

CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

0: MỘT SỐ MẶT BẠC HAI THƯỜNG GẶP

1: TÍCH PHÂN KÉP

- I. Định nghĩa và Cách tính
- II. Đổi biến trong tích phân kép
- III. Ứng dụng hình học của tích phân kép

2: TÍCH PHÂN BỘI BA

- I. Định nghĩa và Cách tính
- II. Đổi biến trong tích phân bội ba
- III. Ứng dụng hình học của tích phân bội ba

0. Một số mặt bậc hai thường gặp

I. Mặt Ellipsoid:

1. Phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

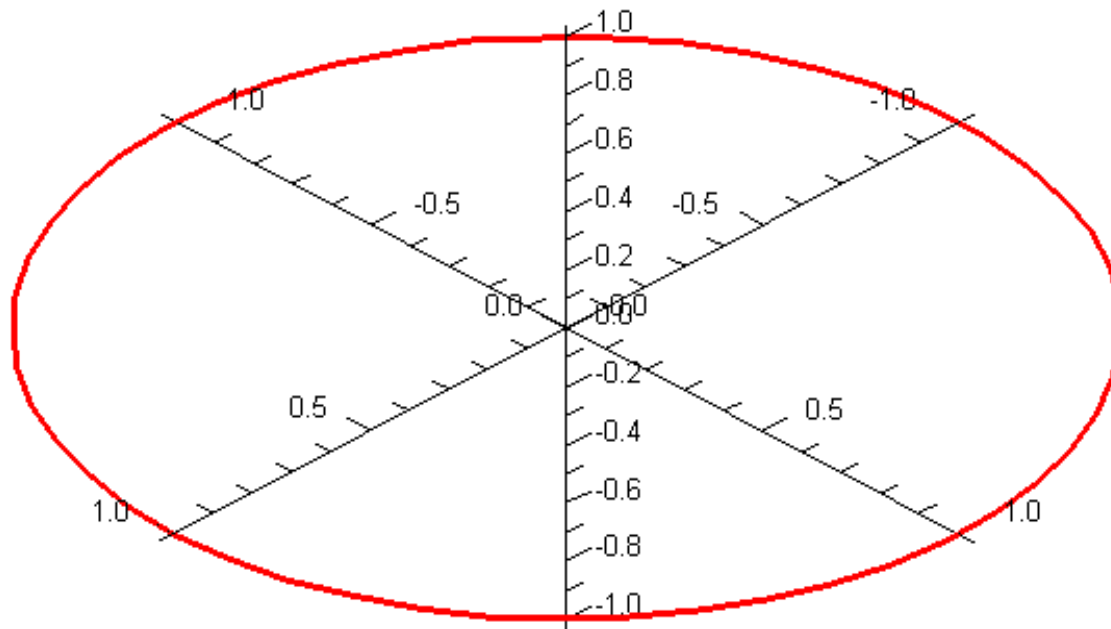
2. Cách gọi tên mặt:

Với phương trình trên, ta cho $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ta đều nhận được giao tuyến của mặt với 3 mặt tọa độ là các đường Ellipse. Tức là nếu cả *3 giao tuyến của mặt S với 3 mặt tọa độ* hoặc các mặt song song với các mặt tọa độ *đều là ellipse thì ta sẽ gọi mặt S là mặt Ellipsoid*

3. Cách vẽ hình

Vẽ 3 giao tuyến của S với 3 mặt tọa độ

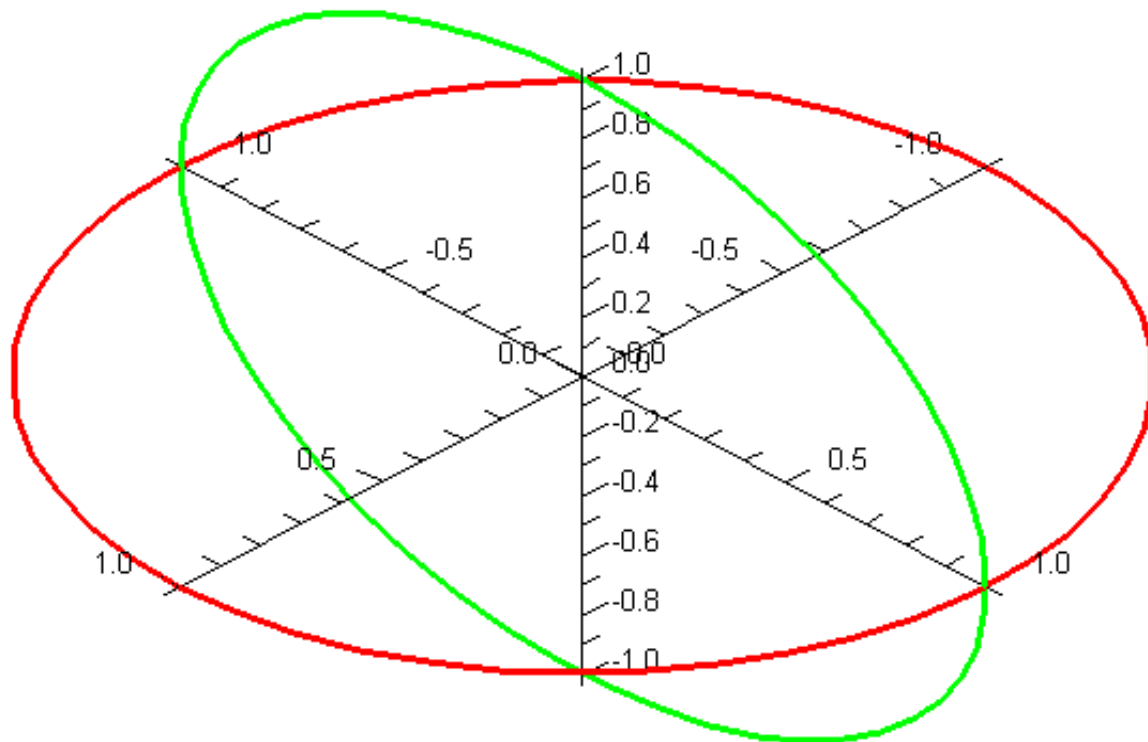
0. Một số mặt bậc hai thường gặp



Vẽ đường
ellipse

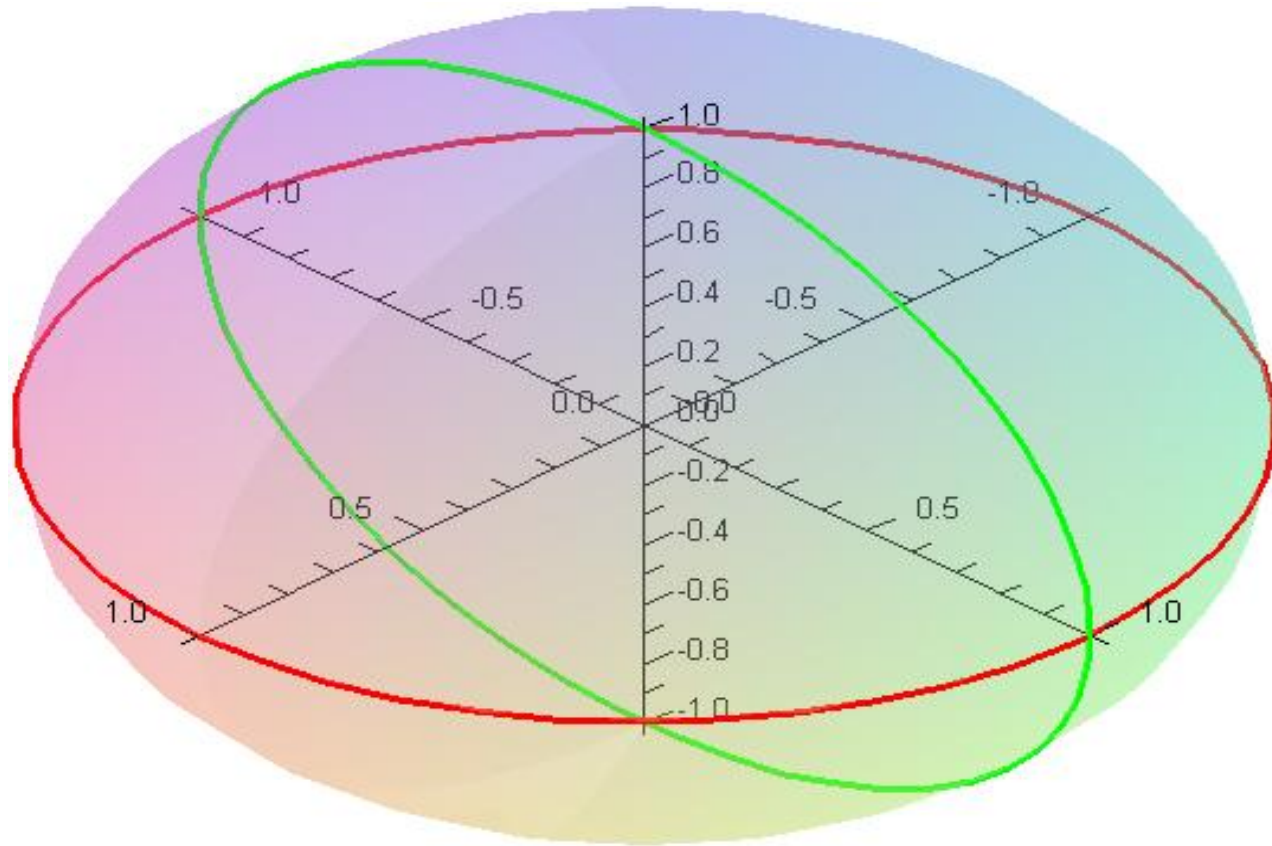
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{trên mặt phẳng nằm ngang } z = 0$$

0. Một số mặt bậc hai thường gặp



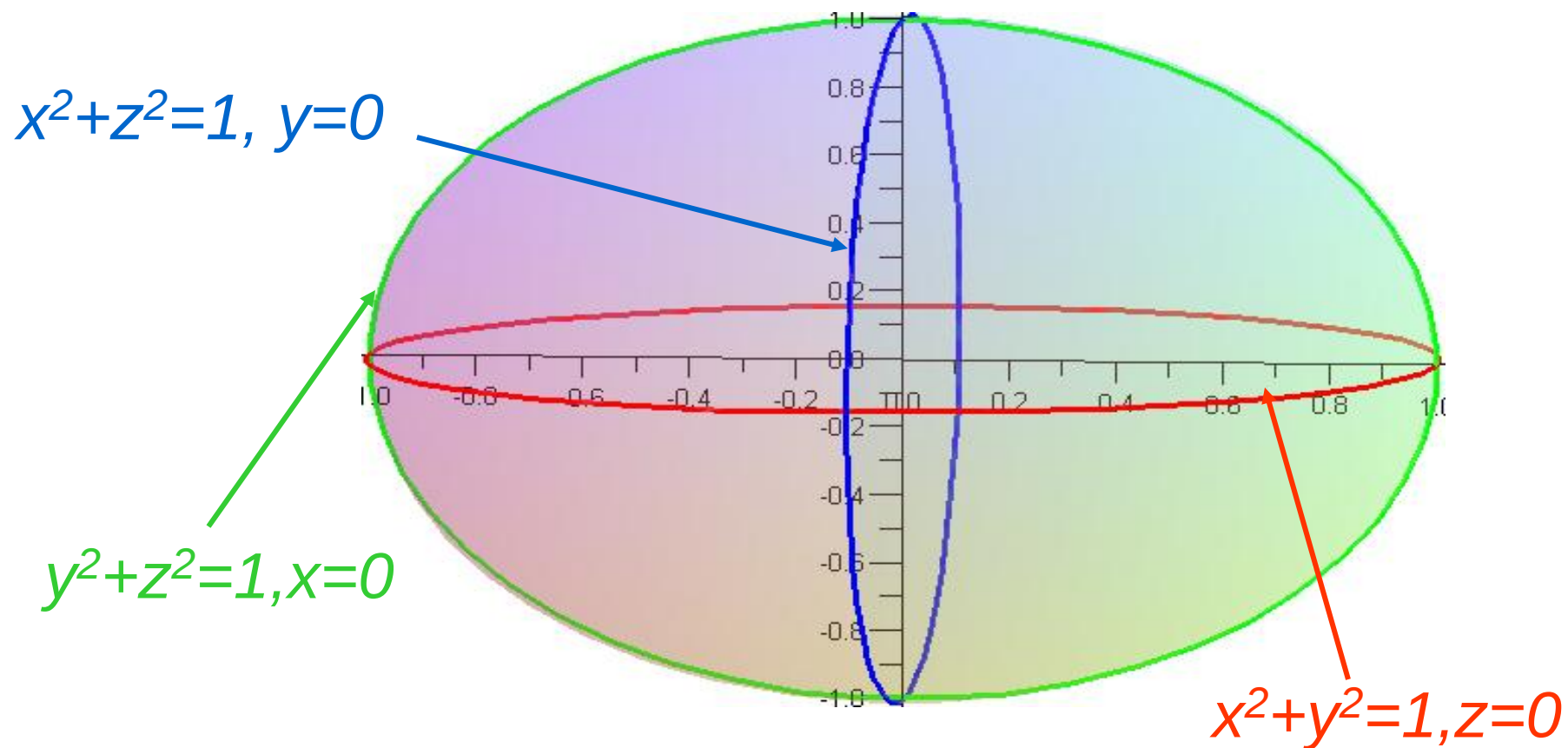
Vẽ thêm đường ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ trên mặt phẳng $x = 0$

0. Một số mặt bậc hai thường gặp



Vẽ mặt ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

0. Một số mặt bậc hai thường gặp



Có thể vẽ thêm đường ellipse
trên mặt phẳng $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

0. Một số mặt bậc hai thường gặp

II. Mặt Paraboloid Elliptic:

1. Phương trình :

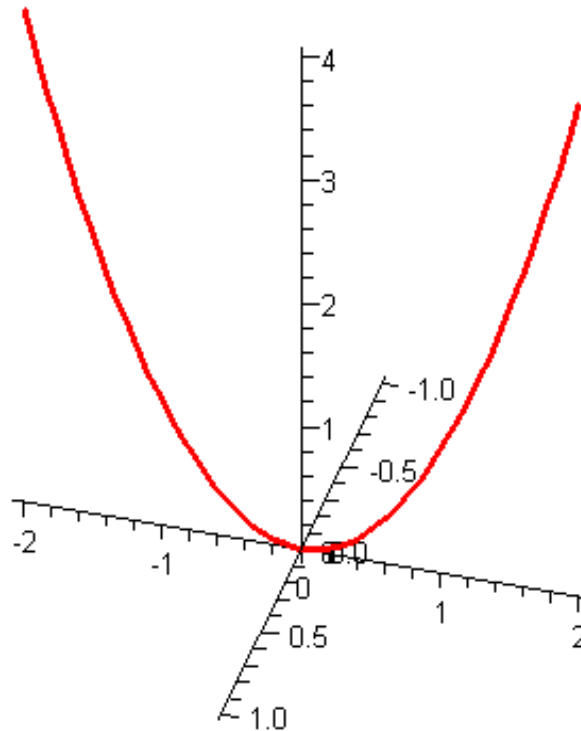
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

2. Cách gọi tên mặt:

Với phương trình trên, ta cho $x = 0, y = 0$ thì được 2 giao tuyến với 2 mặt tọa độ là 2 đường Parabol và cho $z=c, c>0$ ta được đường còn lại là 1 đường Ellipse. Tức là nếu 2 trong 3 giao tuyến với các mặt tọa độ hoặc các mặt song song với các mặt tọa độ là **2 Parabol**, giao tuyến còn lại là **1 Ellipse** thì ta gọi mặt S là **Paraboloid Elliptic**

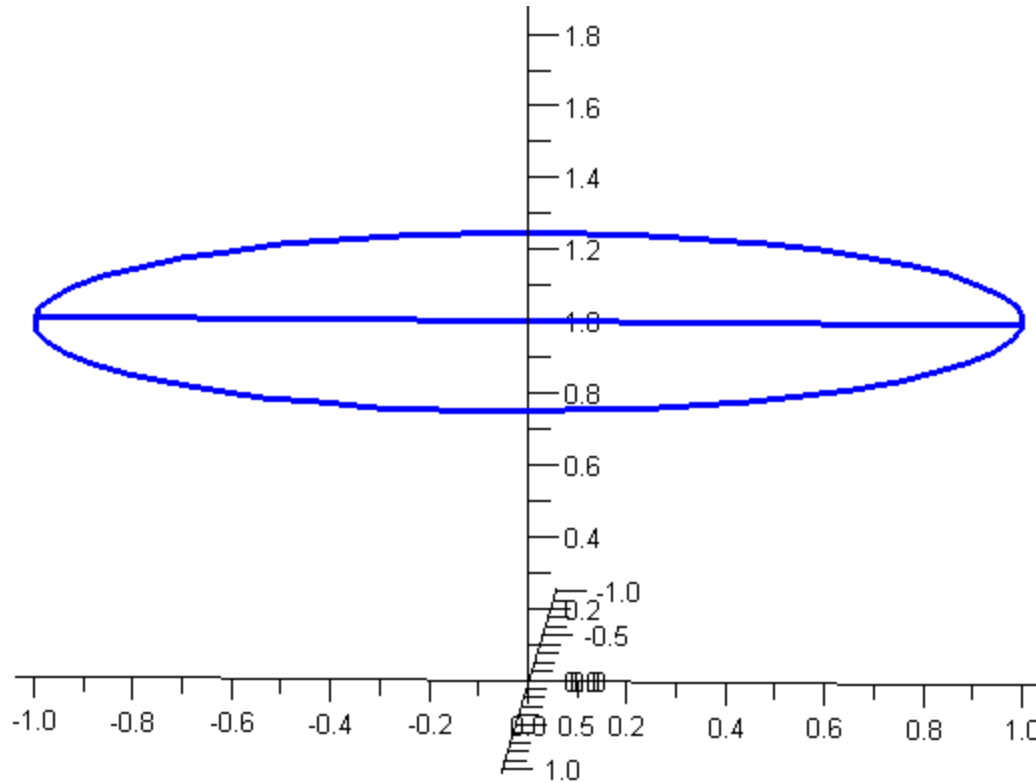
3. Vẽ hình

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP



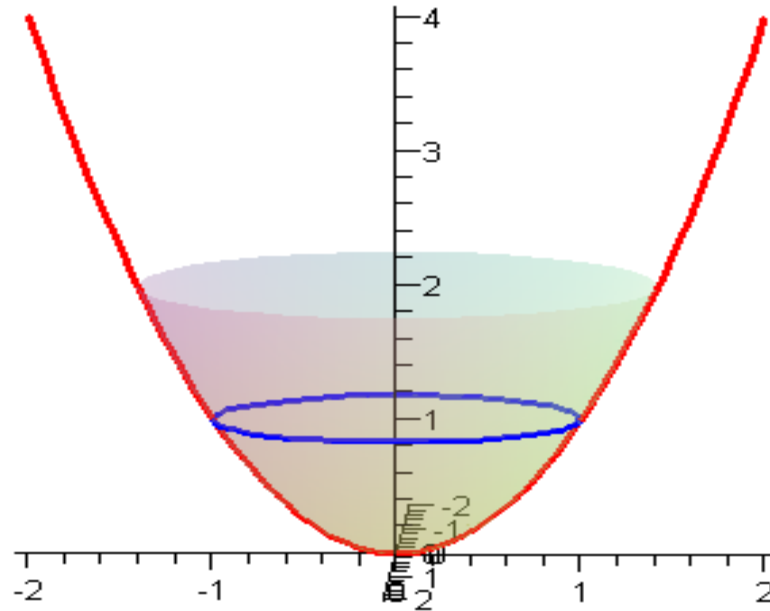
Vẽ đường parabol $y^2 = z$ trên mặt phẳng $x = 0$

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP



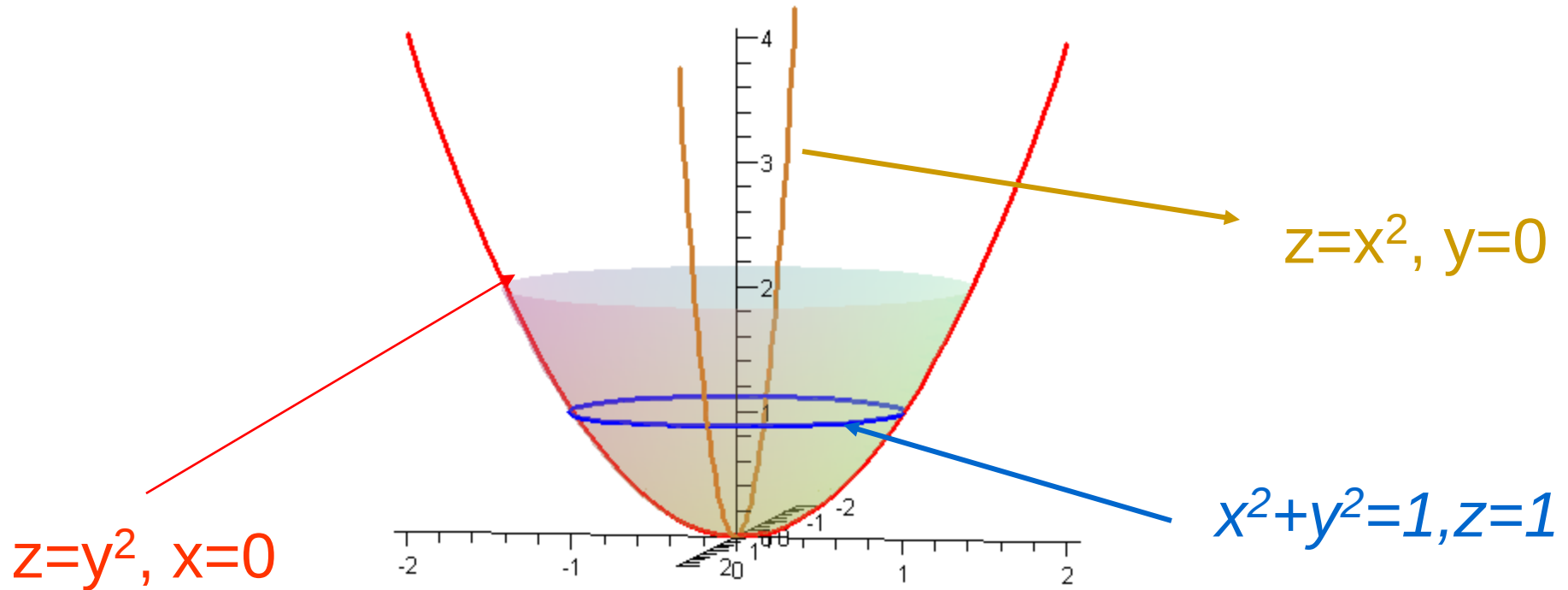
Vẽ đường ellipse $x^2+y^2 = 1$ trên mặt phẳng $z = 1$

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP



Vẽ mặt paraboloid $x^2 + y^2 = z$

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP



Vẽ thêm đường parabol $x^2 = z$ trên mặt phẳng $y = 0$

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

III. Mặt Trụ bậc 2:

Định nghĩa mặt trụ bậc 2:

Mặt trụ bậc 2 là mặt tạo bởi các đường thẳng song song với 1 phương cố định và tựa lên 1 đường cong cố định. Các đường thẳng đó gọi là các đường sinh của mặt trụ, đường cong cố định gọi là đường chuẩn của mặt trụ.

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

Thông thường, ta sẽ chỉ gặp các mặt trụ có đường sinh song song với 1 trục tọa độ. Mặt trụ song song với trục nào thì phương trình mặt sẽ thiếu biến đó, còn phương trình chứa 2 biến còn lại là phương trình đường chuẩn của mặt trụ trong mặt tọa độ tương ứng và ta gọi tên mặt trụ theo tên của đường chuẩn

0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

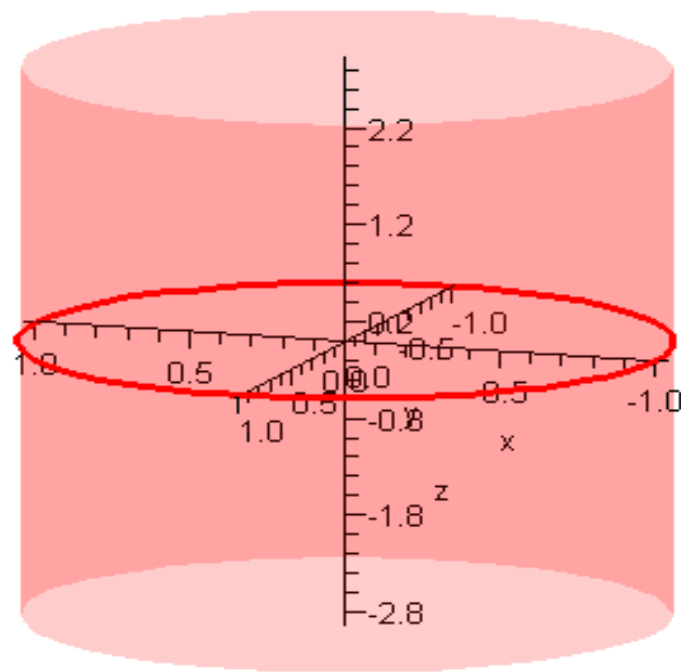
Ví dụ: Mặt $x^2 + y^2 = 1$

Phương trình *không chứa z* nên nó biểu diễn mặt trụ *đường sinh song song với trục Oz* , đường chuẩn là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trong mặt phẳng $z = 0$ và ta gọi đây là mặt trụ tròn xoay theo tên của đường chuẩn

XUANANH-TRU*TRON* XOAY

Vẽ đường
tròn $x^2 + y^2 = 1$,
trên mặt $z = 0$

Mặt trụ tạo bởi
các đường thẳng
song song với Oz
và tựa lên đường
tròn trên



0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

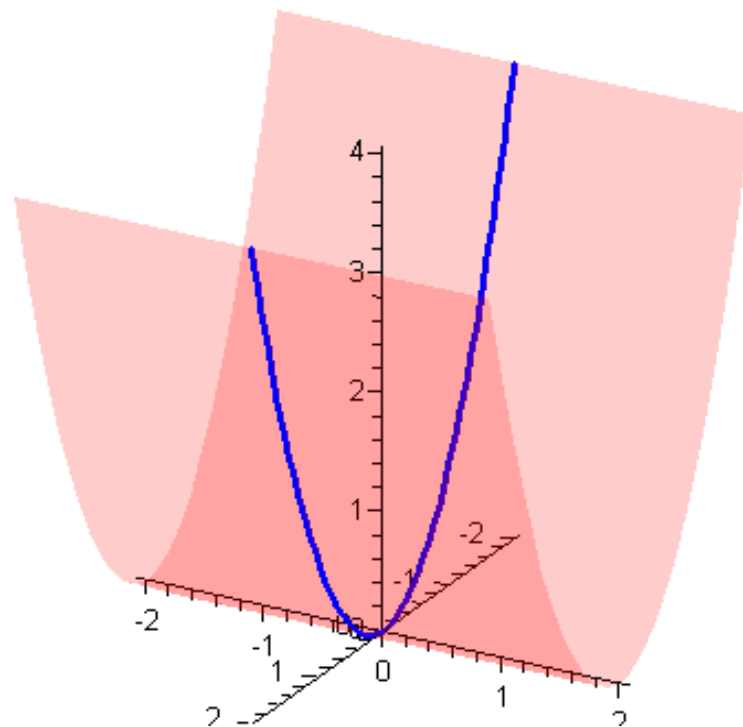
Ví dụ : Mặt $z=x^2$

Phương trình *không chứa y* nên nó biểu diễn *mặt trụ song song với trục Oy* , đường chuẩn là parabol $z=x^2$ trên mặt phẳng $y=0$ nên ta gọi đây là *mặt trụ parabol*

Vẽ parabol $z=x^2$ trong mặt phẳng $y=0$

Vẽ mặt trụ có đường sinh song song với trục Oy , tựa lên đường chuẩn là parabol $z=x^2$ ở trên

XUAN*ANH-MAT*TRU*PARABOL



0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

IV. Mặt nón bậc 2 :

Mặt nón bậc 2 là mặt tạo bởi các đường thẳng đi qua 1 điểm cố định và tựa lên 1 đường cong cố định. Các đường thẳng đó gọi là các đường sinh của mặt nón, đường cong cố định gọi là đường chuẩn của mặt nón và điểm cố định gọi là đỉnh của nón

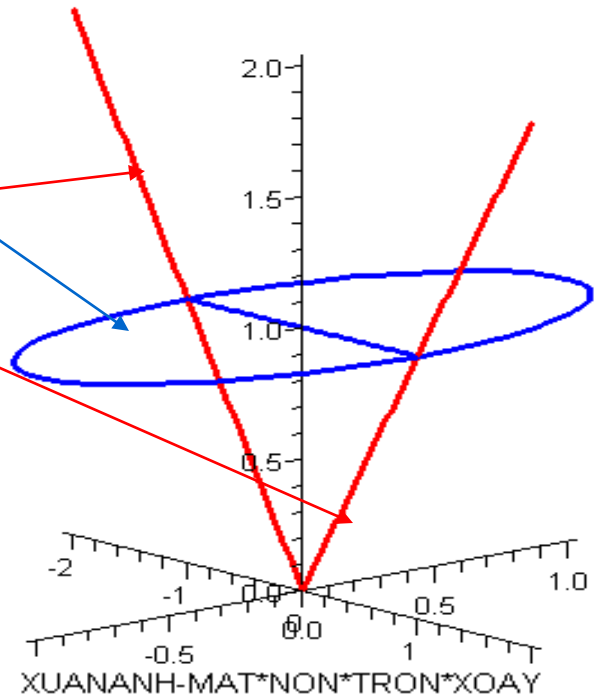
Ví dụ: Mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$

Cắt dọc mặt nón bởi các mặt $x=0$ hoặc $y=0$ ta được 2 đường thẳng cùng đi qua gốc tọa độ O, cắt ngang bởi mặt $z = c$ và $z = -c$, c tùy ý, ta được giao tuyến là 2 đường tròn tâm tại $(0,0,c)$ và $(0,0,-c)$ bán kính bằng c

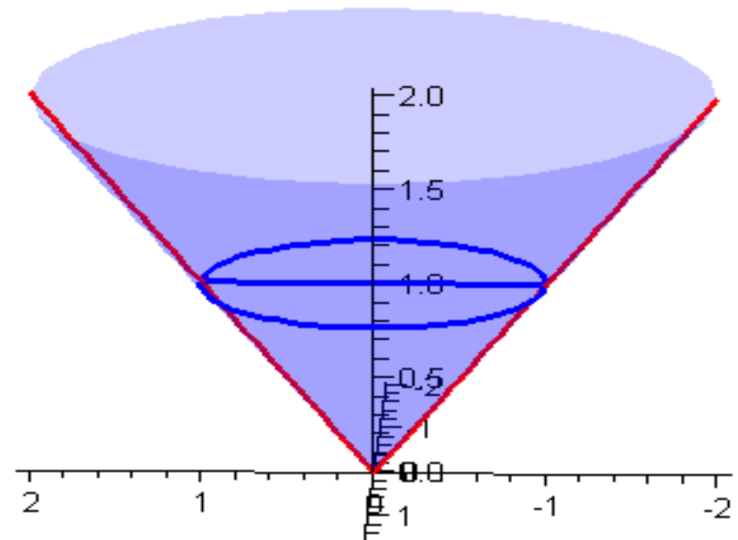
0. MỘT SỐ MẶT BẬC HAI THƯỜNG GẶP

Vẽ giao tuyến $x^2+y^2=1, z=1$

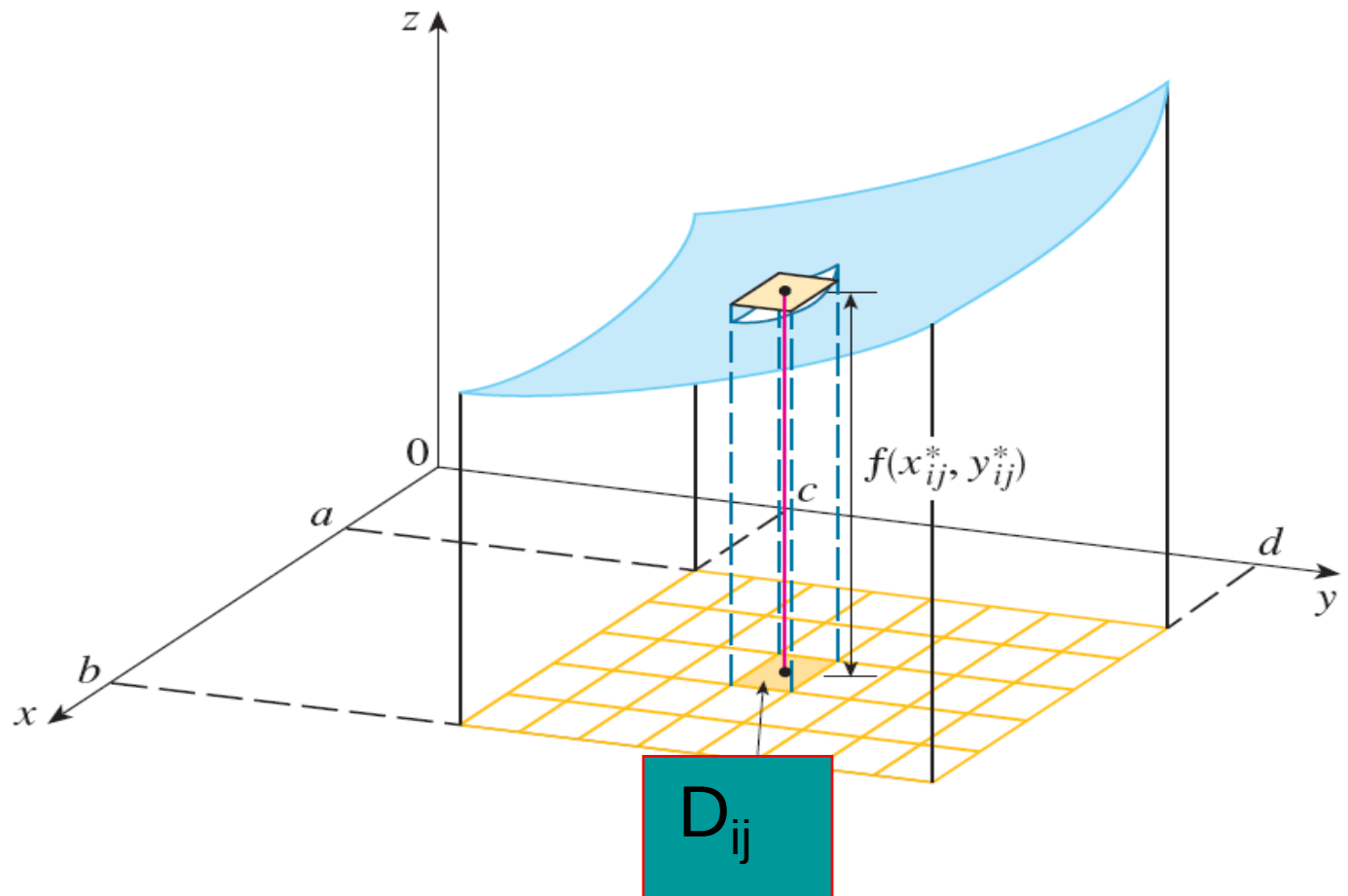
Và giao tuyến $x^2=z^2, y=0$



Vẽ mặt nón $x^2+y^2=z^2$,
lấy phần $z > 0$

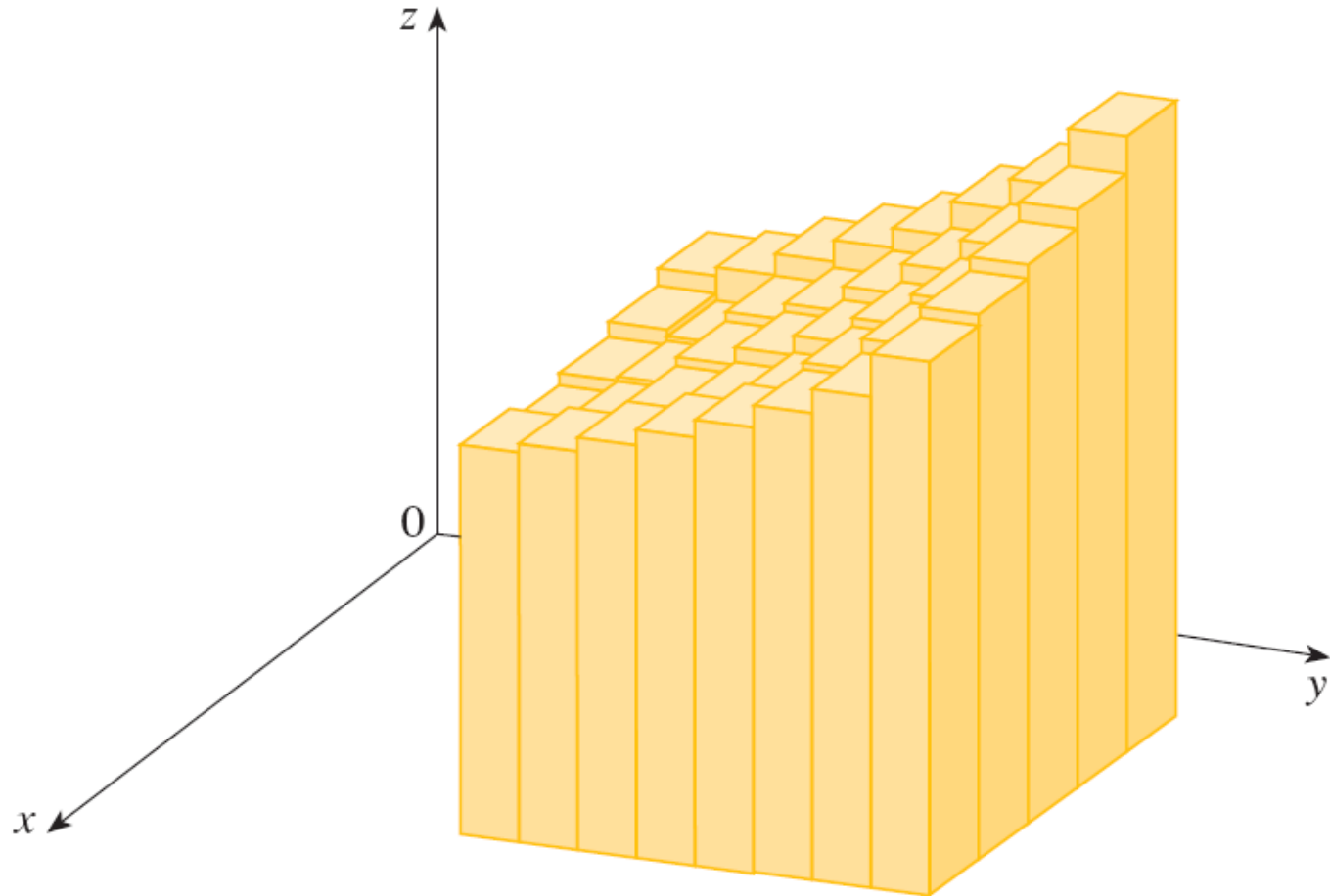


1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



Thể tích các hình hộp nhỏ với đáy dưới là D_{ij} , trên là phần mặt $z=f(x,y)$ sẽ được tính xấp xỉ với hình hộp chữ nhật đáy là D_{ij} , chiều cao là $f(x_i, y_j)$.

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



Khi đó, vật thể ban đầu có thể tích xấp xỉ với tổng thể tích các hình hộp chữ nhật nhỏ xếp liên tiếp nhau

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Định nghĩa tích phân kép : Cho hàm $f(x,y)$ xác định trong miền đóng, bị chặn D

Chia miền D thành n phần không dẫm lên nhau là $D_1, D_2, D_3, \dots$ (các phần không có phần chung) tương ứng có diện tích là $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots$

Trên mỗi miền D_k ta lấy 1 điểm $M_k(x_k, y_k)$ tùy ý.

Lập tổng (gọi là tổng tích phân kép của hàm $f(x,y)$)

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Hiển nhiên tổng trên phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_k

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Cho $n \rightarrow \infty$ sao cho $\max\{d(D)\} \rightarrow 0$ ($d(D)$ là kí hiệu đường kính của miền D tức là khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm bất kỳ thuộc D)

Nếu khi ấy tổng S_n tiến đến giới hạn hữu hạn S không phụ thuộc vào cách chia miền D cũng như cách lấy điểm M_k thì giới hạn S được gọi là tích phân kép của hàm $f(x,y)$ trên miền D và kí hiệu là

$$\iint_D f(x,y) ds$$

$$\text{Tức là } \iint_D f(x,y) ds = \lim_{\max(d(D_k)) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$$

Hàm $f(x,y)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân, ds là yếu tố diện tích. Khi ấy, ta nói hàm $f(x,y)$ khả tích trên miền D

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Chú ý : Nếu $f(x,y)$ khả tích trên D thì ta có thể chia D bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Lúc đó D_{ij} sẽ là hình chữ nhật với các cạnh là Δx_i , Δy_j nên $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ và ds được thay bởi $dx dy$. Vì vậy, ta thường dùng kí hiệu

$$\iint_D f(x,y) ds = \iint_D f(x,y) dx dy$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Điều kiện khả tích :

Định nghĩa đường cong trơn : Đường cong C có phương trình tham số $y = y(t)$, $x = x(t)$ được gọi là trơn nếu các đạo hàm $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục và không đồng thời bằng 0. Đường cong C được gọi là trơn từng khúc nếu có thể chia nó thành hữu hạn các cung trơn.

Định lý: Hàm *liên tục* trên *1 miền đóng, bị chặn* và có biên trơn từng khúc *thì khả tích* trên miền đó.

Tính chất : Cho $f(x,y)$, $g(x,y)$ là các hàm khả tích trên D

$$1. \quad S(D) = \iint_D dx dy \quad (S(D) \text{ là diện tích miền } D)$$

$$2. \quad \iint_D [f(x,y) + g(x,y)] dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy + \iint_D g(x,y) dx dy$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Tính chất

$$3. \iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy$$

4. Chia D thành 2 miền không dẫn lên nhau là E, F thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy + \iint_F f(x, y) dx dy$$

5. Nếu $f(x, y) \leq g(x, y)$ trên D thì:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

6. Trên D, hàm $f(x, y)$ đạt $f_{\max} = M$, $f_{\min} = m$ thì

$$m S(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M S(D)$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Định lý: (Về giá trị trung bình)

Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng, bị chặn, liên thông D . Khi ấy trong D có ít nhất 1 điểm (x_0, y_0) sao

cho :
$$\iint_D f(x,y) dx dy = f(x_0, y_0) S(D)$$

Đại lượng $\alpha = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x,y) dx dy$ được gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x,y)$ trên miền D

Ý nghĩa hình học của tích phân kép :

Với cách tính thể tích hình trụ cong ở trên ta có

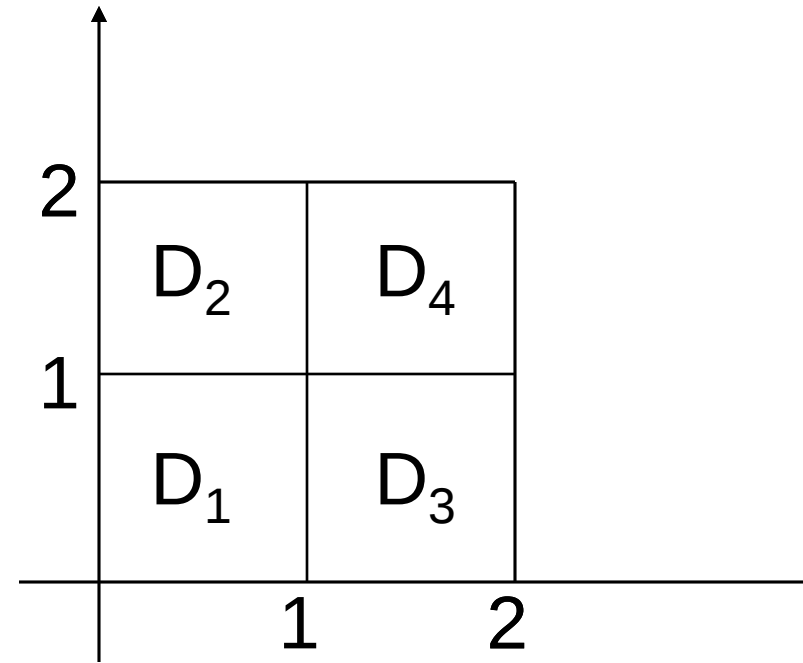
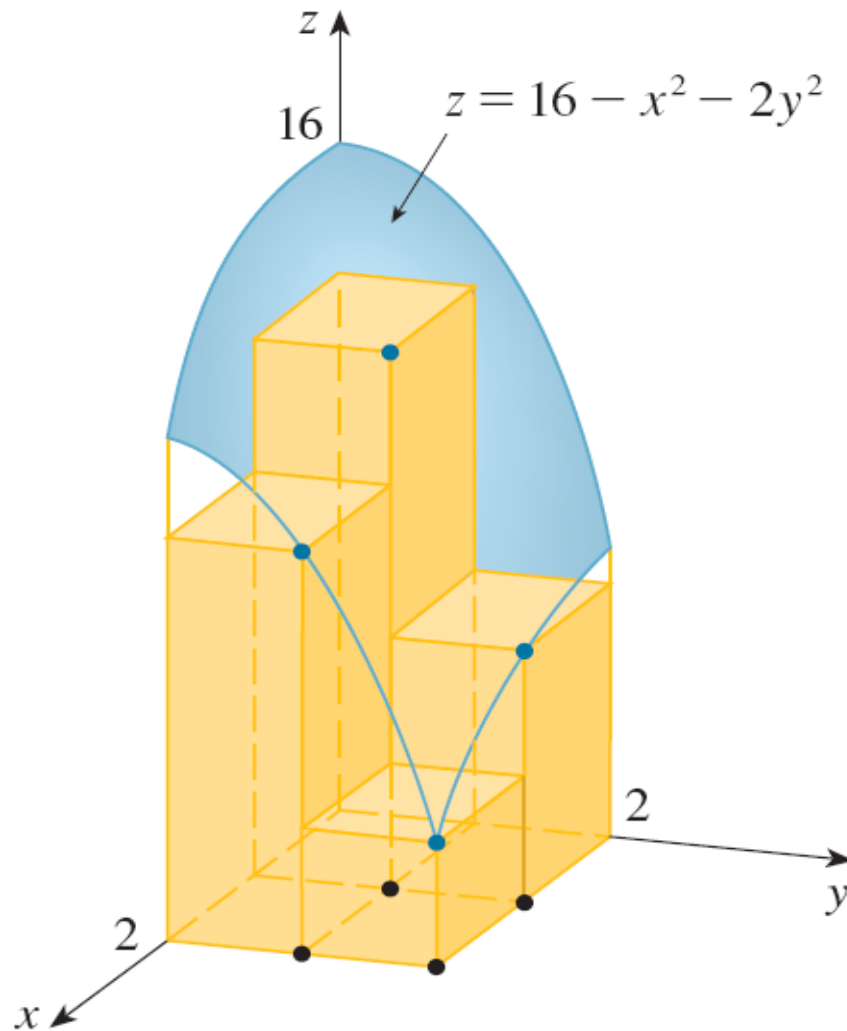
$$V = \iint_D f(x,y) dx dy$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Cho vật thể được giới hạn trên bởi mặt bậc hai $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$, giới hạn dưới bởi hình vuông $D = [0,2] \times [0,2]$ và giới hạn xung quanh bởi 4 mặt phẳng $x=0, x=2, y=0, y=2$. Ước lượng thể tích của vật thể trong các trường hợp sau :

- a) Chia D thành 4 phần bằng nhau;
- b) Chia D thành 16 phần bằng nhau;
- c) Chia D thành 64 phần bằng nhau;
- d) Chia D thành 256 phần bằng nhau;
- e) Tính thể tích vật thể

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



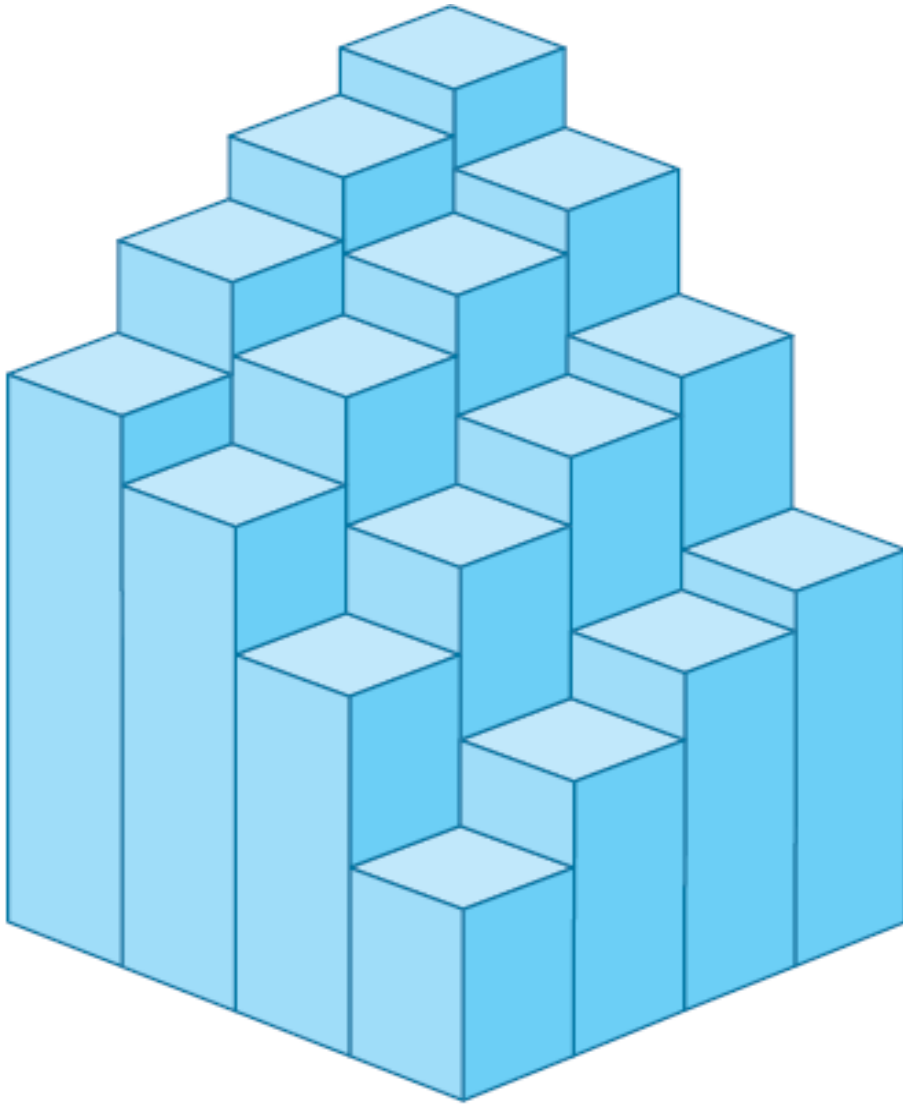
$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^4 f(M_i) \times S_{D_i}$$

$$S_{D_i} = 1, \forall i = 1, \dots, 4.$$

$$V \approx f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)$$

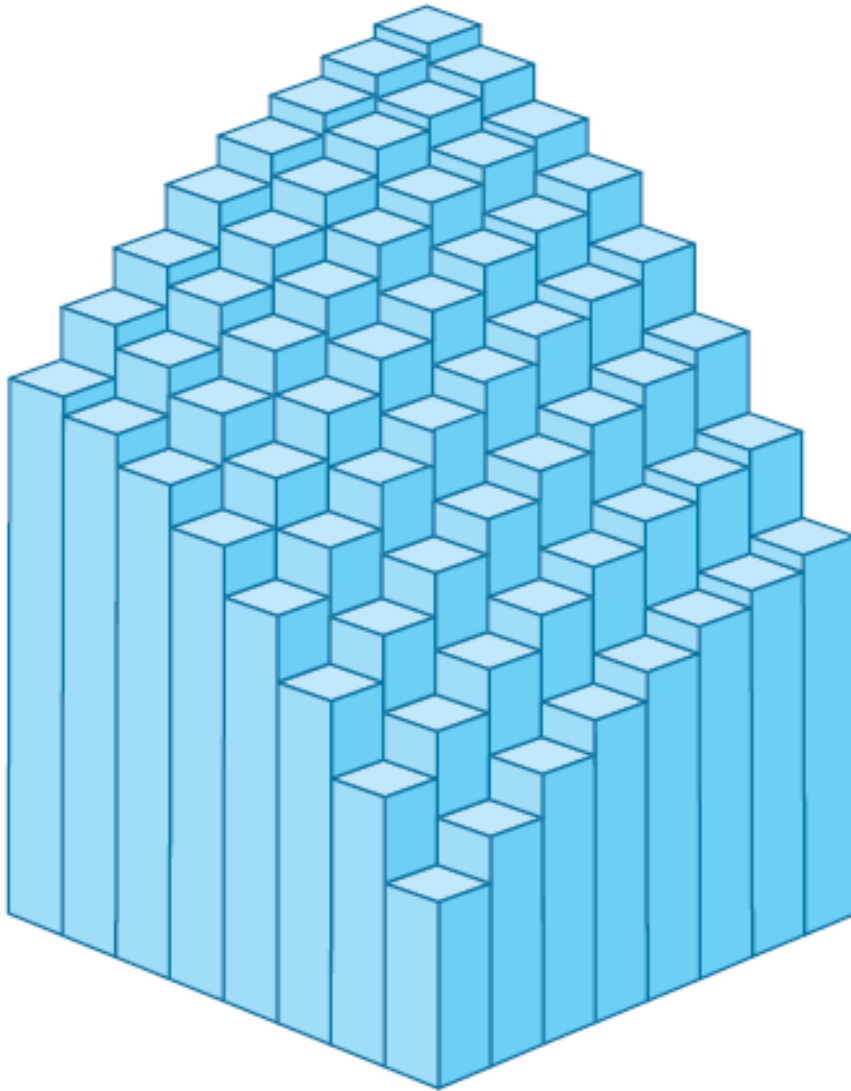
$$V \approx 13 + 7 + 10 + 4 = 34.$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



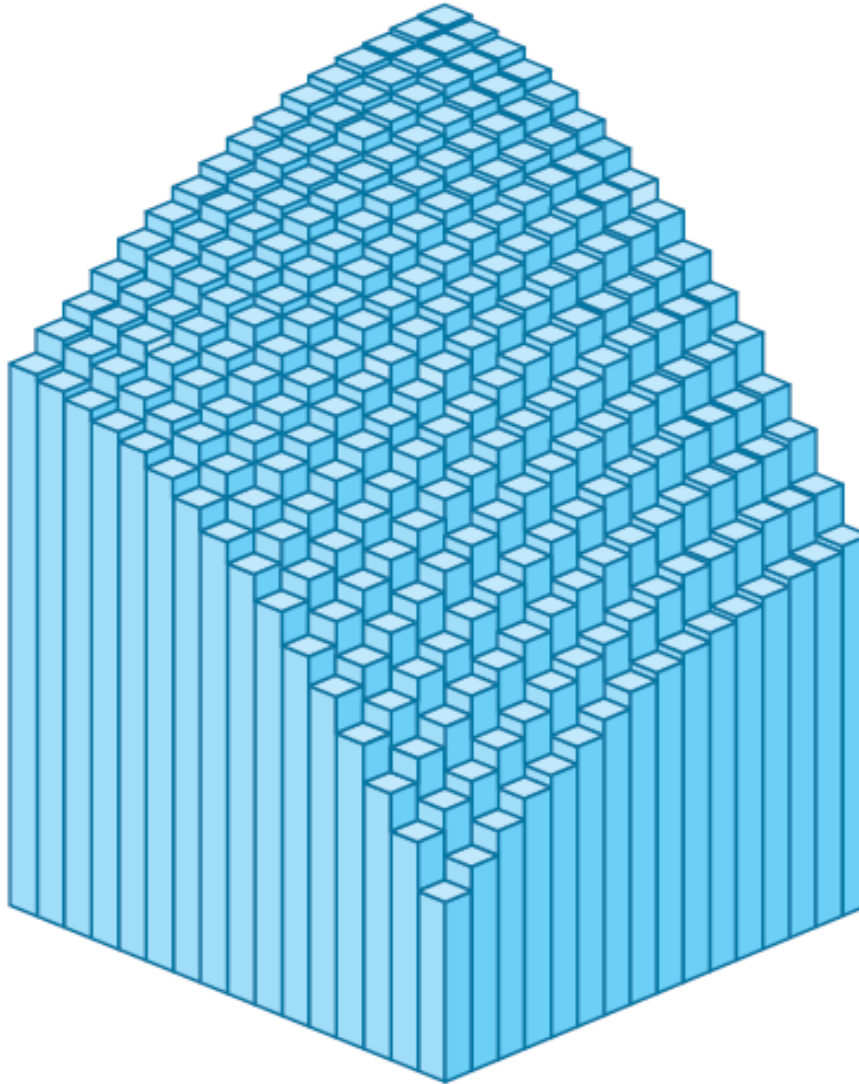
b. Chia thành 16 phần, $V \approx 41,5$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



c. Chia thành 64 phần, $V \approx 44,875$

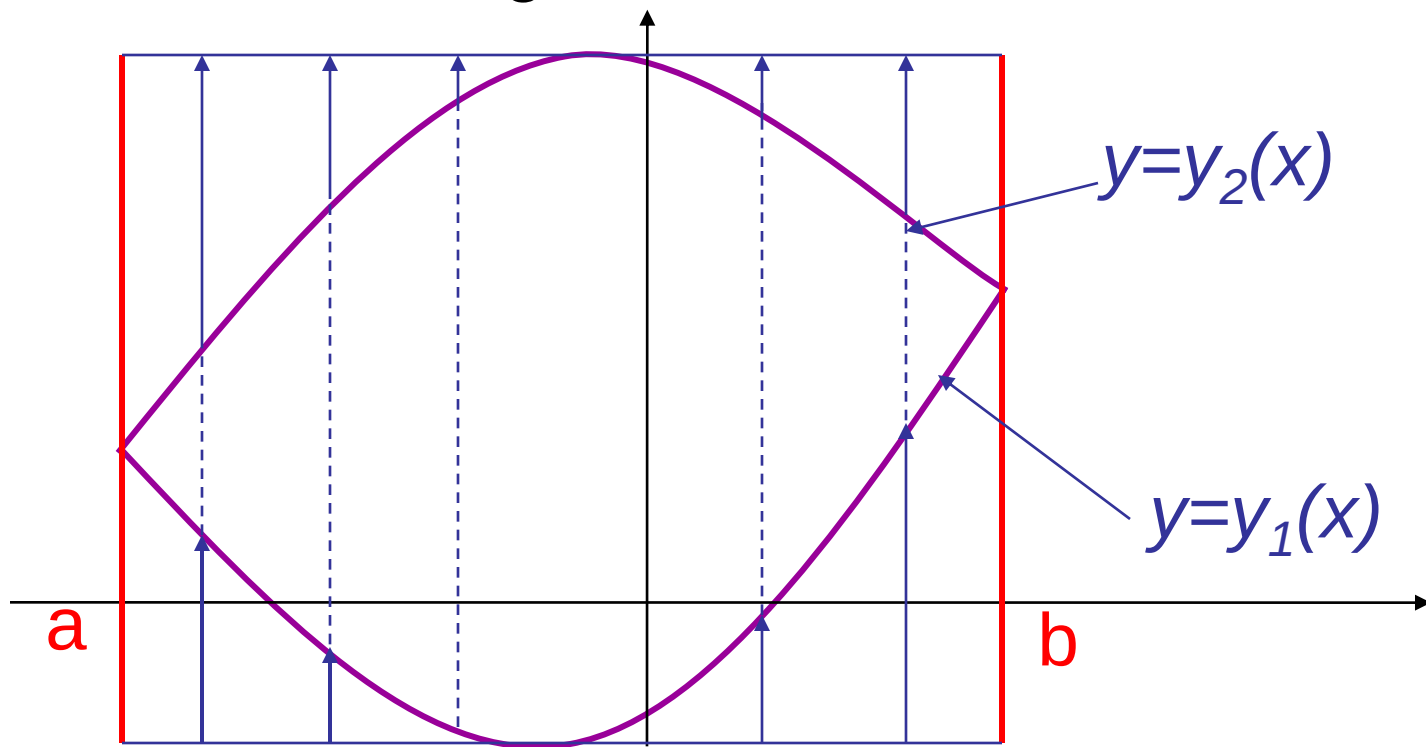
1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



d. Chia thành 256 phần, $V \approx 46,46875$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Định lý Fubini: (Cách tính tích phân kép) Cho hàm $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D



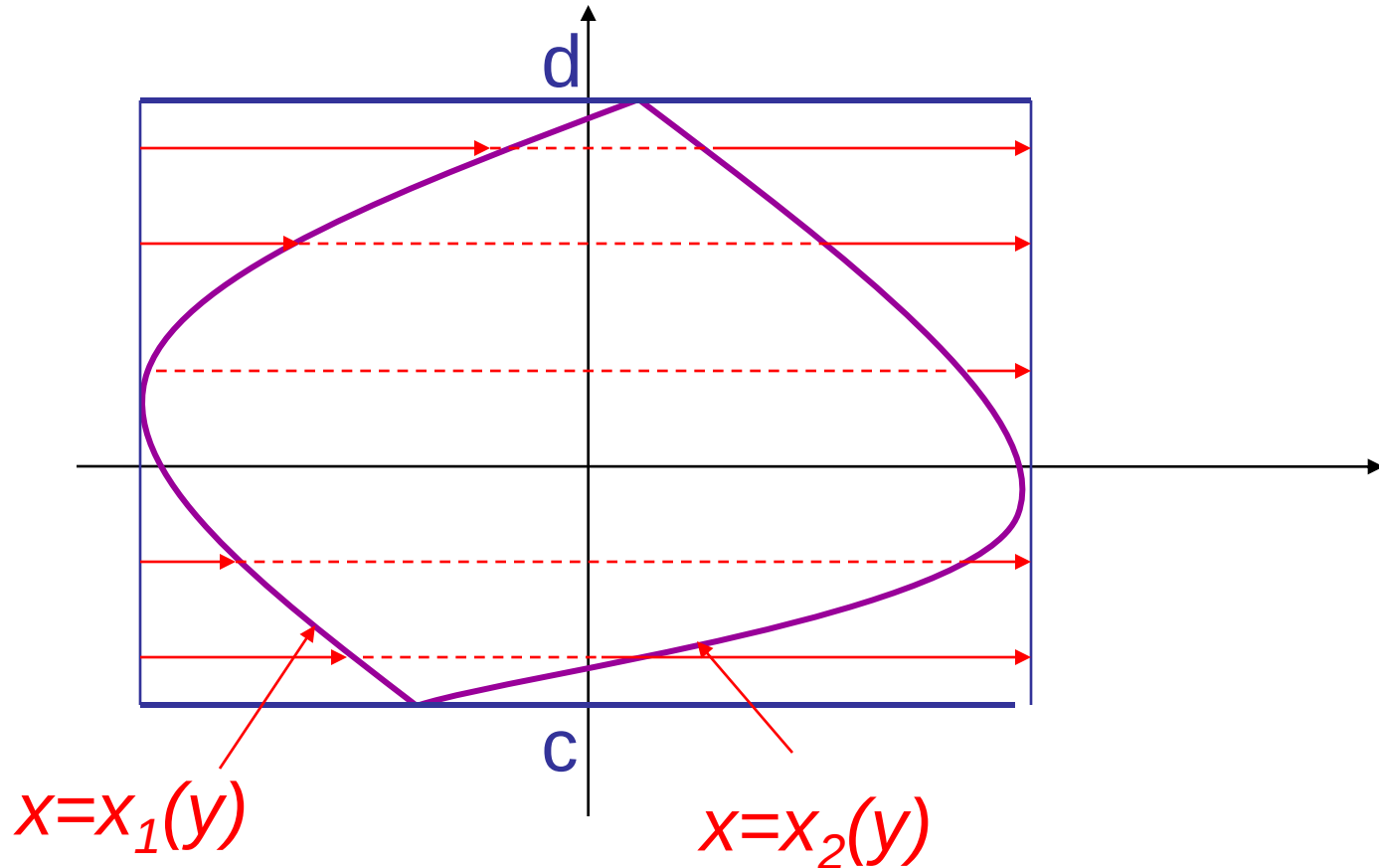
1) Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính



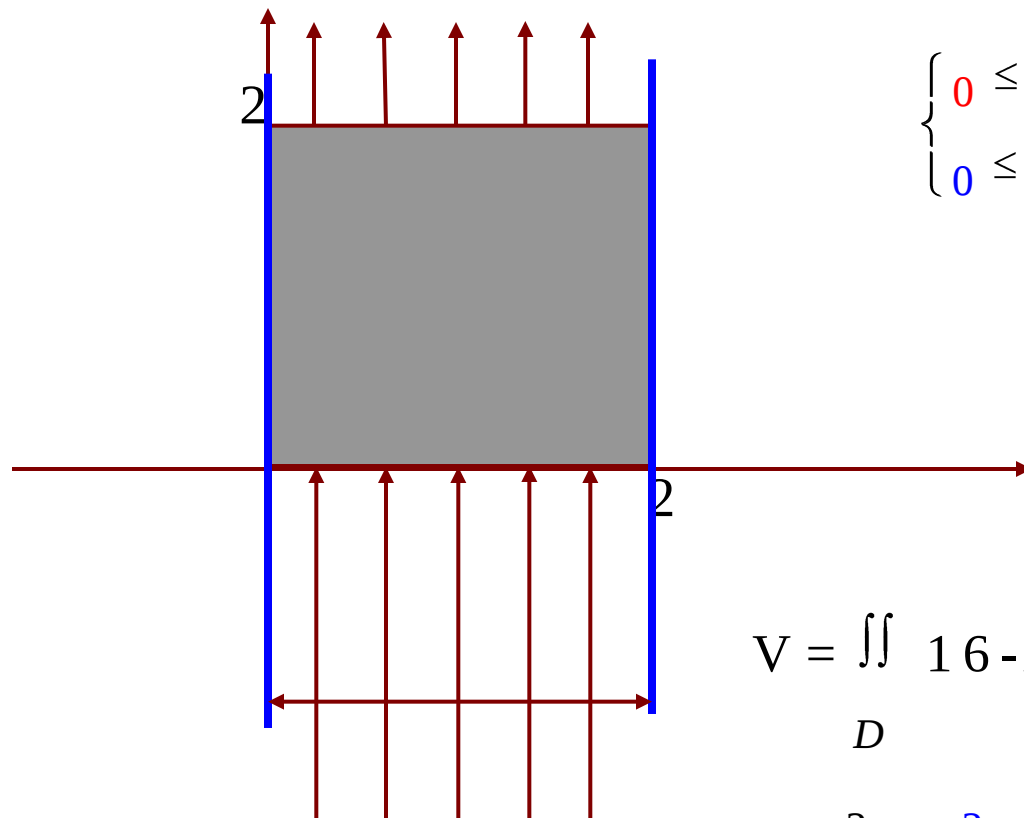
2) Giả sử D xác định bởi:

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

Giải câu e)



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$V = \iint_D (16 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) \, dy$$

Tính thể tích của vật thể.

$$= \int_0^2 \left[(16 - x^2)y - 2 \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3} \right) dx = 48$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân $I = \iint_D xy dx dy$ trong đó D là tam giác ABC với A(1,-1), B(1,3), C(4,0)

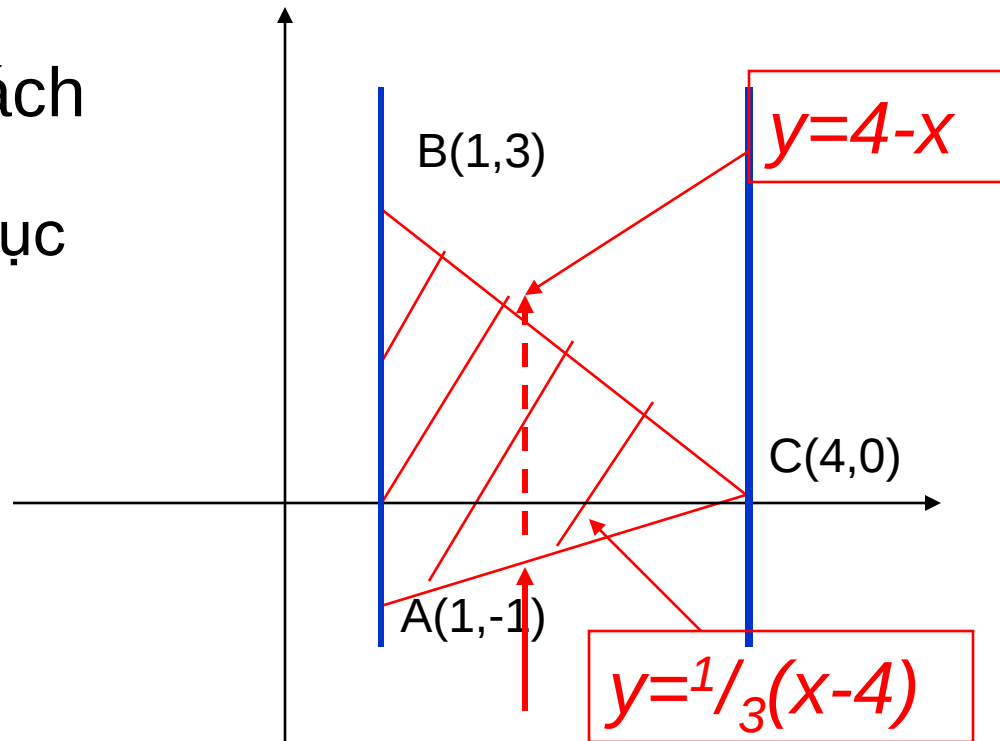
Ta đi tích phân này bằng 2 cách

Cách 1 : Chiếu miền D xuống trục Ox ta được đoạn [1,4]

Đi theo trục Oy từ dưới lên

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{3}(x-4) \leq y \leq x-4 \end{cases}$$

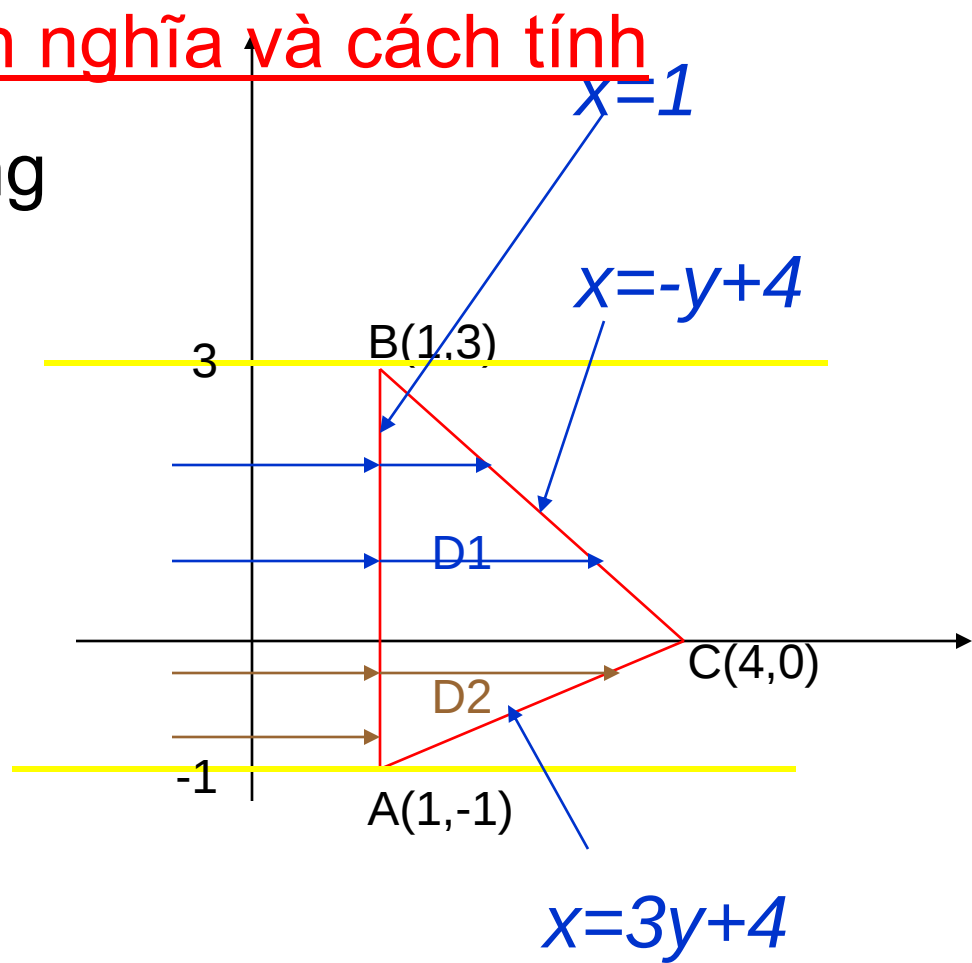
$$I = \int_1^4 dx \int_{\frac{1}{3}(x-4)}^{x-4} xy dy = \int_1^4 \left(x \frac{y^2}{2} \right)_{\frac{1}{3}(x-4)}^{x-4} dx = \frac{4}{9} \int_1^4 x(x-4)^2 dx = 7$$



1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Cách 2 : Chiếu miền D xuống trục Oy ta được đoạn $[-1,3]$

Đi theo trục Ox từ trái sang thì không giống như trên, ta sẽ gặp 2 đường BC và AC. Do đó, ta sẽ chia miền D thành 2 phần D1 và D2

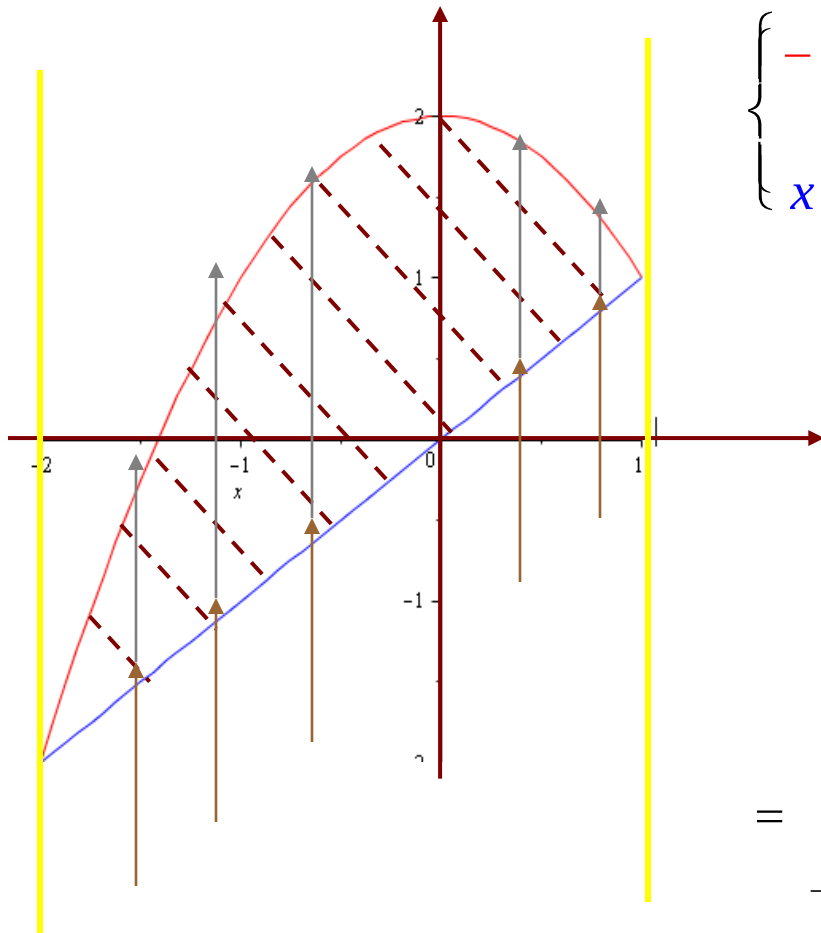


$$I = \int_{-1}^0 dy \int_1^{3y+4} xy dx + \int_0^3 dy \int_1^{-y+4} xy dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(y \frac{x^2}{2} \right)_1^{3y+4} dy + \int_0^3 \left(y \frac{x^2}{2} \right)_1^{-y+4} dy$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân kép $I = \iint_D (x - y) dx dy$ với D là miền giới hạn bởi $y = x; y = 2 - x^2$



$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x - y) dx dy \\ &= \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (x - y) dy \\ &= \int_{-2}^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_x^{2-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^1 \left(x((2 - x^2) - x) - \frac{(2 - x^2)^2 - x^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ta còn có thể xác định cận của tích phân trên mà không cần vẽ hình như sau:

Tìm giao điểm của 2 đường biên của miền D:

$$y = x = 2 - x^2 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2, x = 1$$

Vậy ta có $-2 \leq x \leq 1$, tức là ta lấy trong khoảng 2 nghiệm của tam thức $f(x) = x^2 + x - 2$ nên ta có bất đẳng thức:

$$x^2 + x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2 - x^2$$

Tức là, với x nằm trong khoảng $(-2, 1)$ thì đường thẳng $y = x$ nằm dưới đường parabol $y = 2 - x^2$. Vậy ta cũng được

$$I = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} x - y \, dy$$