

TÍCH PHÂN BỘI BA

ĐỊNH NGHĨA

Cho Ω đóng và bị chặn trong R_3 . Hàm $f(x,y,z)$ xác định trong Ω .

Phân hoạch Ω thành những miền con Ω_k với thể tích $V(\Omega_k)$, d là đường kính phân hoạch. Trên mỗi miền con, lấy điểm M_k tùy ý, gọi tổng tích phân là

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) V(\Omega_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) V(\Omega_k)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{d \rightarrow 0} S_n$$

gọi là tp bội ba của f trên Ω .

Tính chất hàm khả tích

Cho Ω là miền đóng và bị chặn

$$1 / V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz \quad (\text{thể tích } \Omega)$$

$$2 / \iiint_{\Omega} c \cdot f = c \cdot \iiint_{\Omega} f, \quad \iiint_{\Omega} (f + g) = \iiint_{\Omega} f + \iiint_{\Omega} g$$

$$3 / \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \text{ và } \Omega_2 \text{ không dẫn nhau}$$

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iiint_{\Omega_1} f + \iiint_{\Omega_2} f$$

Cách tính tích phân bội ba

- Giả sử Ω là vật thể hình trụ được giới hạn trên bởi mặt cong $z = z_2(x, y)$, mặt dưới là $z = z_1(x, y)$, bao xung quanh là mặt trụ có đường sinh // Oz và đường chuẩn là biên của miền D đóng và bị chặn trong Oxy.
- Hình chiếu của Ω lên Oxy là D.

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Lưu ý về cách xác định biến tính trước và miền D

1. Biến tính trước được chọn tương ứng với biến chỉ xuất hiện **2 lần** trong định nghĩa Ω .
2. Hình chiếu **D** xác định như khi tính thể tích.

VÍ DỤ

$$1/ \text{ Tính: } I = \iiint_{\Omega} y dx dy dz$$

Ω Là miền gạn bởi : $y = x^2, z + y = 1, z = 0$

Cách 1: z xuất hiện 2 lần, biến tính trước là z
(z_1, z_2 là 1 trong 2 hàm $z = 1 - y, z = 0$).

$$D_{Oxy} = \text{h.c. } \Omega : y = x^2, 1 - y = 0$$

$$D : y = x^2, 1 - y = 0$$

$$z = 1 - y, z = 0$$

$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz$$

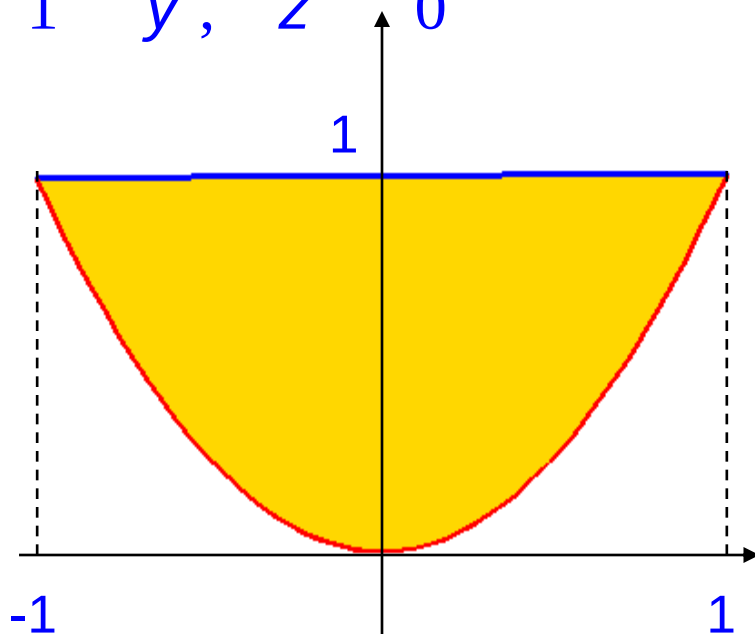
Ω

$$= \iint_D \left(\int_0^{1-y} y dz \right) dx dy$$

$$= \iint_D y (1 - y) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 y (1 - y) dy$$

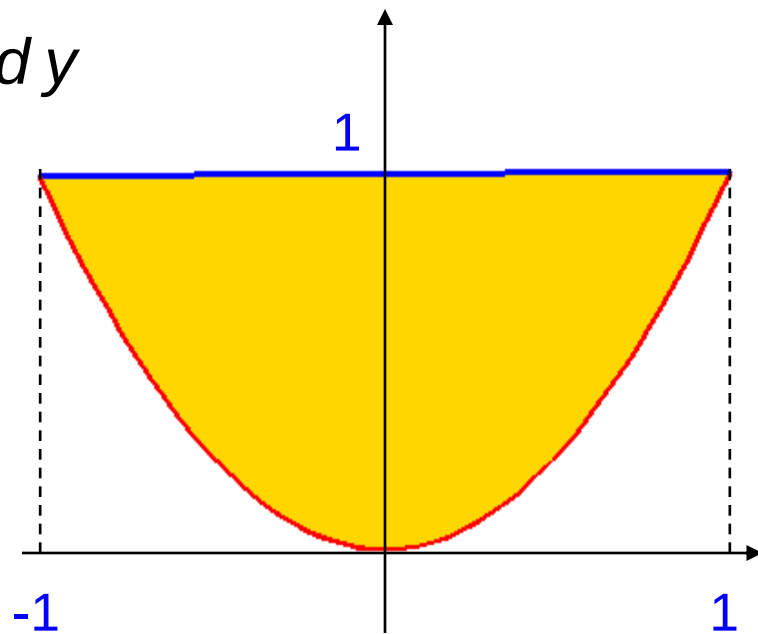
$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{8}{35}$$



Lưu ý: có thể viết dưới dạng tp lặp

$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{1-y} y dz \right) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{1-y} y dz$$



$$\Omega : y = x^2, z + y = 1, z = 0$$

Cách 2: y xuất hiện 2 lần, biến tính trước là y

$$y = x^2, y = 1 - z$$

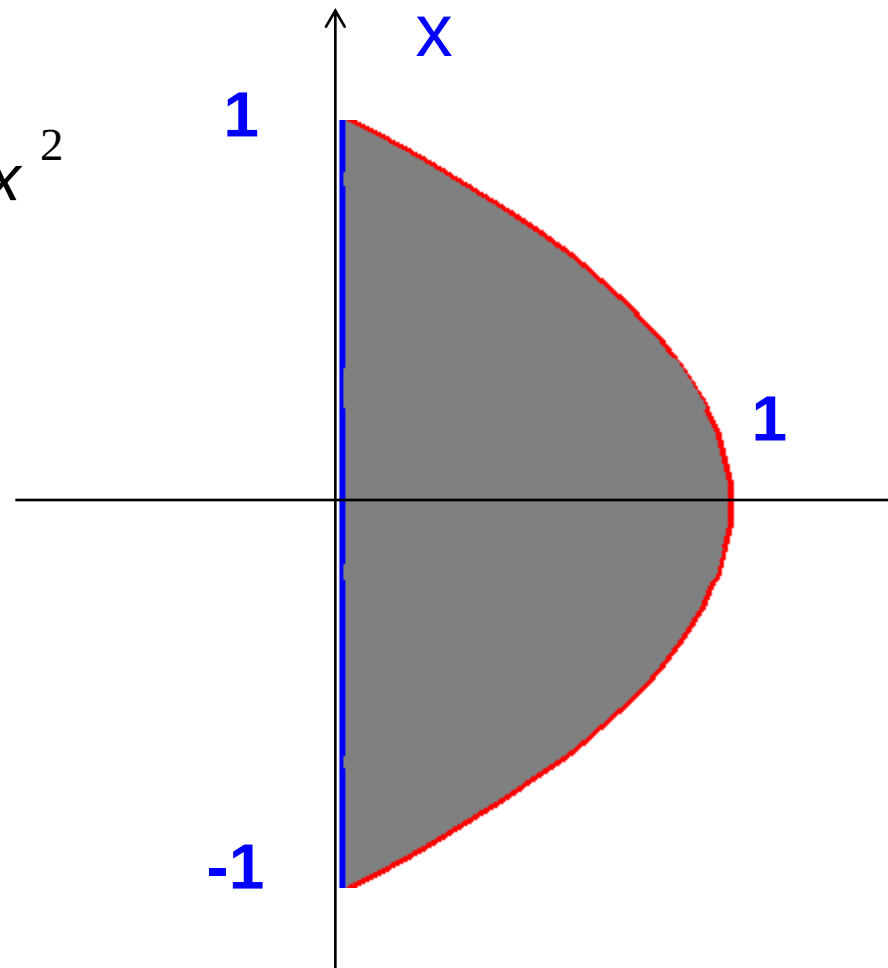
$$D = \text{h.c. } \Omega : z = 0, 1 - z = x^2$$

Oxz

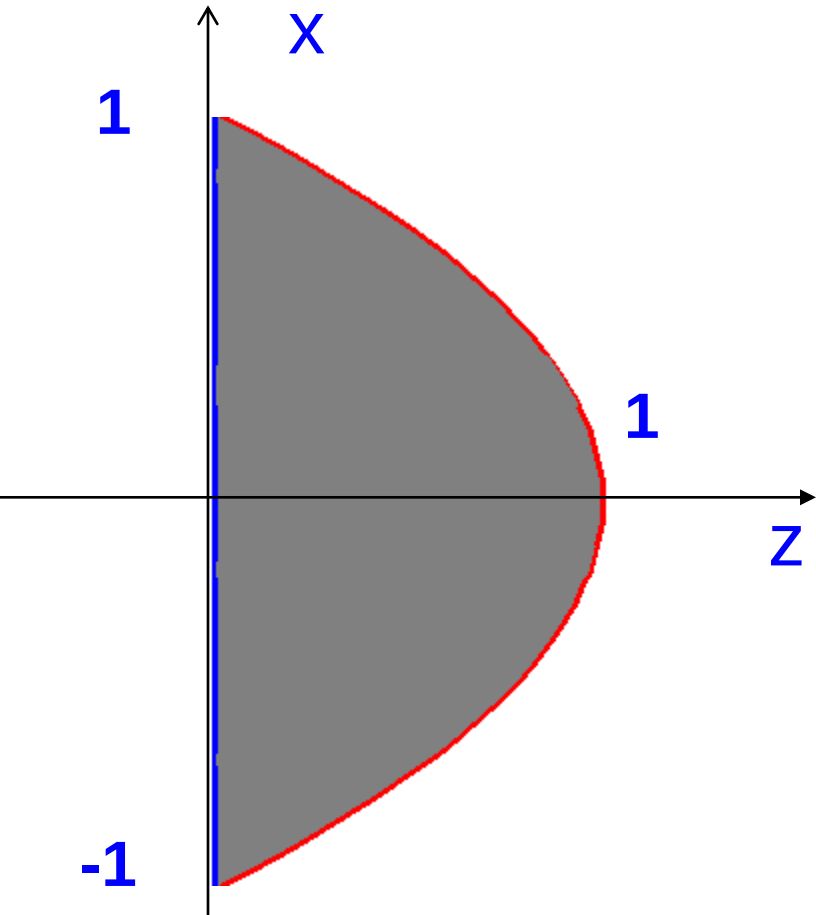
$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz$$

Ω

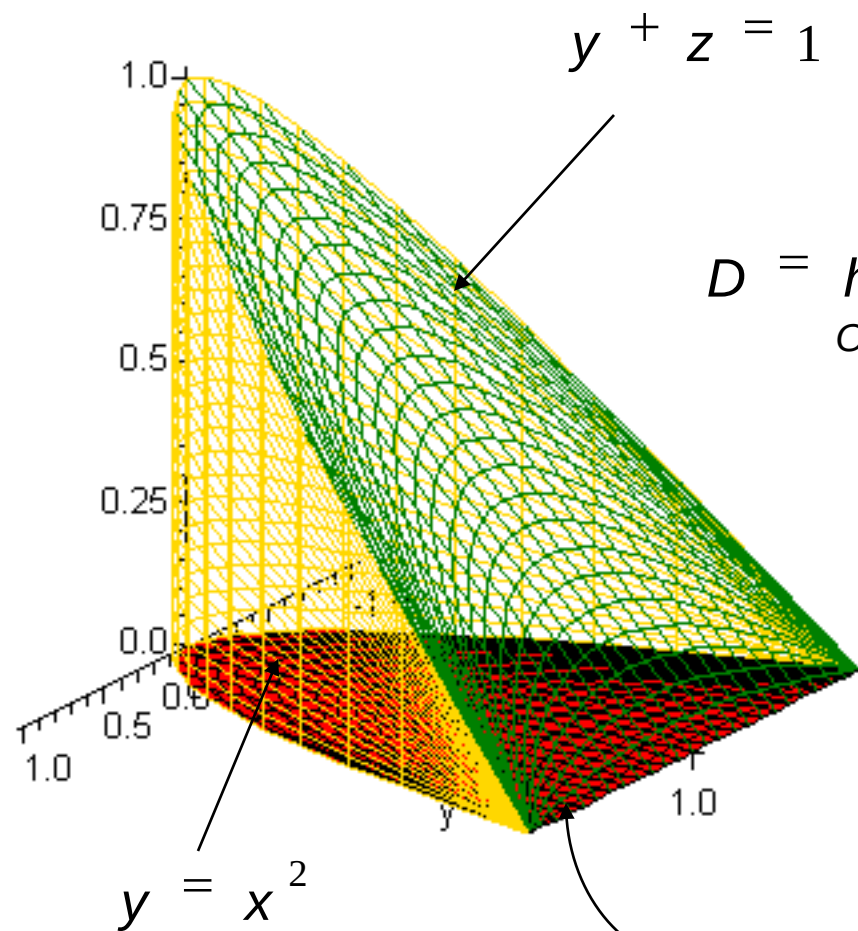
$$= \iint_D \left(\int_{x^2}^{1-z} y dy \right) dx dz$$



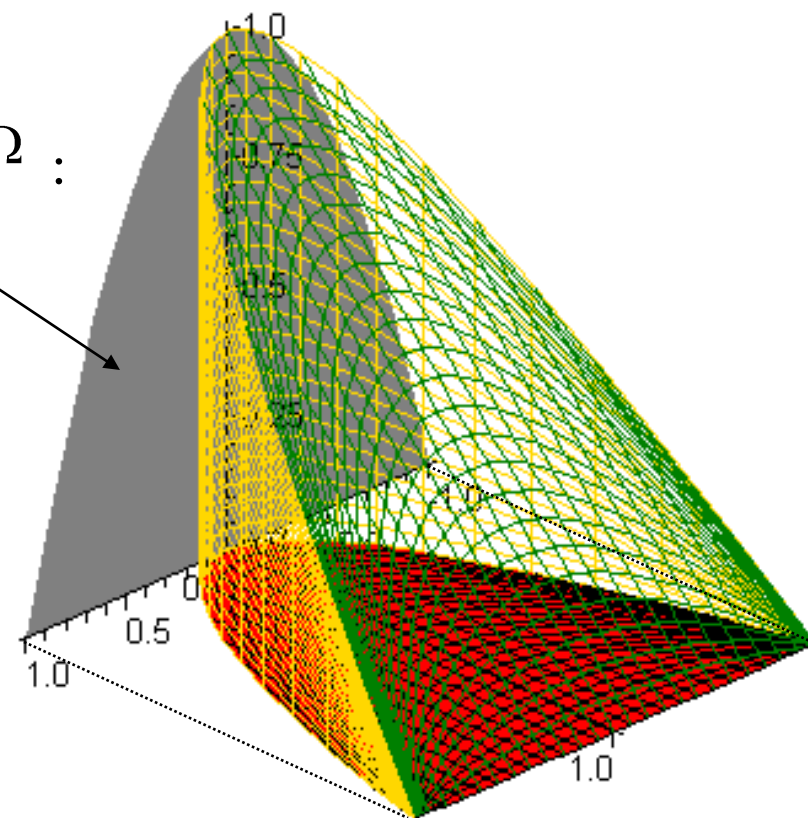
$$\iint_D \left(\int_{x^2}^{1-z} y \, dy \right) dx \, dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} (1-z)^2 - x^4 \, dz$$



$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2x^6}{3} - x^4 \right) dx = \frac{8}{35}$$



$$D = hc \Omega : O_{xz}$$



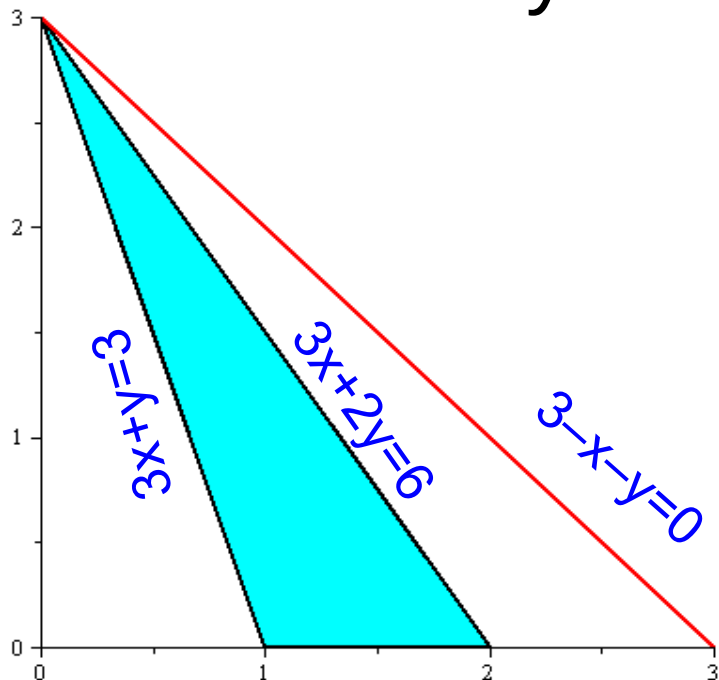
$$D = hc \Omega : O_{xy}$$

2/ Tính: $I = \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz$, Ω gh bởi:

$$x + y + z = 3, 3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0, z = 0$$

z xuất hiện 2 lần, biến tính trước là z :

$$z = 3 - y - x \text{ và } z = 0$$

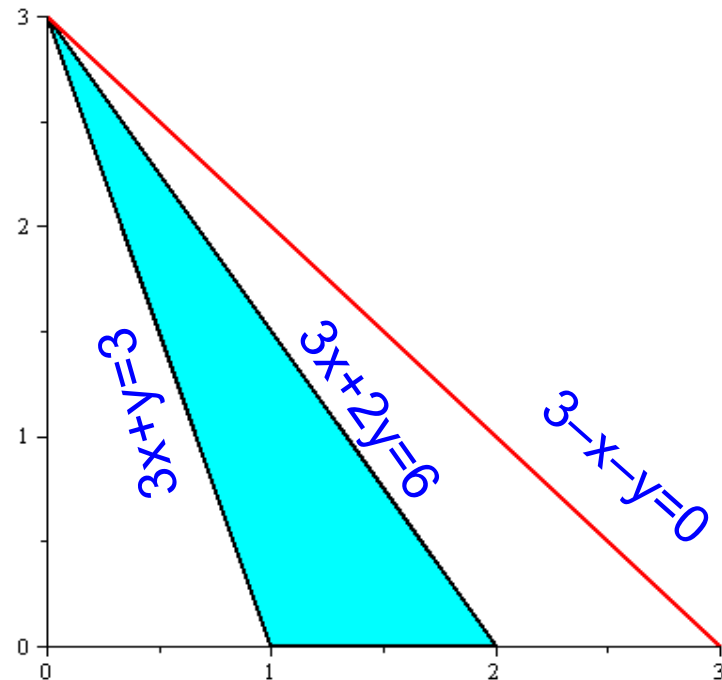


$$D = \text{h.c. } \Omega : \\ Oxy$$

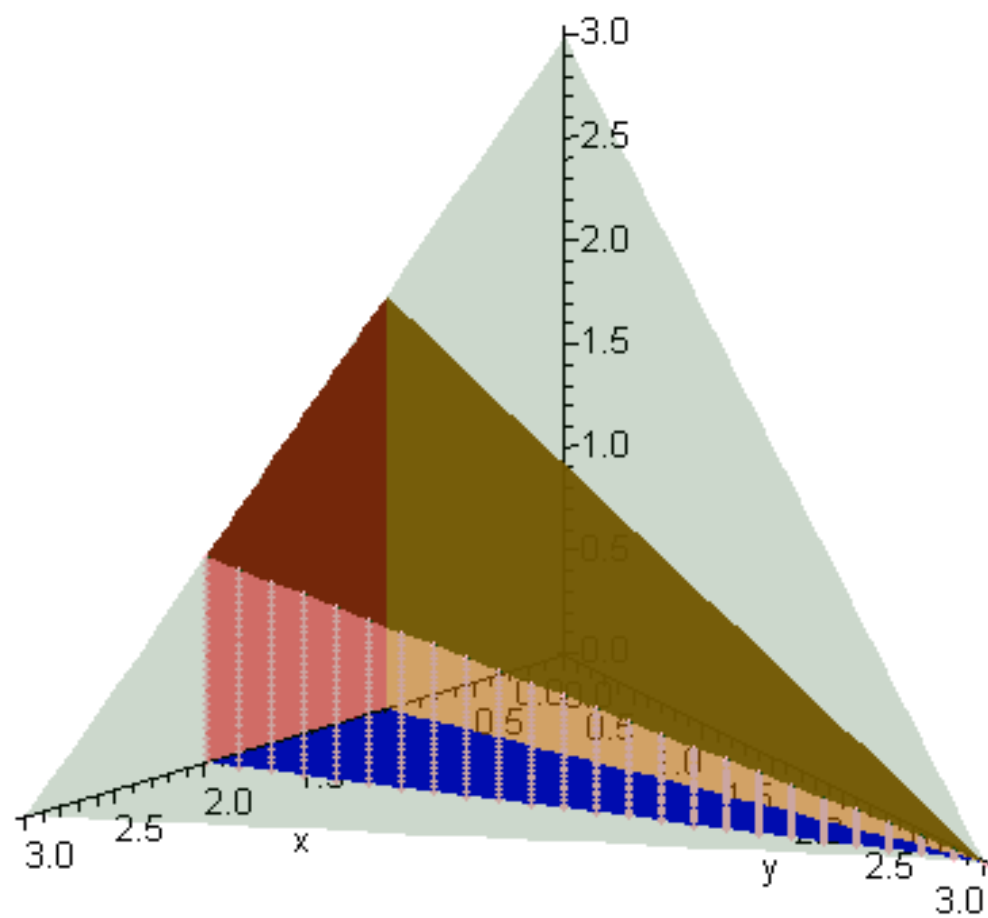
$$3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0, \\ (3 - x - y = 0)$$

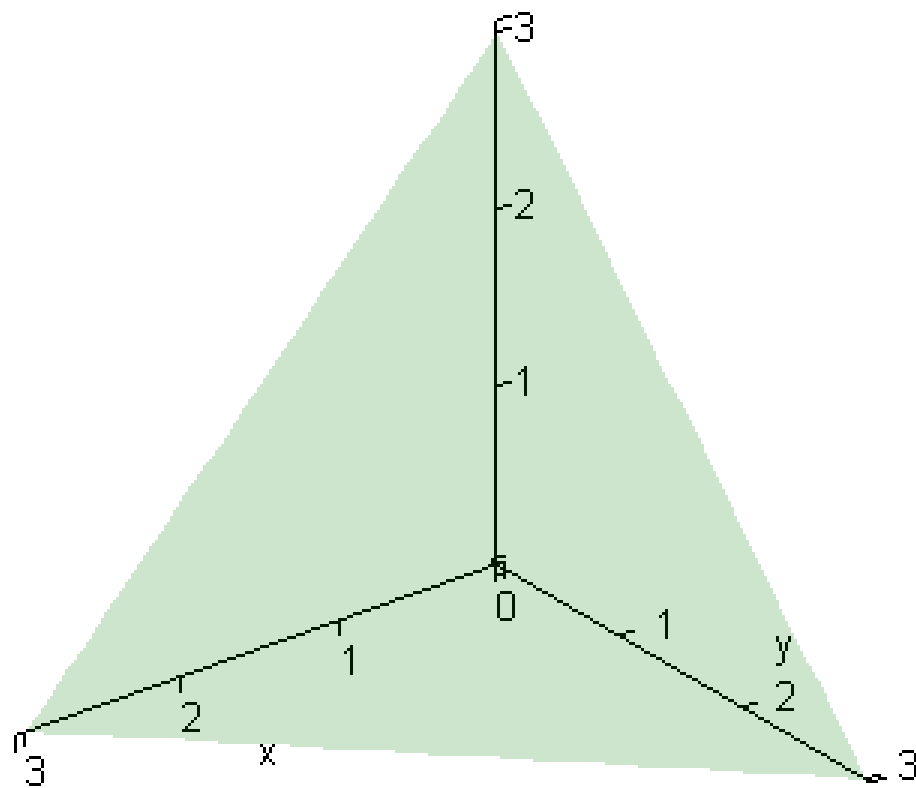
$$I = \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz,$$

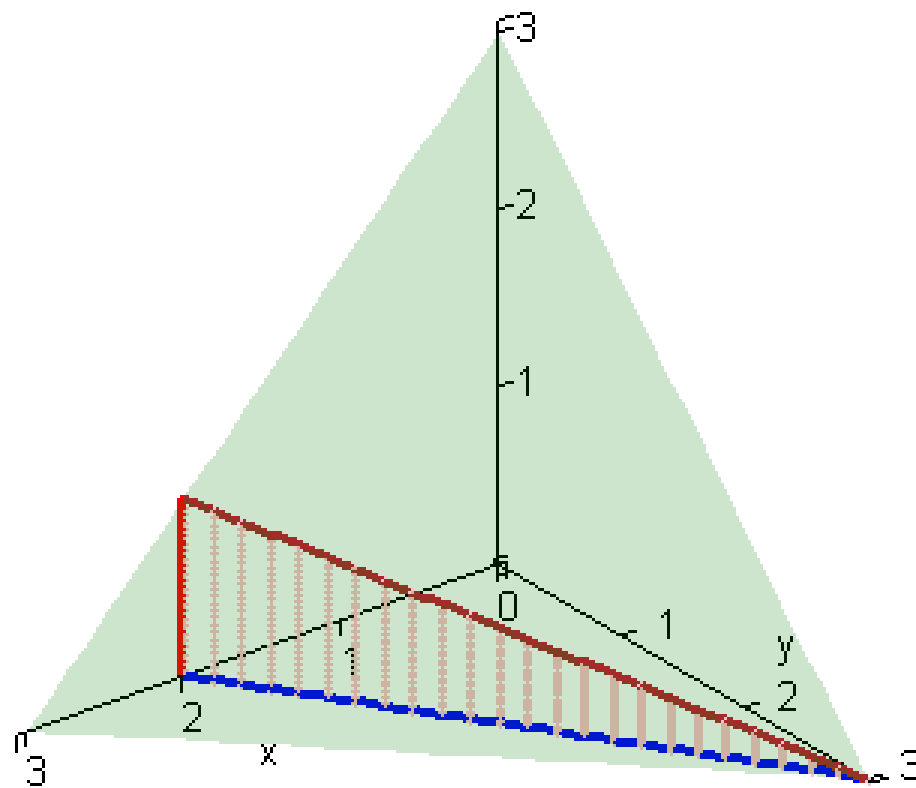
$$= \iint_D \left(\int_0^{3-x-y} (x + y) dz \right) dx dy$$

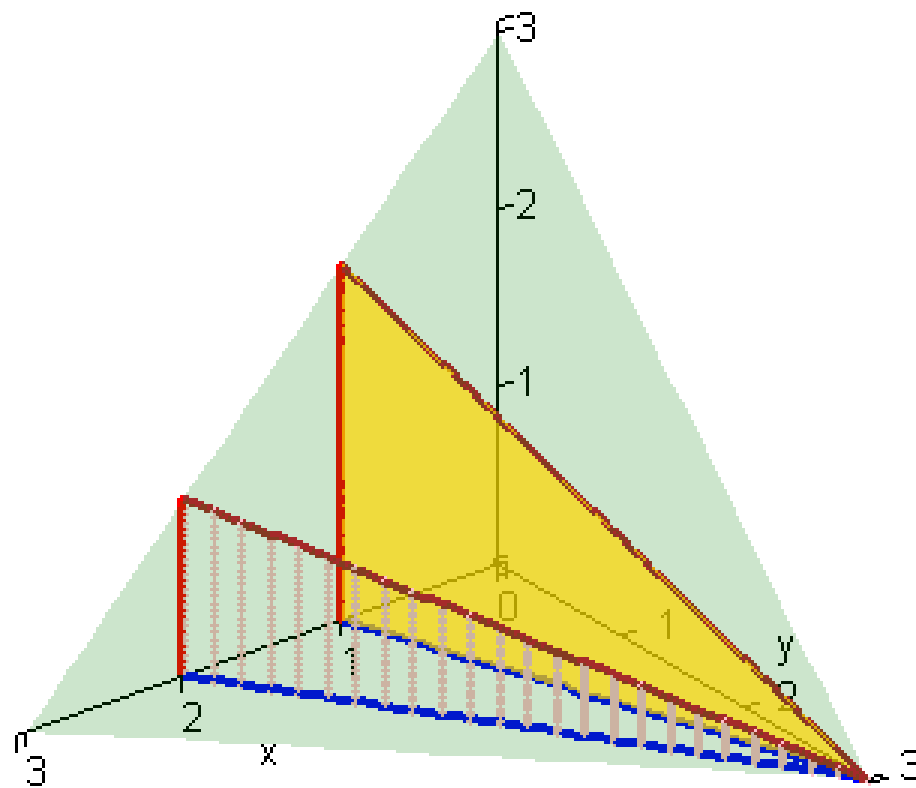


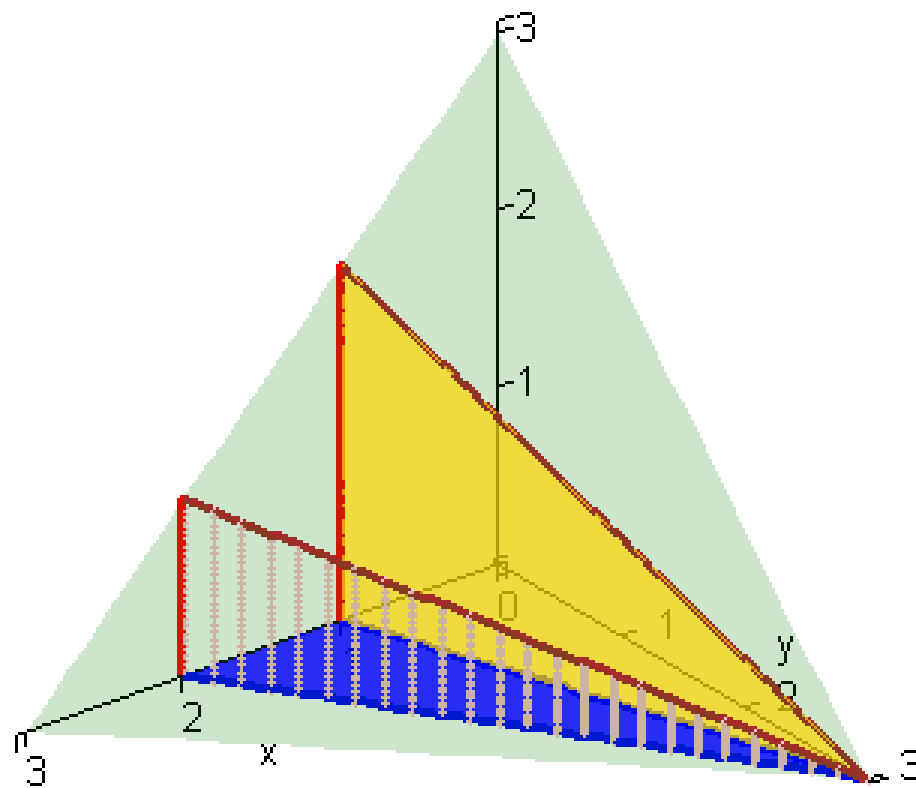
$$= \int_0^3 dy \int_{1-\frac{y}{3}}^{2-\frac{2y}{3}} (x + y)(3 - x - y) dx = \frac{11}{4}$$

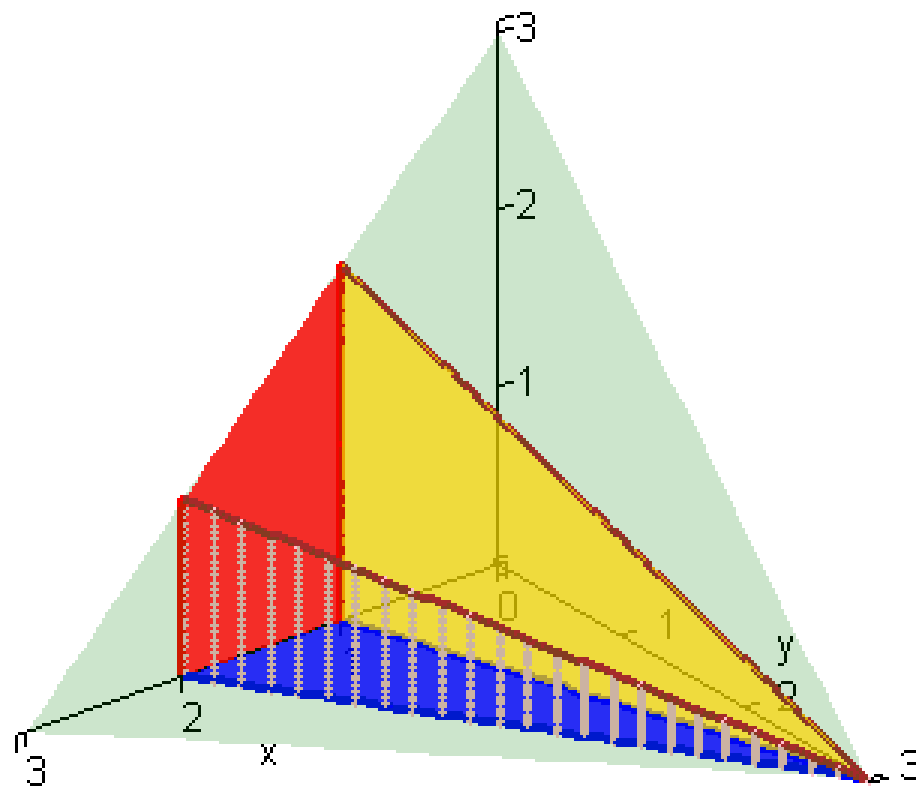


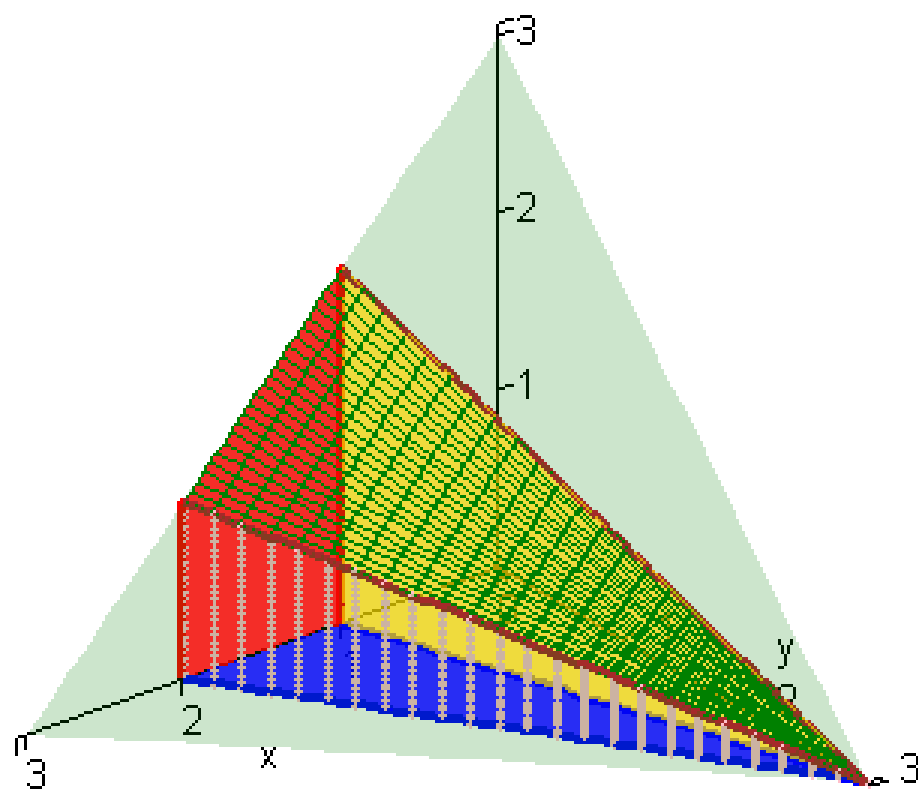












3/ Vẽ miền lấy tp cho tp sau:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} dy \int_0^4 z dz$$

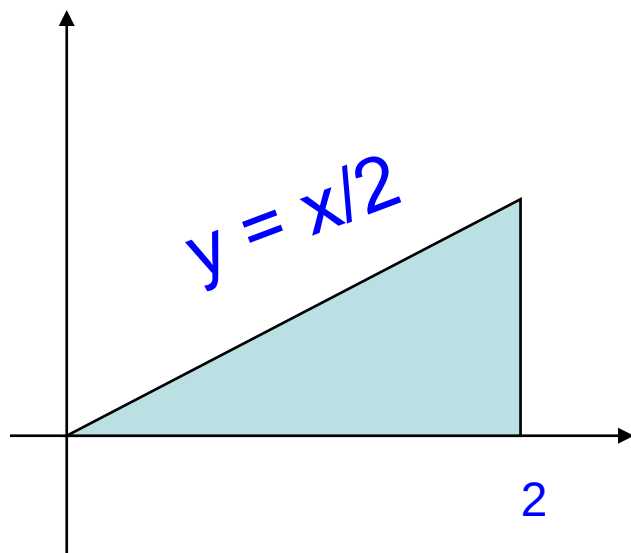
sau đó viết lại I theo thứ tự : $I = \int dy \int dz \int z dx$

Mặt trên: $z = 4$, mặt dưới: $z = 0$ (các hàm xác định trên R_2 và 2 mặt không có giao tuyến)

Hình chiếu lên Oxy của miền : $0 \leq x \leq 2$,
 $0 \leq y \leq x/2$

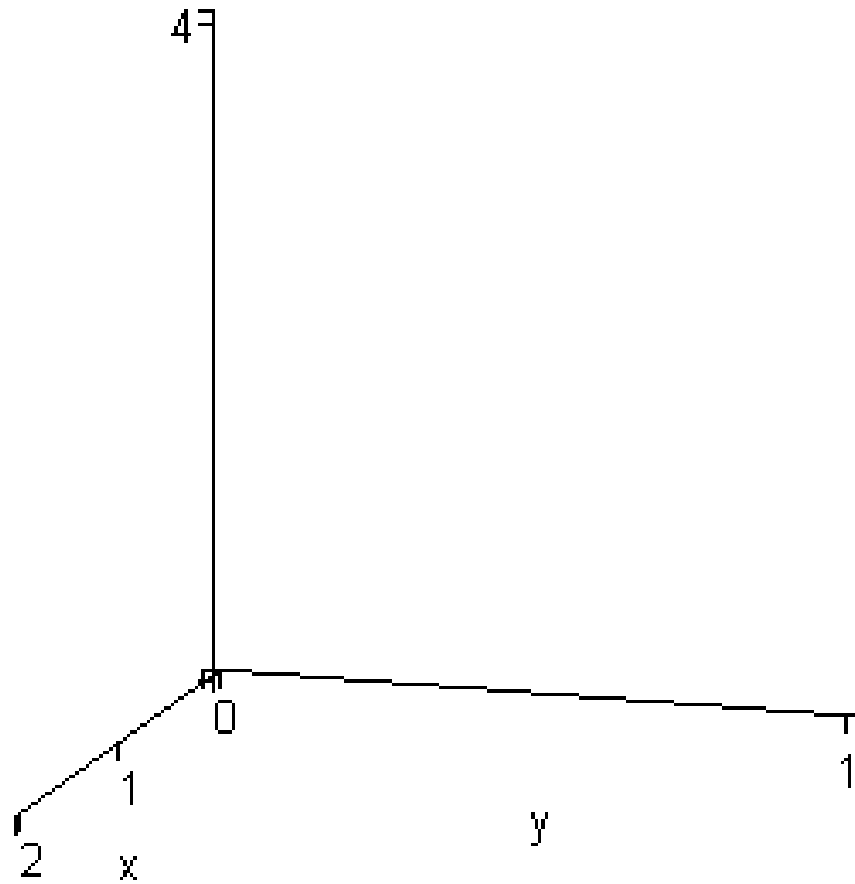
Hình chiếu lên Oxy của miền : $0 \leq x \leq 2$,
 $0 \leq y \leq x/2$

Vậy miền lấy tp gh bởi các
mặt sau:

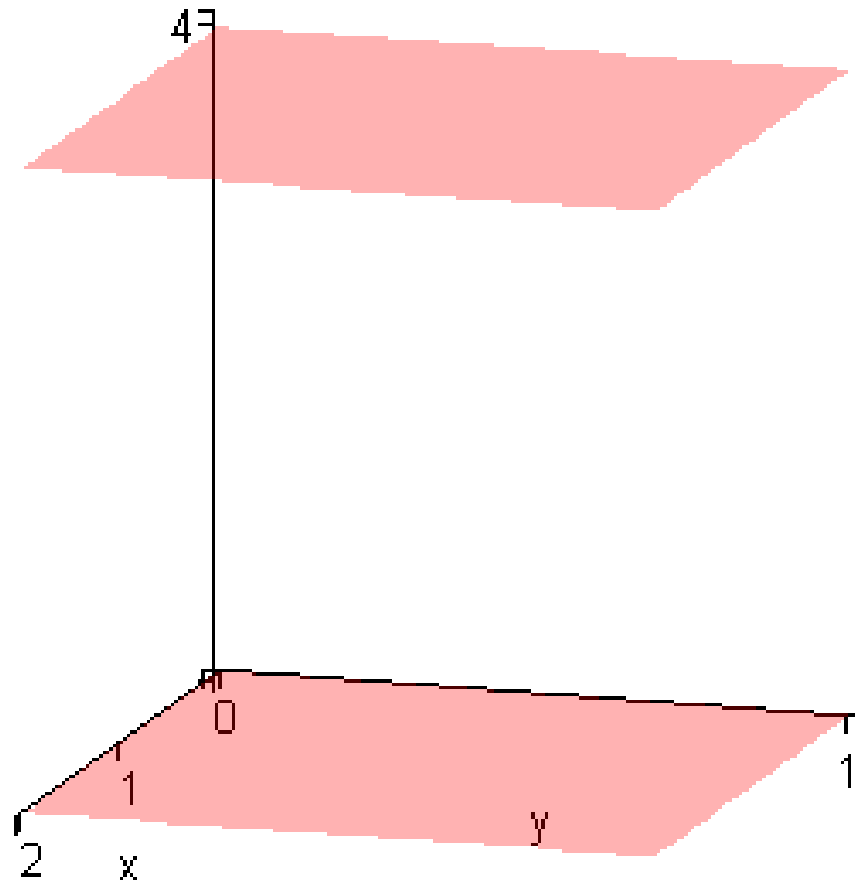


$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, \\ y = 0$$

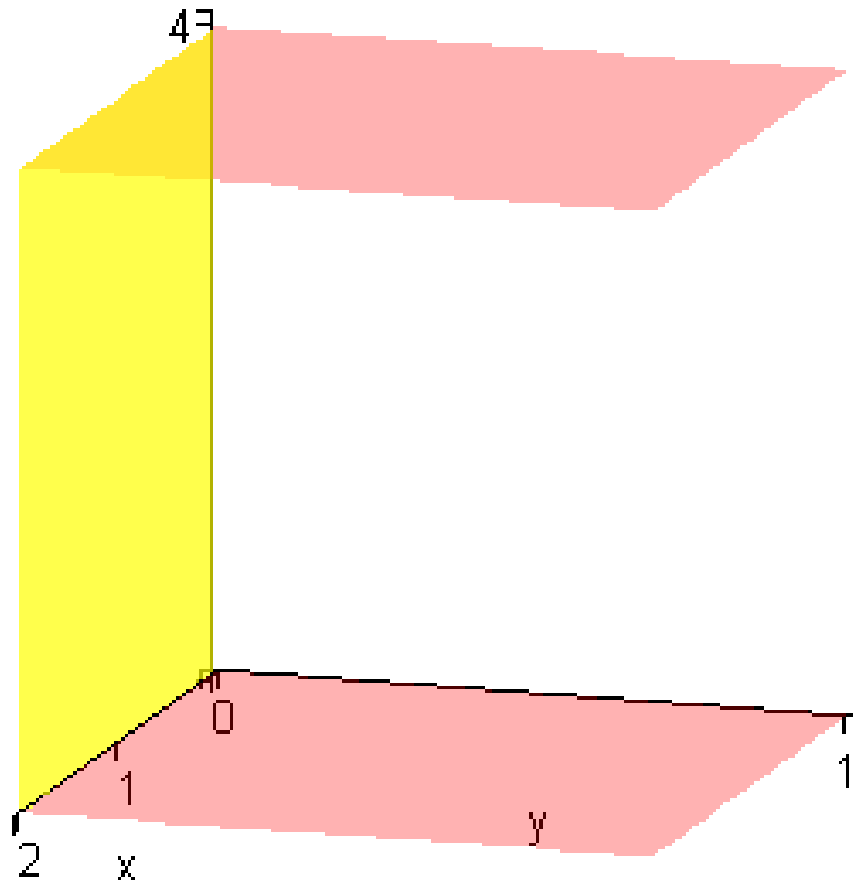
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



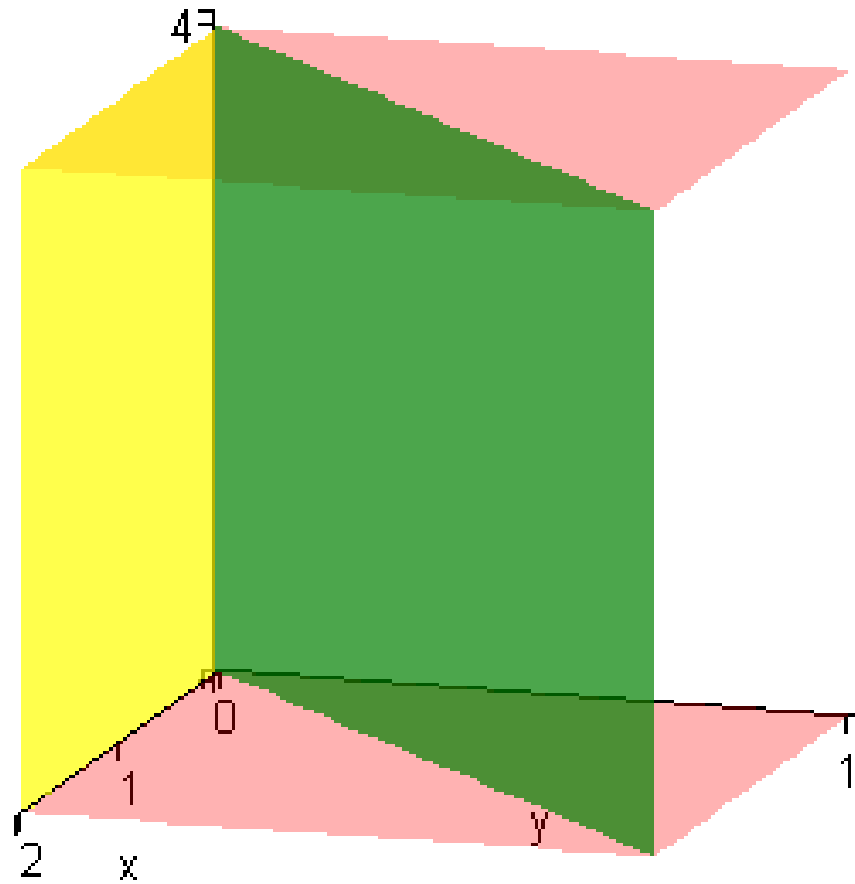
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



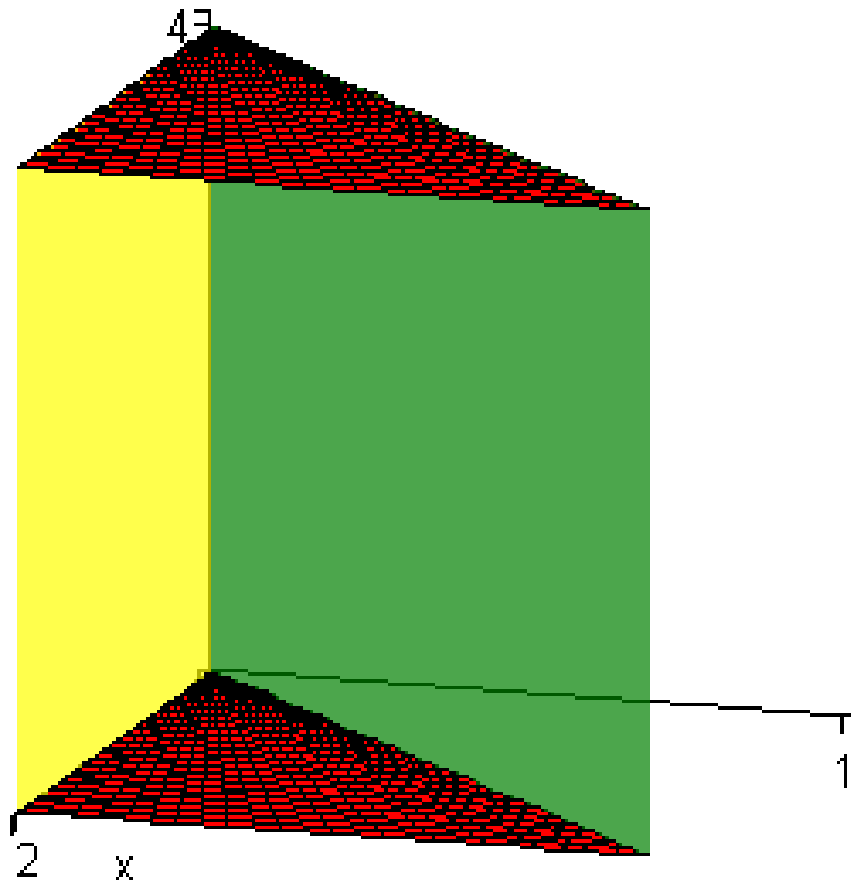
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



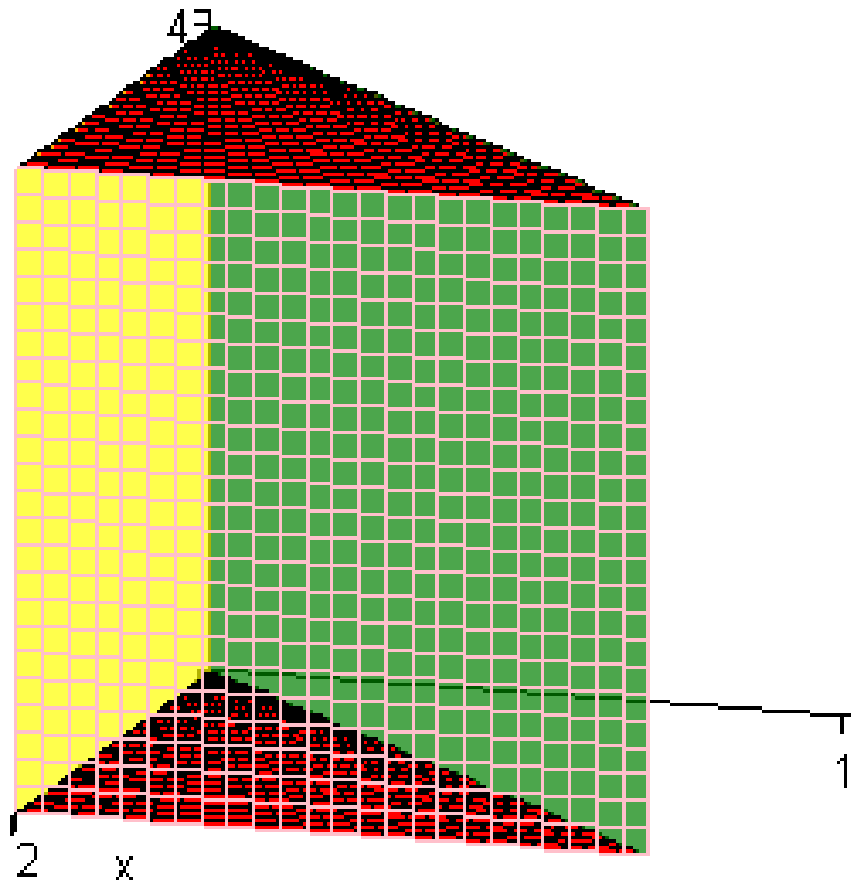
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$



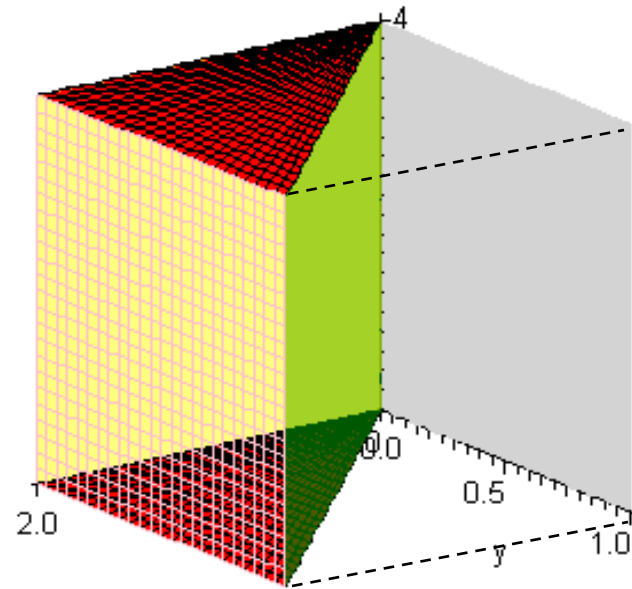
$$z = 0, z = 4, x = 2y, x = 2, y = 0$$

$$I = \int dy \int dz \int z dx$$

$$D = \int_{Oyz} \Omega :$$

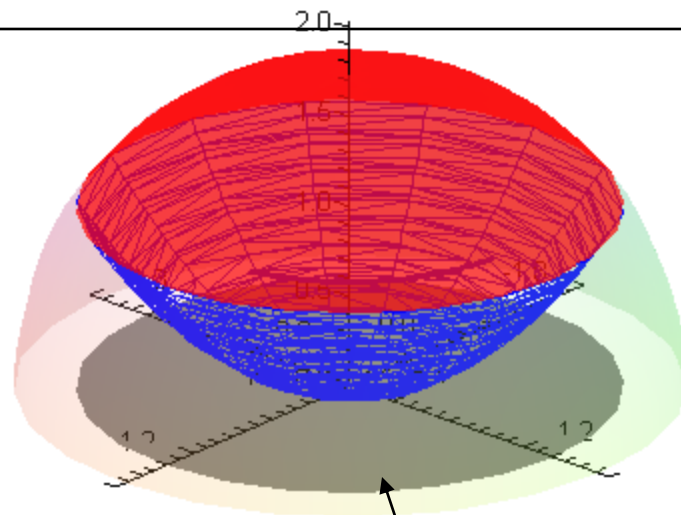
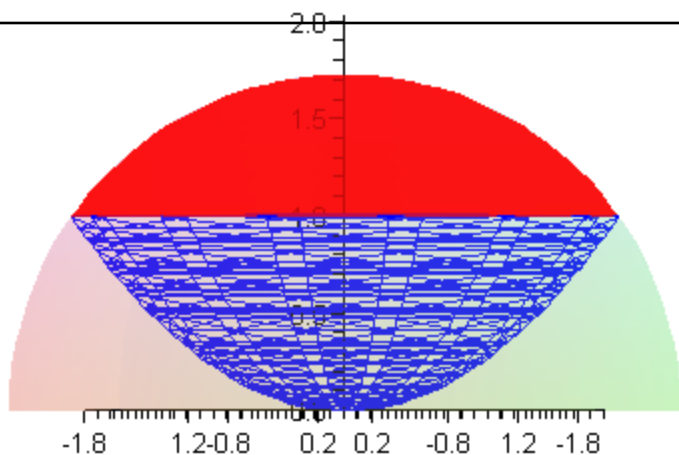
$$y = 0, y = 1, z = 0, z = 4$$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^4 dz \int_{2y}^2 z dx$$



3/ Tính: $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz,$

$\Omega: x^2 + y^2 \leq 2z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$



Ω Là miền nằm trong paraboloid.

$$D = \text{h.c. } \Omega : x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$$

Mặt trên: $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ Mặt dưới: $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$

$$I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$$

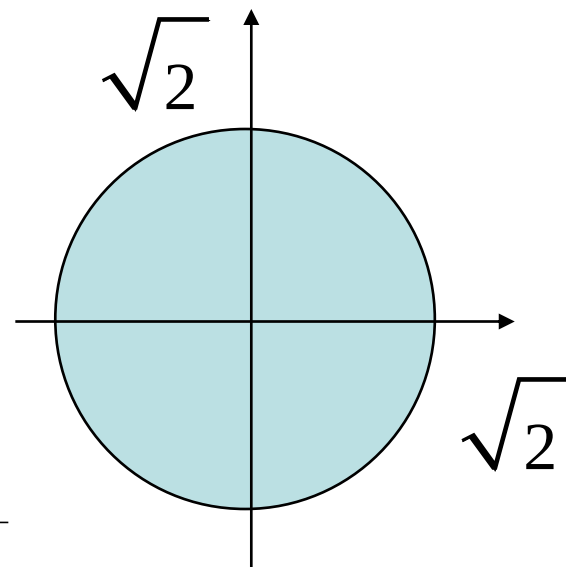
$$= \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 2 \\ (D)}} \left(\int_{\frac{x^2 + y^2}{2}}^{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} z \, dz \right)$$

$$= \iint_D \frac{1}{2} \left[\sqrt{3 - x^2 - y^2}^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 \right] dx \, dy$$

$$\iint_D \frac{1}{2} \left[\sqrt{3 - x^2 - y^2}^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 \right] dx dy$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

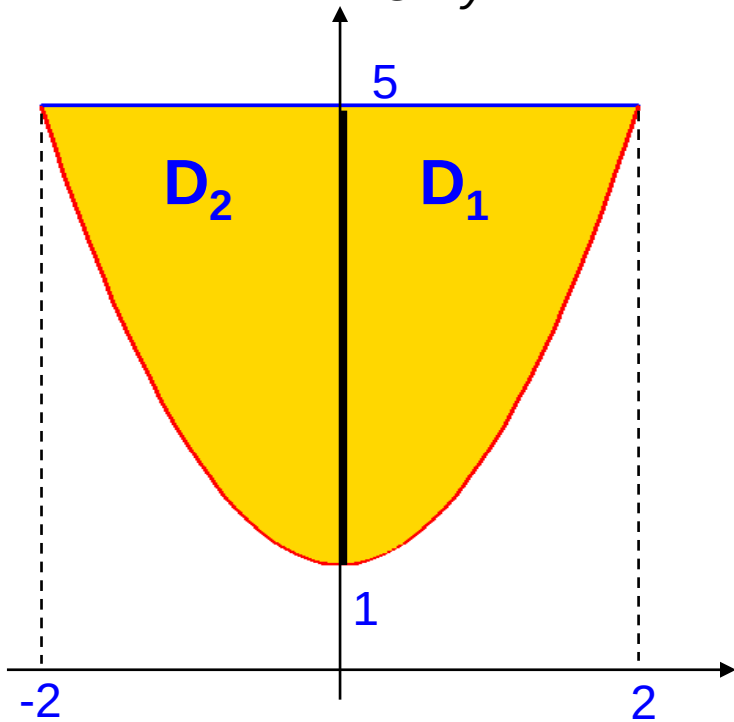
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - r^2 - \frac{r^4}{4} \right) r dr = \frac{5\pi}{3}$$



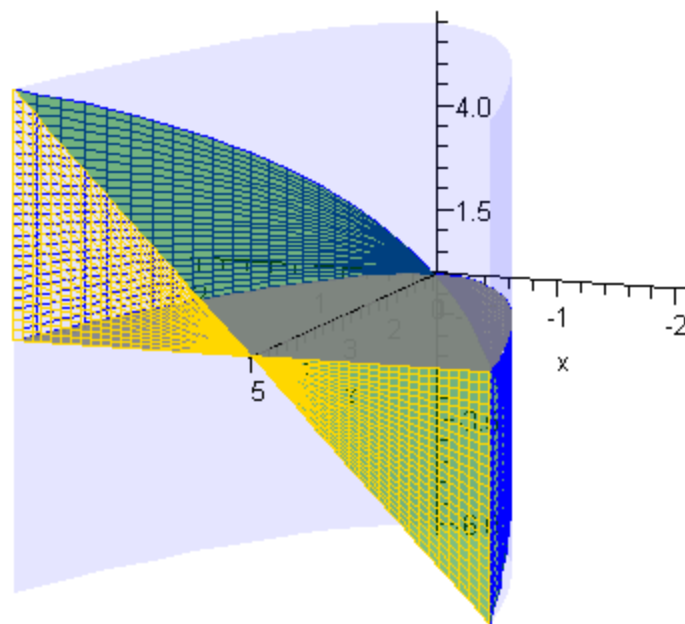
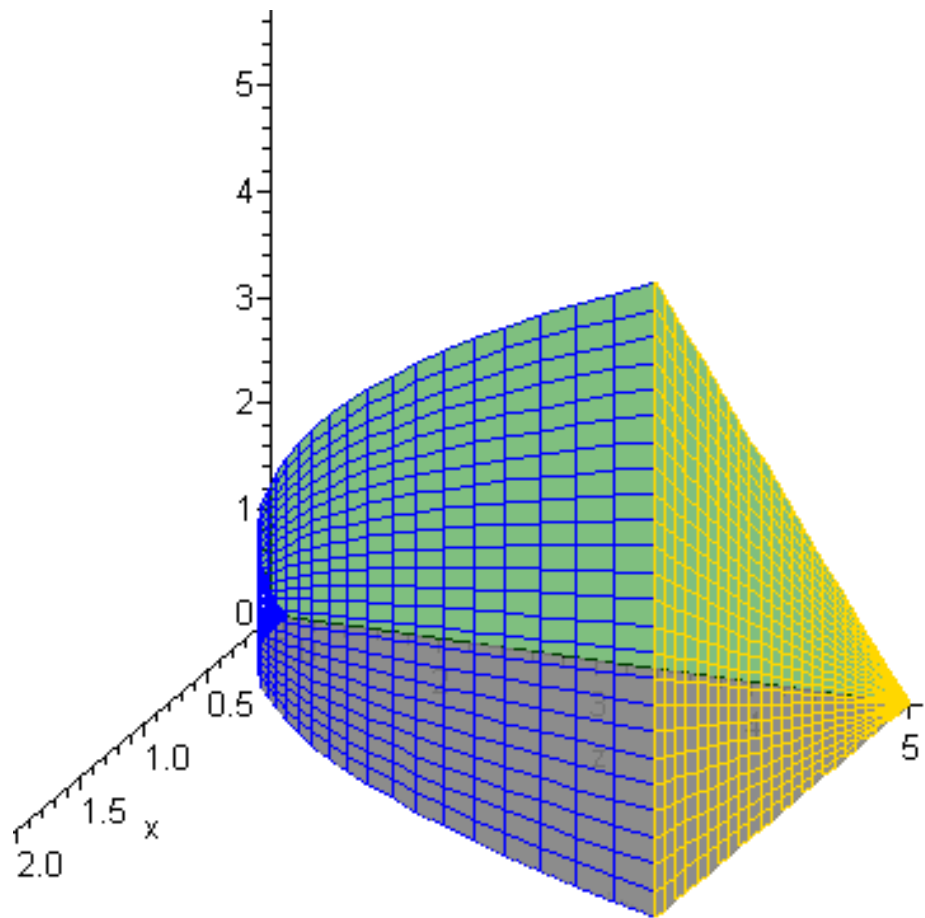
4/ Tính: $I = \iiint_{\Omega} x dx dy dz,$

$\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$

$D = \text{h.c. } \Omega : y = 1 + x^2, y = 5, (3x = 0)$



$$I = \iint_{D_1} \left(\int_0^{3x} x dz \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(\int_{3x}^0 x dz \right) dx dy$$



$$\Omega: y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$$

