thể hình trụ Ω được giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x, y) > 0$, mặt dưới là Oxy, bao xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz và đường chuẩn là biên của miền D đóng và bị chặn trong Oxy. Tìm thể tích Ω .



Xấp xỉ Ω bằng các hình trụ con

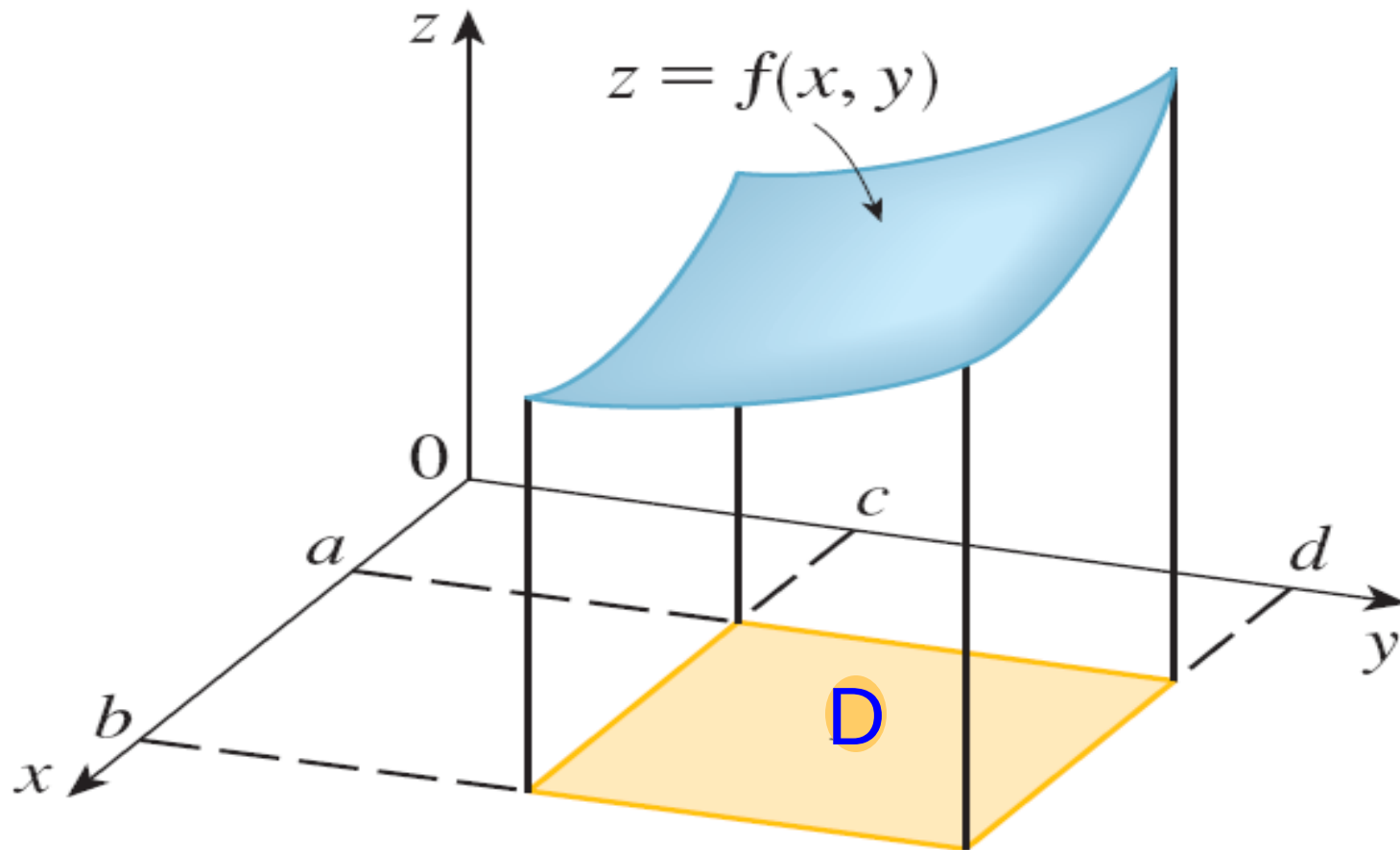


Thể tích xấp xỉ của hình trụ con

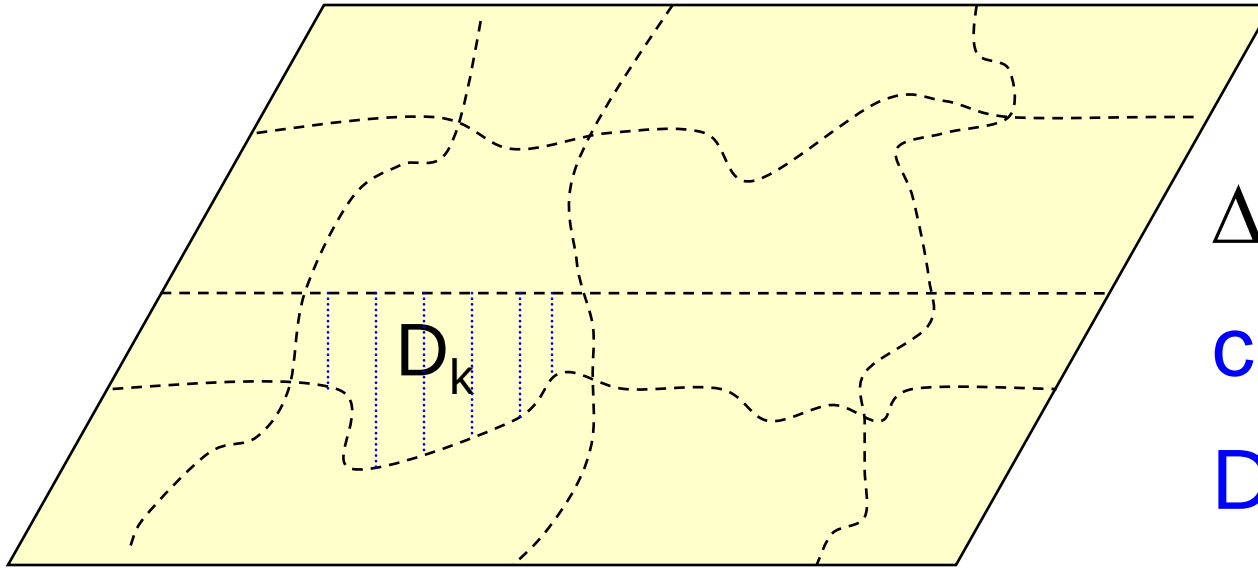


ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN KÉP

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D đóng và bị chặn.



Phân hoạch D thành các miền con $D_1, D_2, \dots, D_n$

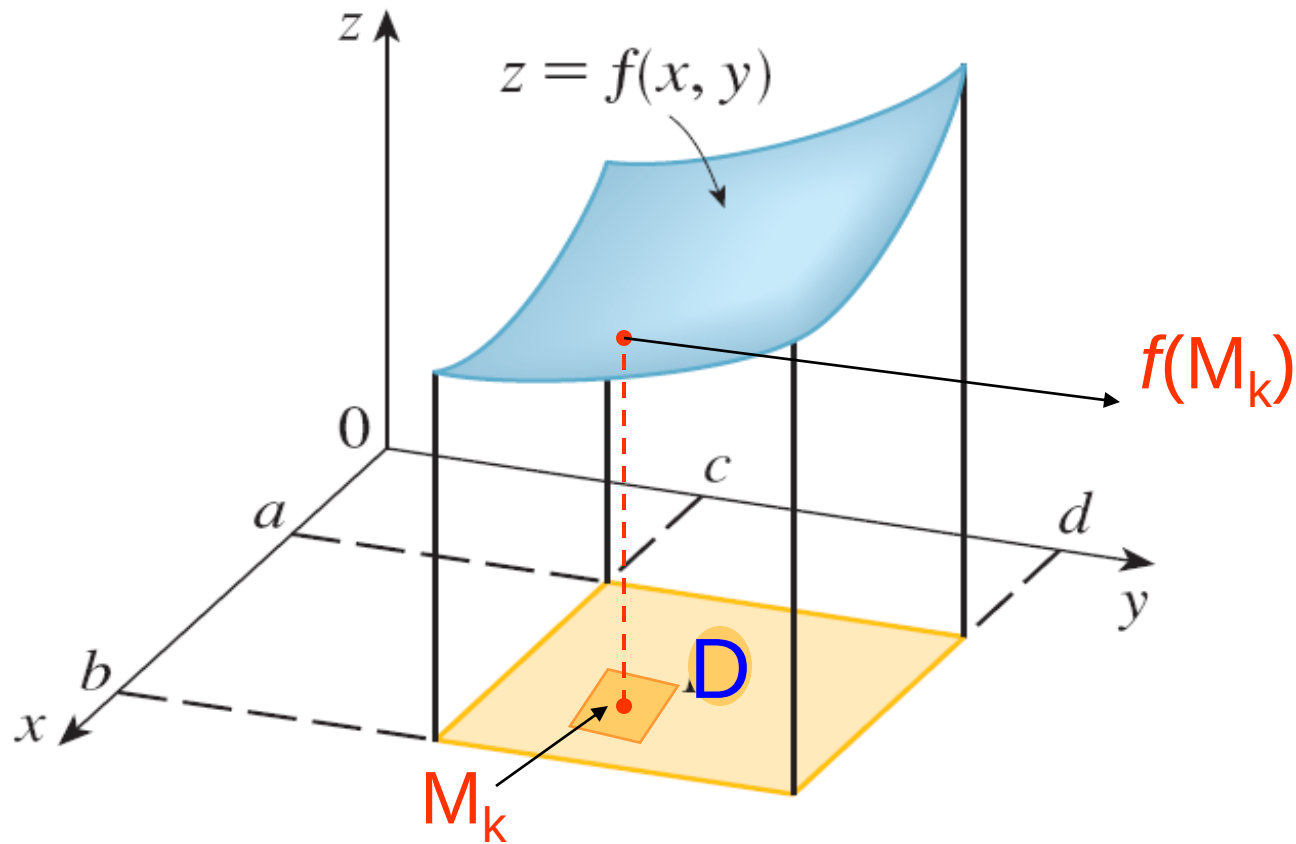


ΔS_k là diện tích
của miền con
 D_k .

$d(D_k)$ = đường kính D_k = khoảng cách
lớn nhất giữa 2 điểm trong D_k .

$d = \max_{k=1,n} \{d(D_k)\}$ Đường kính phân hoạch

M_k được chọn tùy ý trong D_k



$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

Tổng tích phân của f

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

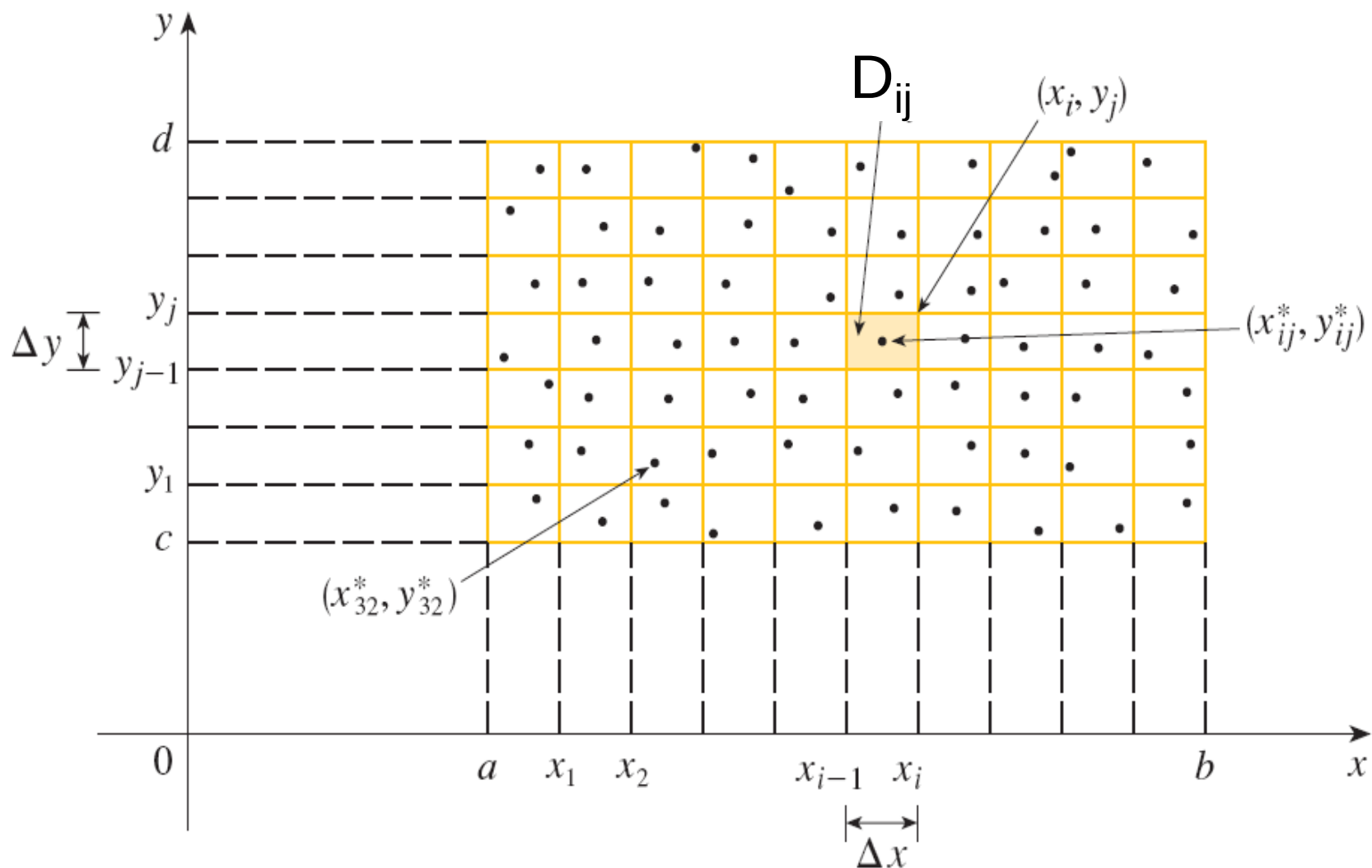
f khả tích nếu: $\lim_{d \rightarrow 0} S_n < \infty$

với phân hoạch tùy ý của D

Tích phân kép của f trên D là giới hạn
nếu có của S_n

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{d \rightarrow 0} S_n$$

Phân hoạch D theo các đường // ox, oy



Khi f khả tích, việc tính tích phân không phụ thuộc vào phân hoạch. Do đó có thể phân hoạch D theo các đường song song Ox, Oy .

D_k là hình chữ nhật với các cạnh $\Delta x, \Delta y$

$$\Rightarrow \Delta S_k = \Delta x \cdot \Delta y$$

$\Rightarrow$ Thay cách viết tp kép

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) ds$$

Nhận dạng hàm khả tích

- Đường cong $(C) : y = y(x)$ trơn tại $M(x_0, y_0) \in (C)$ nếu $y'(x)$ liên tục tại x_0 .
- (C) trơn từng khúc nếu (C) được chia thành hữu hạn các đoạn trơn.

Nếu $f(x, y)$ liên tục trên miền D đóng, bị chặn và có biên trơn từng khúc thì f khả tích trên D .

Tính chất hàm khả tích

Cho D là miền đóng và bị chặn

$$1 / S(D) = \iint_D 1 dx dy \quad (\text{Diện tích } D)$$

$$2 / \iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$\iint_D (f + g) dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy$$

$$3 / D = D_1 \cup D_2, D_1 \text{ và } D_2 \text{ không gối nhau}$$

(tối đa chỉ dính biên)

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$

Định lý giá trị trung bình

D là **miền liên thông** nếu 2 điểm tùy ý trong D có thể nối nhau bởi 1 đường cong liên tục trong D .

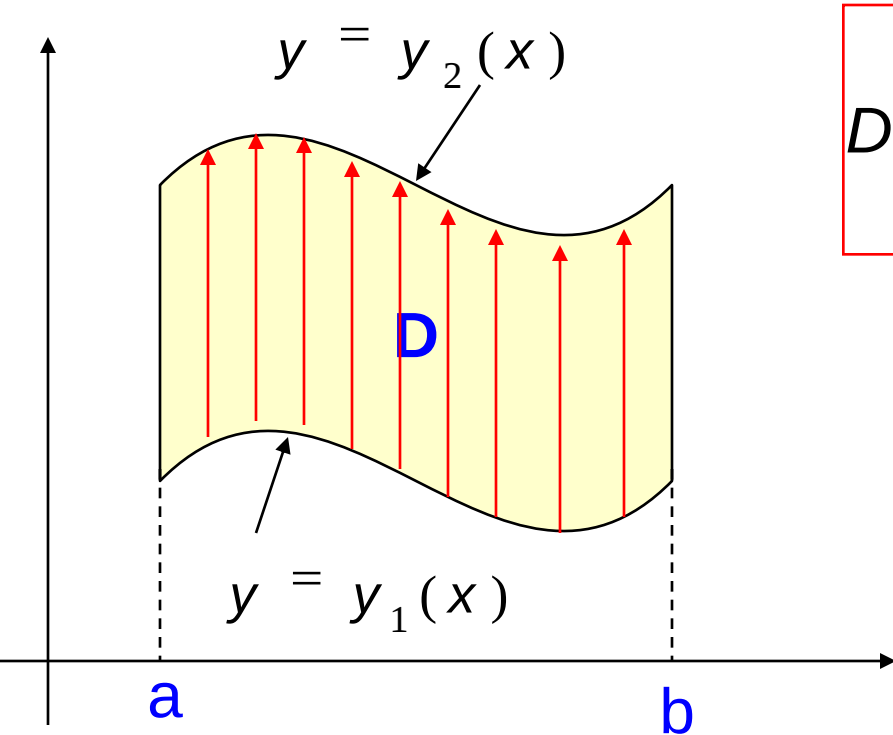
Cho f liên tục trên tập đóng, bị chặn, liên thông D . Khi đó tồn tại $M_0(x_0, y_0) \in D$ sao cho

$$f(M_0) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$\frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

gọi là giá trị trung bình của f trên D .

CÁCH TÍNH TÍCH PHẦN KÉP

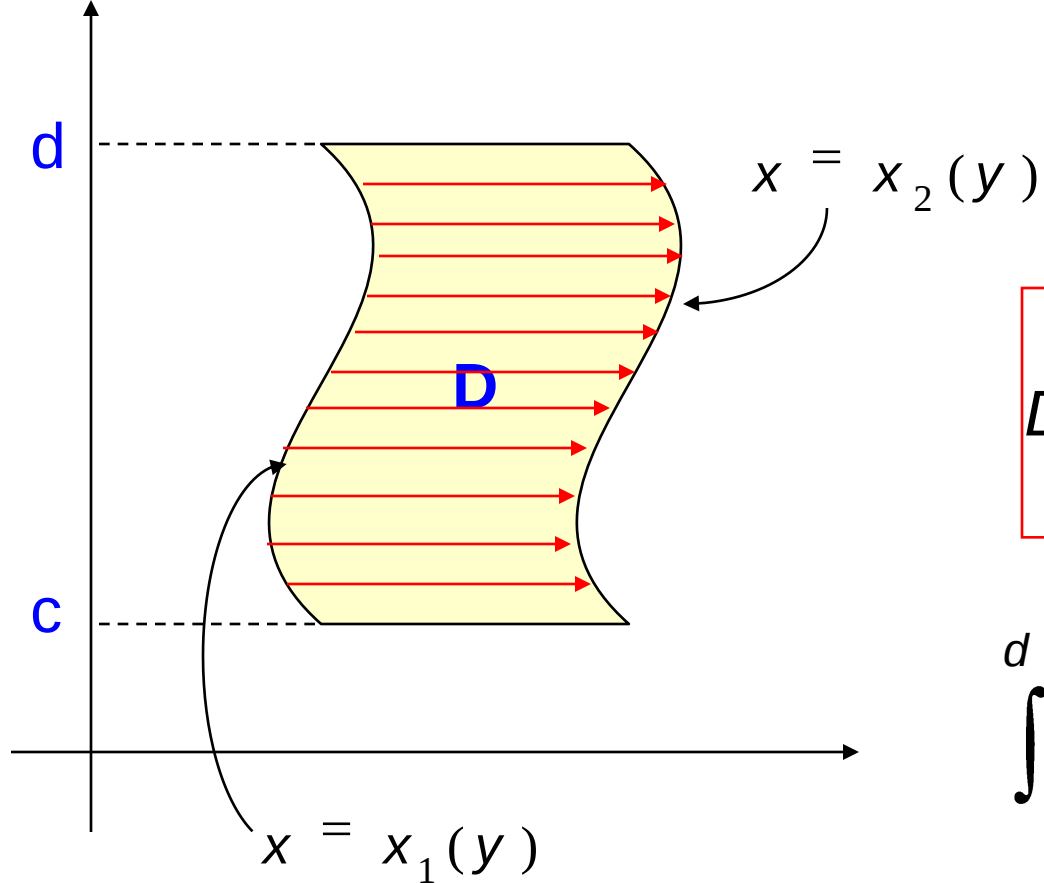


$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

$$\int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Cách viết:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$



$$D : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

$$\int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Cách viết:

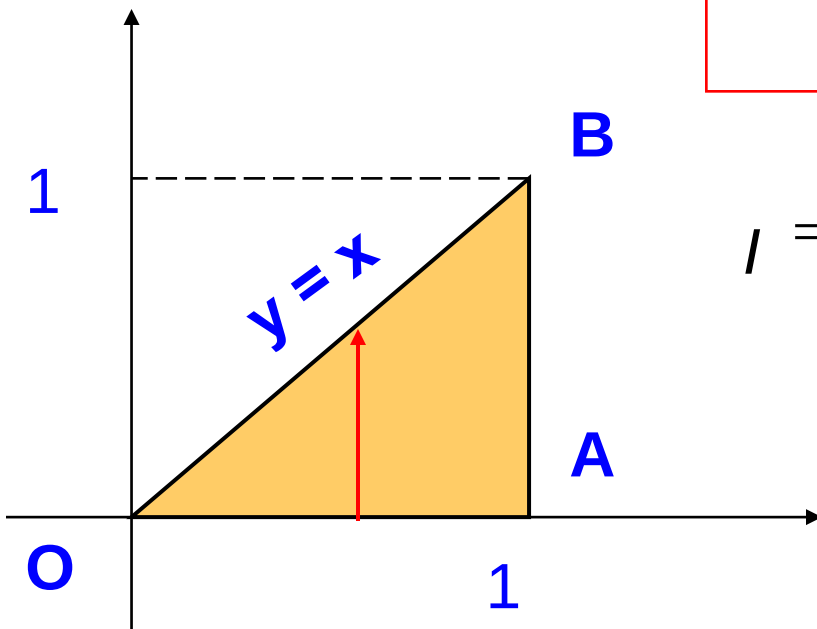
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

VÍ DỤ

1/ Tính $I = \iint_D xy dx dy$

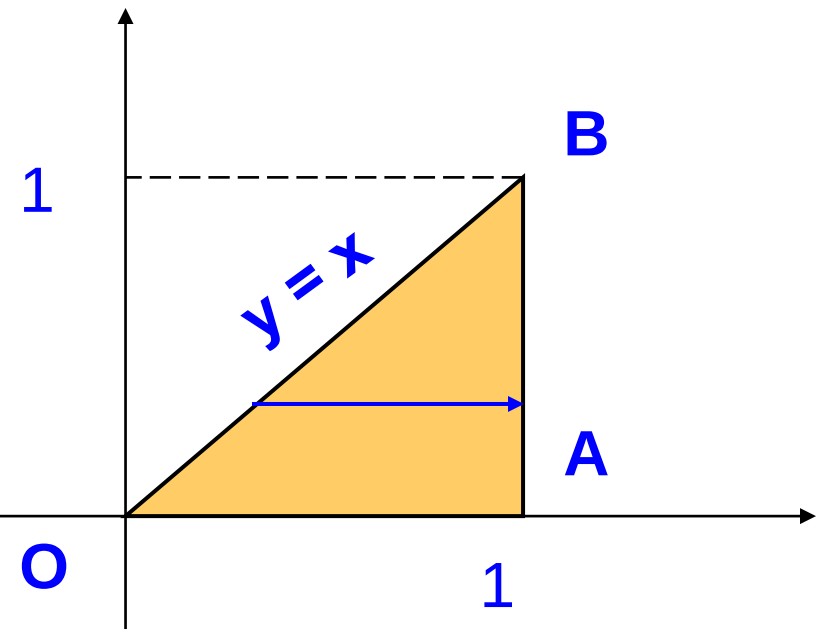
với D là tam giác OAB , $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$

CÁCH 1



$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^x xy dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



CÁCH 2

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$I = \iint_D xy dx dy$$

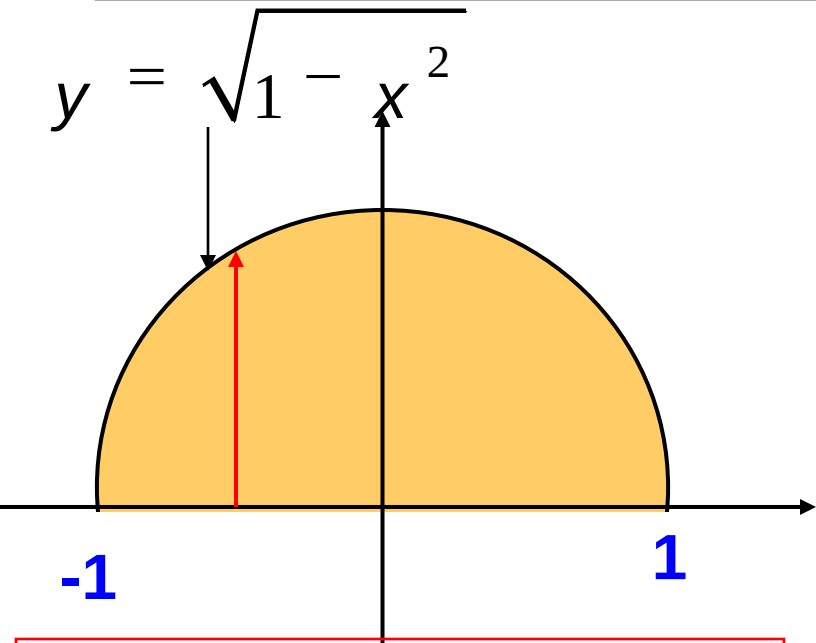
$$= \int_0^1 dy \int_y^1 xy dx$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 y \frac{1 - y^2}{2} dy = \frac{1}{8}$$

2/ Tính $I = \iint_D (x + y) dx dy$

với $D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$



$$D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x + y) dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} \right] dx = \frac{2}{3}$$

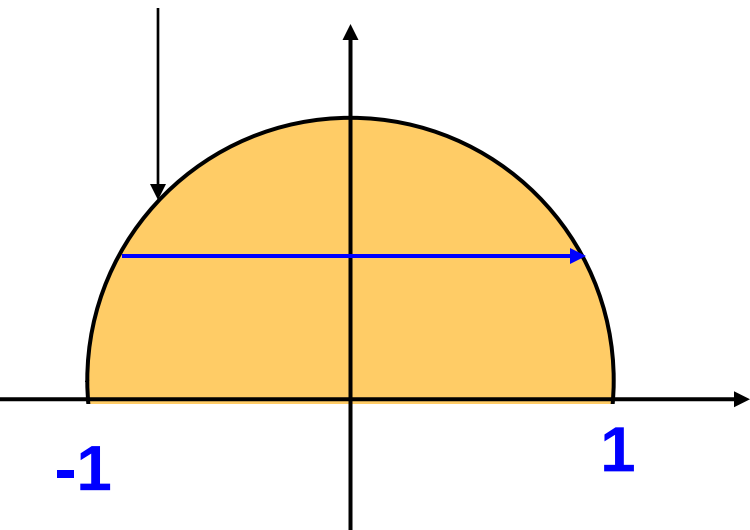
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$I = \iint_D (x + y) dx dy$$

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) dx$$

$$= \int_0^1 2y \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \frac{2}{3}$$

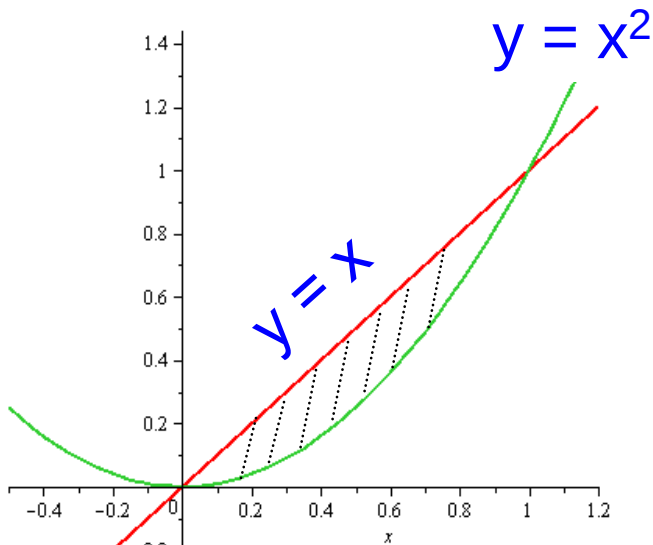


$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

3/ Tính

$$I = \iint_D (x + 1) dx dy$$

với D giới hạn bởi các đường $y = x$, $y = x^2$



$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$$

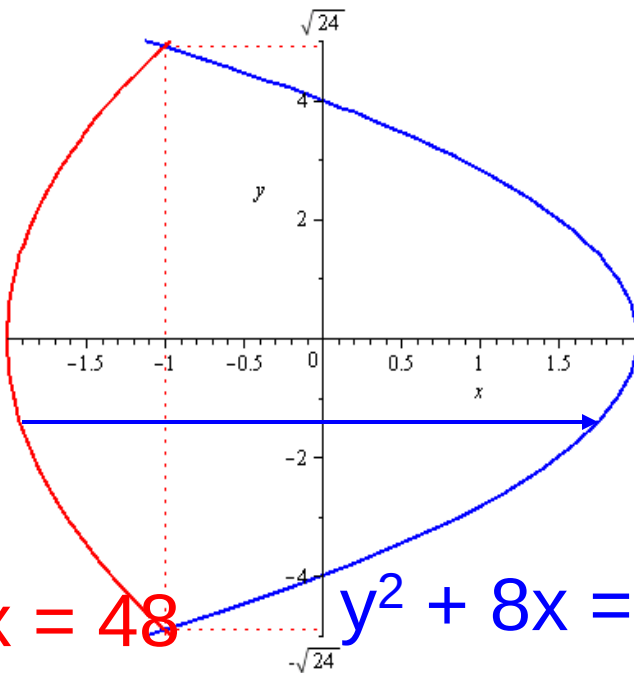
$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + 1) dy$$

$$= \int_0^1 (x + 1)(x - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4}$$

4/ Tính $I = \iint_D (x + 1) dx dy$

với D giới hạn bởi các đường $y^2 + 8x = 16$,
 $y^2 - 24x = 48$



$$D : \begin{cases} \frac{y^2}{48} - 2 \leq x \leq 2 - \frac{y^2}{8} \\ -\sqrt{24} \leq y \leq \sqrt{24} \end{cases}$$

$y^2 - 24x = 48$ $y^2 + 8x = 16$

5/ Tính diện tích miền D giới hạn bởi các đường

$$y = (2 - x)\sqrt{x}, \quad y = x^2 - 2x$$

Hoành độ giao điểm

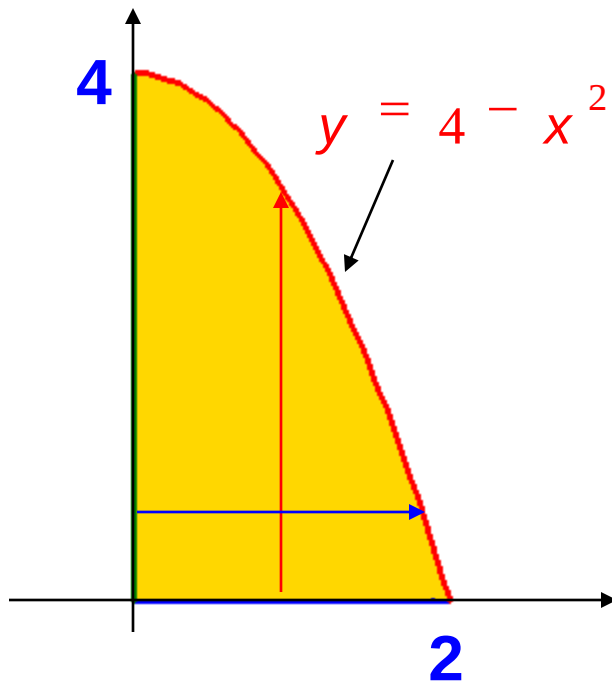
$$\begin{cases} (2 - x)\sqrt{x} = x^2 - 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = 2$$

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x \leq y \leq (2 - x)\sqrt{x} \end{cases}$$

$$S(D) = \iint_D dx dy = \int_0^2 dx \int_{x^2 - 2x}^{(2-x)\sqrt{x}} dy$$

6/ Tính $\iint_D \frac{x e^{2y}}{4 - y} dx dy$

miền D giới hạn bởi các đường: $y = 0$,
 $y = 4 - x^2$, $x \geq 0$,



$$I = \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy$$

Khó lấy
nguyên
hàm

Đổi thứ tự

$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx$$

$$I = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx$$

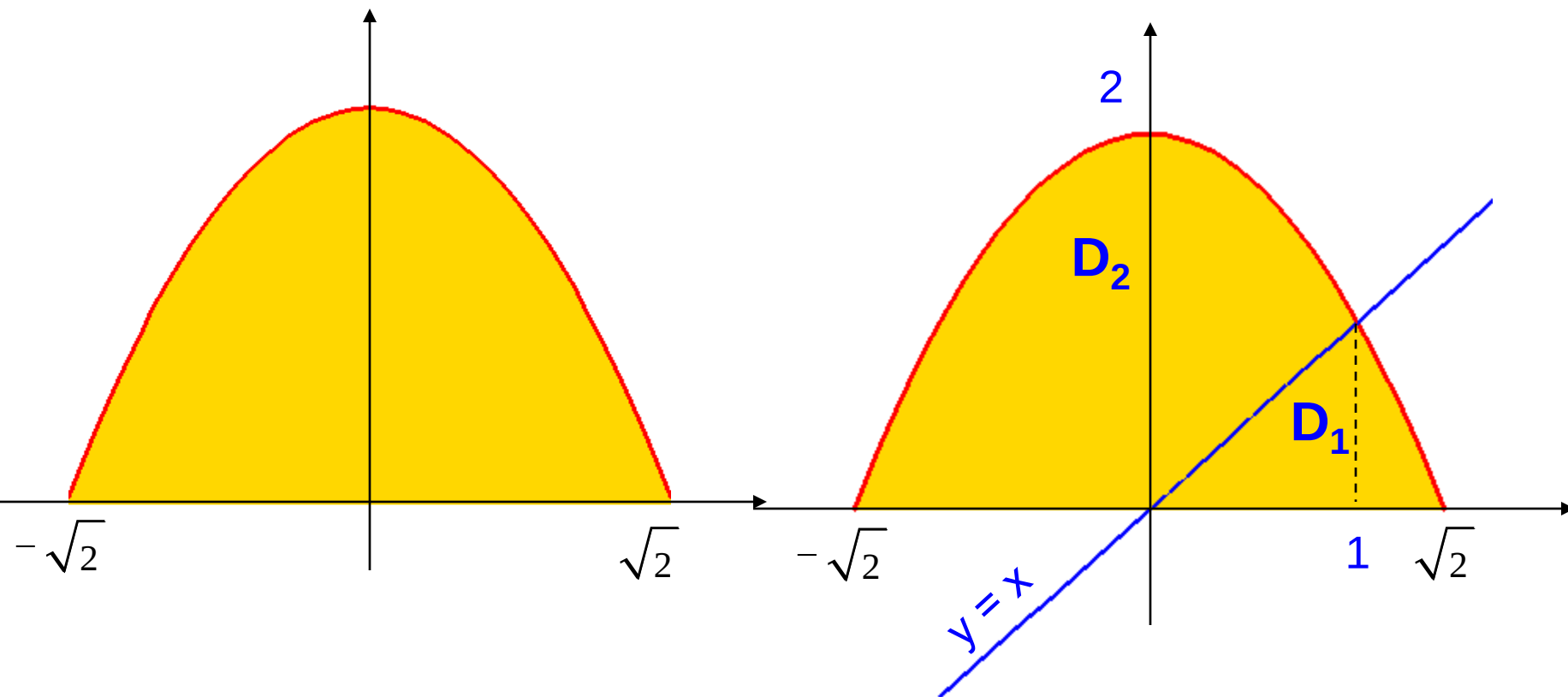
$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \frac{e^8}{4} - \frac{1}{4}$$

7/ Tính

$$\iint_D |x - y| dx dy$$

miền D giới hạn bởi các đường: $y = 0$, $y = 2 - x^2$

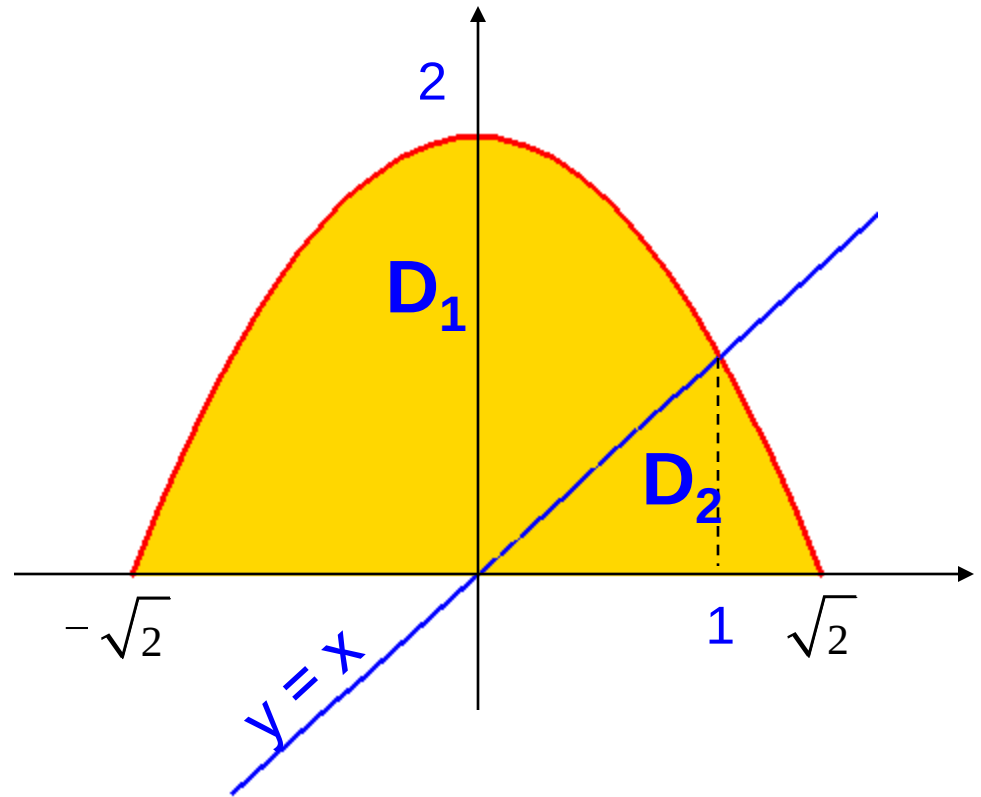


6/ Tính

$$\iint_D |x - y| dx dy$$

miền D giới hạn bởi các đường: $y = 0$, $y = 2 - x^2$

$$I = \iint_{D_1} (y - x) dx dy + \iint_{D_2} (x - y) dx dy$$



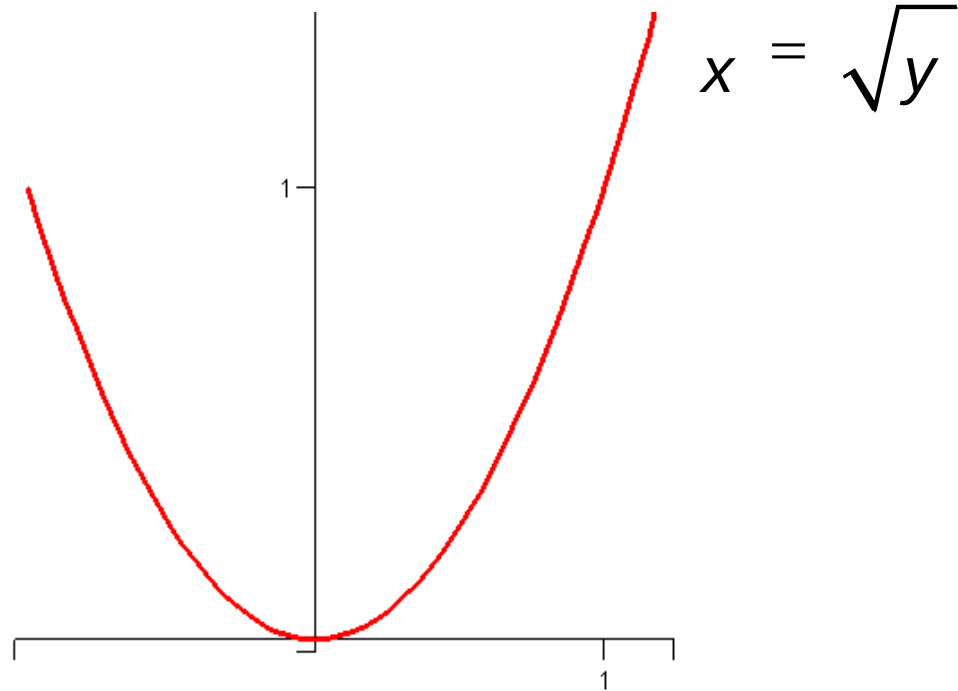
7/ Vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự lấy tp trong các VD sau

$$1 / I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$$

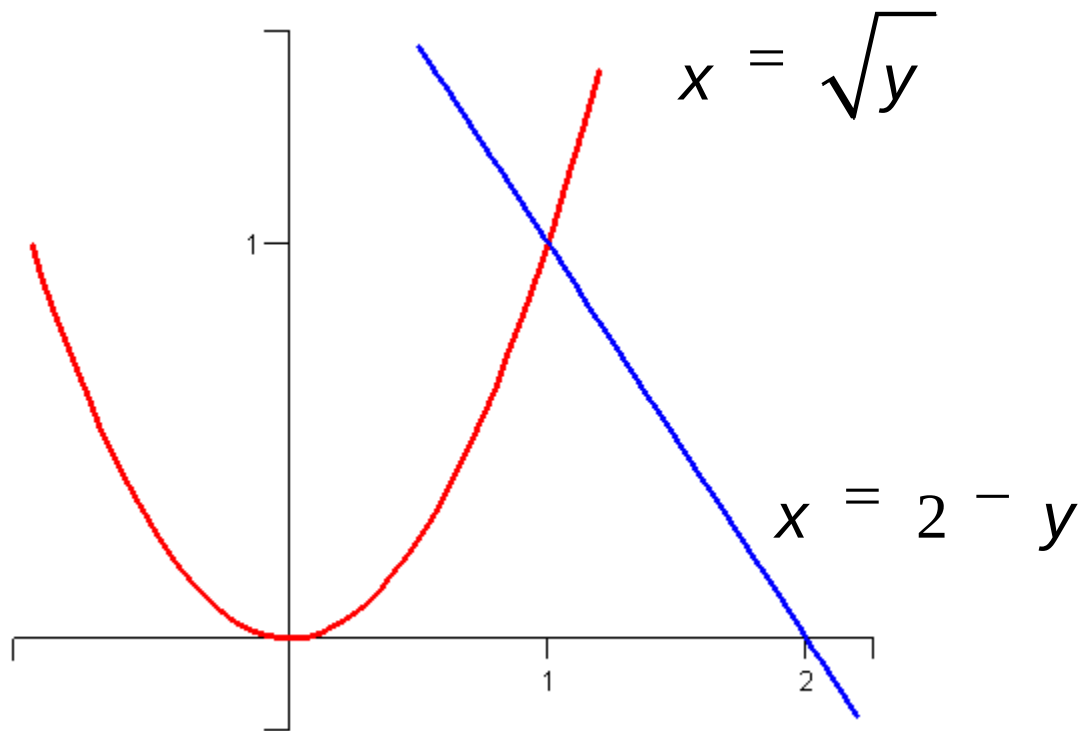
$$2 / I = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{4y}} f(x, y) dx$$

$$3 / I = \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

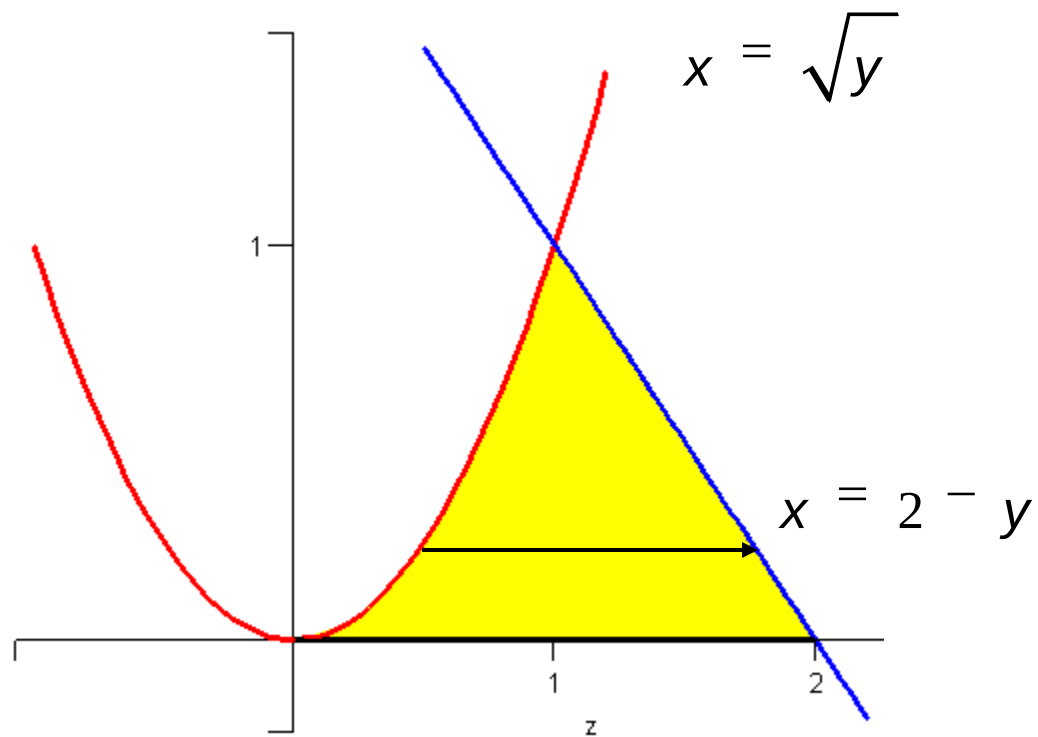
$$1/I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y) dx$$



$$1/I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y) dx$$



$$1/I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y) dx$$



$$\sqrt{y} \xrightarrow{x} 2-y$$

$$0 \xrightarrow{y} 1$$

$$1/I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y) dx$$

