

# 1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ : Tính tích phân  $I = \iint_D \cos(x + y) dx dy$  trong đó

D là miền giới hạn bởi :  $\pi/4 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq \pi/2$

Miền D được chia thành 4 phần

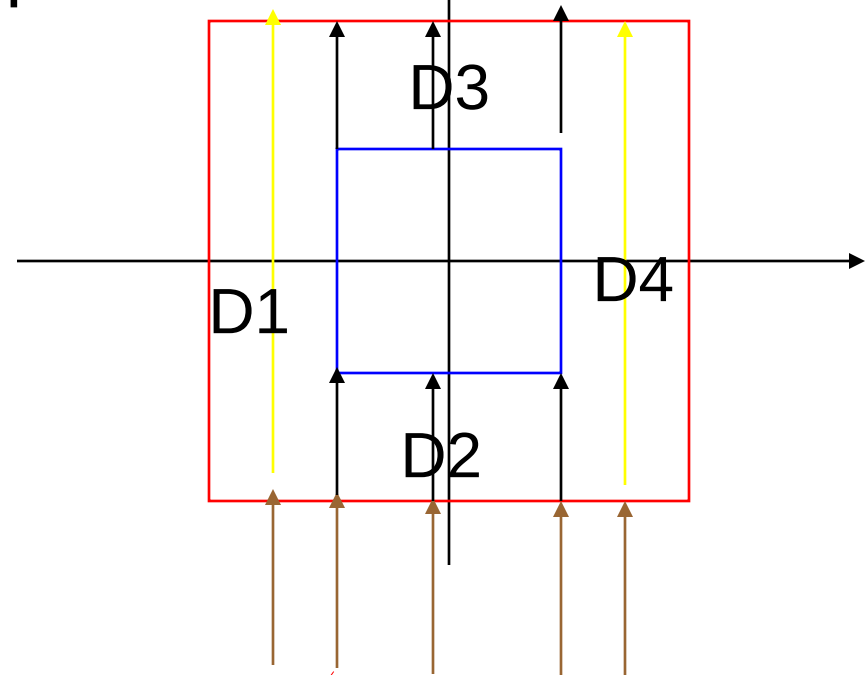
$$\begin{cases} -\pi/2 \leq x \leq -\pi/4, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 & (D1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\pi/4 \leq x \leq \pi/4, -\pi/2 \leq y \leq -\pi/4 & (D2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\pi/4 \leq x \leq \pi/4, \pi/4 \leq y \leq \pi/2 & (D3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi/4 \leq x \leq \pi/2, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 & (D4) \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x + y) dy = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin(x + y) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dx$$



# 1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} (\cos x - (-\cos x)) dx = 0$$

Tương tự, ta tính cho 3 tích phân trên 3 miền còn lại.

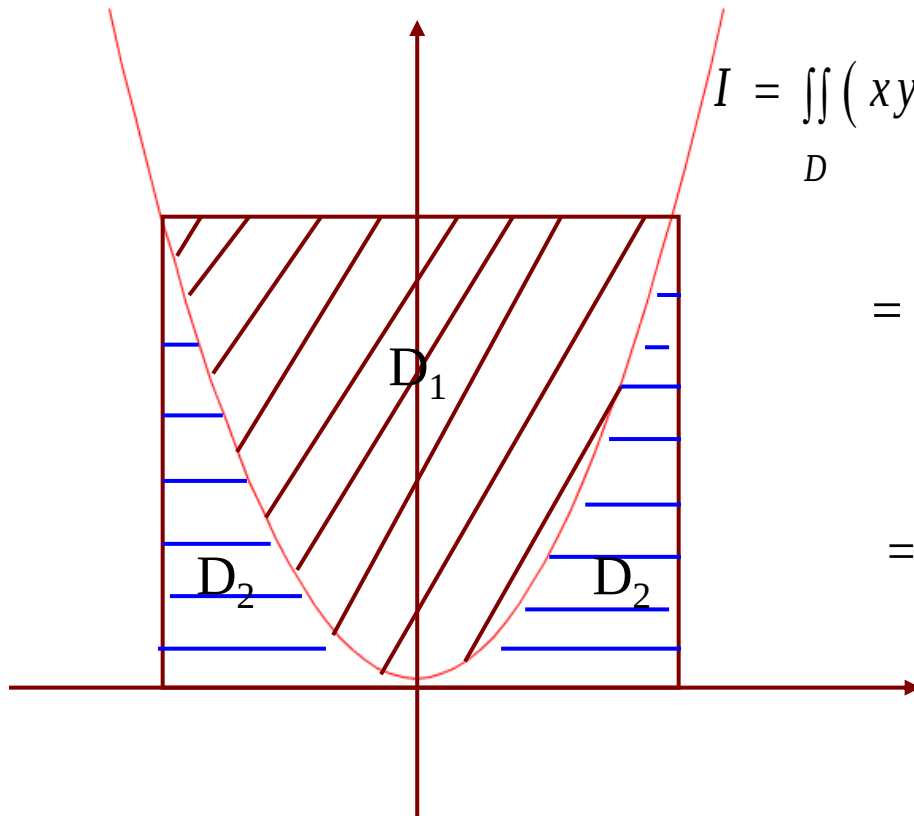
Ta còn có thể tính tích phân này bằng cách tính tích phân trên hình vuông lớn trừ tích phân trên hình vuông nhỏ

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x+y) dy - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dx \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x+y) dy$$

# 1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân kép  $I = \iint_D |y - x^2| dx dy$

$D$  là miền giới hạn bởi  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$



$$I = \iint_D (xy) dx dy = \iint_{D_1} |y - x^2| dx dy + \iint_{D_2} |y - x^2| dx dy$$

$$= \iint_{D_1} (y - x^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 - y) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy$$

$$I = \frac{11}{15}$$

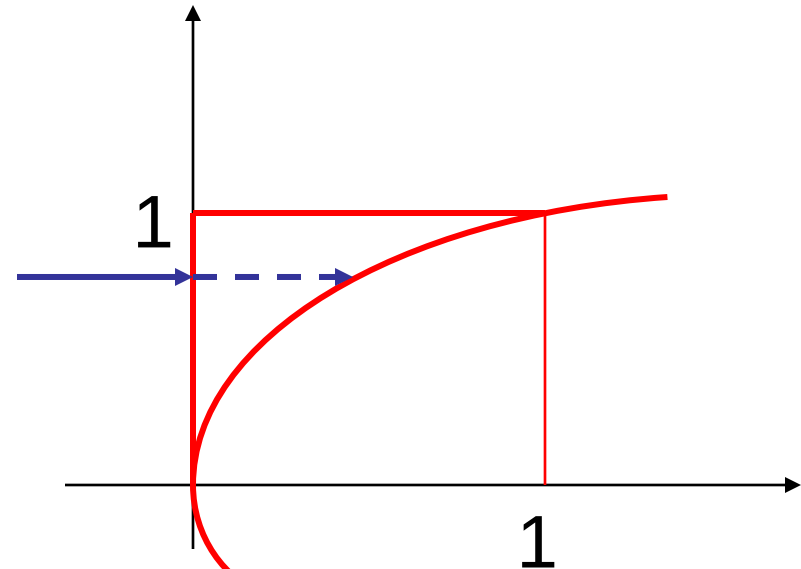
# 1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

Ví dụ: Tính tích phân  $I = \iint_D e^{x/y} dx dy$

Với  $D$  là miền giới hạn bởi  $x = y^2, x = 0, y = 1$

Nếu chỉ nhìn vào miền lấy tích phân này thì ta chiếu  $D$  xuống trục nào cũng như nhau.

Tuy nhiên, hàm dưới dấu tích phân sẽ buộc ta phải chiếu  $D$  xuống trục  $Oy$



$$I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{x/y} dx = \int_0^1 (ye^{x/y}) \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y) dy$$

# 1: Tích phân kép – Định nghĩa và cách tính

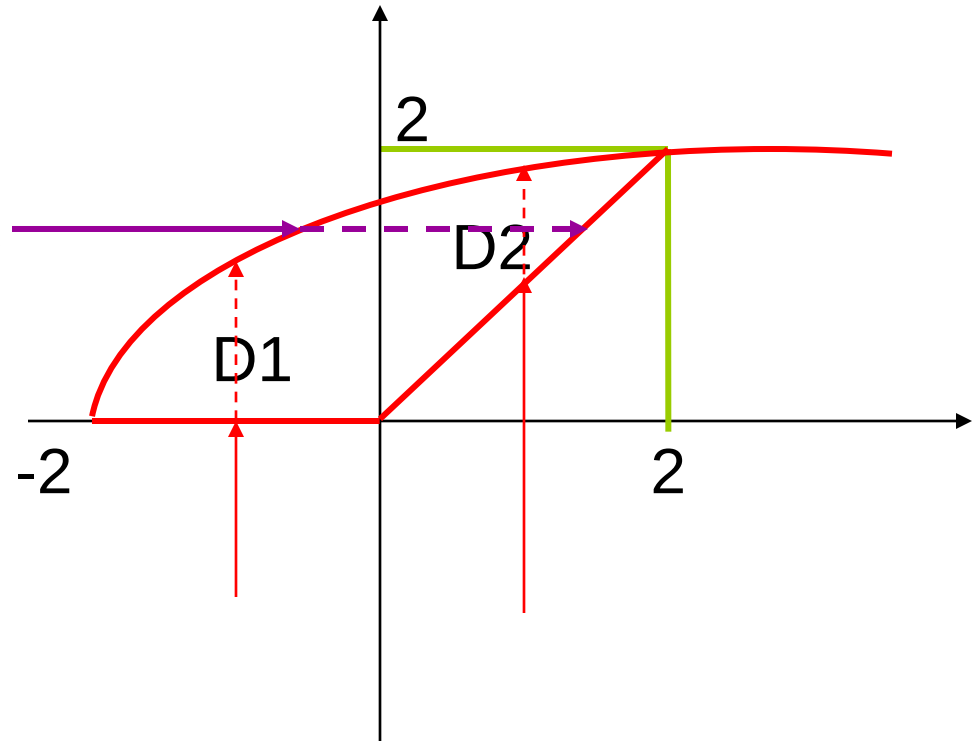
Ví dụ : Đổi thứ tự lấy tích phân sau  $I = \int_0^2 dy \int_{y^2-2}^y f(x,y) dx$

Ta vẽ miền lấy tích phân

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 - 2 \leq x \leq y \end{cases}$$

Chiếu miền D vừa vẽ xuống trục Ox

Ta thấy phải chia D thành 2 phần D1 và D2



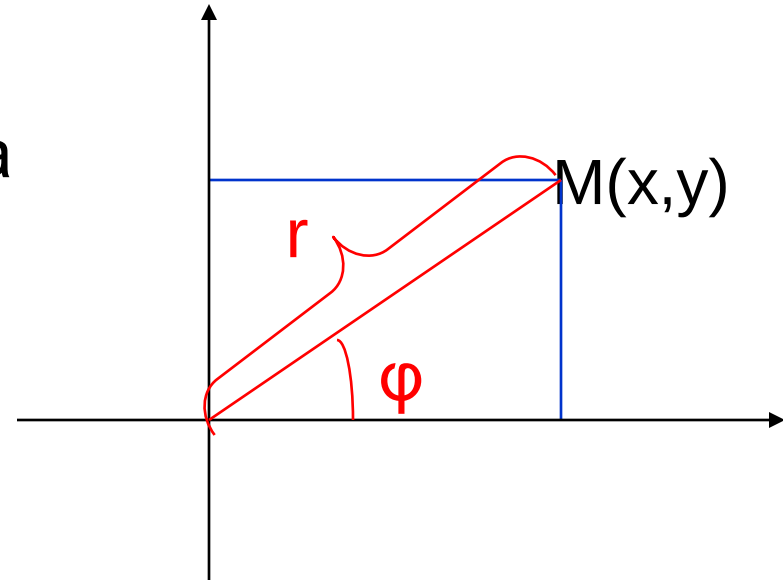
$$I = \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{x+2}} f(x,y) dy + \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f(x,y) dy$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

## Nhắc lại về tọa độ cực

Điểm M có tọa độ là (x,y) trong tọa độ Descartes.

$$\text{Đặt : } \varphi = g(\vec{Ox}, \vec{OM})$$
$$r = |\vec{OM}|$$



Khi đó, mối liên hệ giữa x, y và r,  $\varphi$  là

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ: Đổi các phương trình sau sang tọa độ cực

$$1. (x-a)^2 + y^2 = a^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 2ax \leftrightarrow r = 2a\cos\varphi$$

$$2. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Đổi sang tọa độ cực mở rộng bằng cách đặt :

$$x = a.r.\cos\varphi, y = b.r.\sin\varphi \quad \text{Thì ta được pt } r = 1$$

$$3. x = 3 \quad \leftrightarrow r\cos\varphi = 3 \quad \leftrightarrow r = \frac{3}{\cos\varphi}$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

## Công thức đổi biến sang tọa độ cực

$$\iint_{D(x,y)} f(x,y) dx dy = \iint_{D(r,\varphi)} |J| f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr d\varphi$$

Trong đó

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = r$$

Thông thường, ta sẽ đổi tích phân kép sang tọa độ cực nếu miền lấy tích phân kép là **1 phần hình tròn** hoặc **ellipse**

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

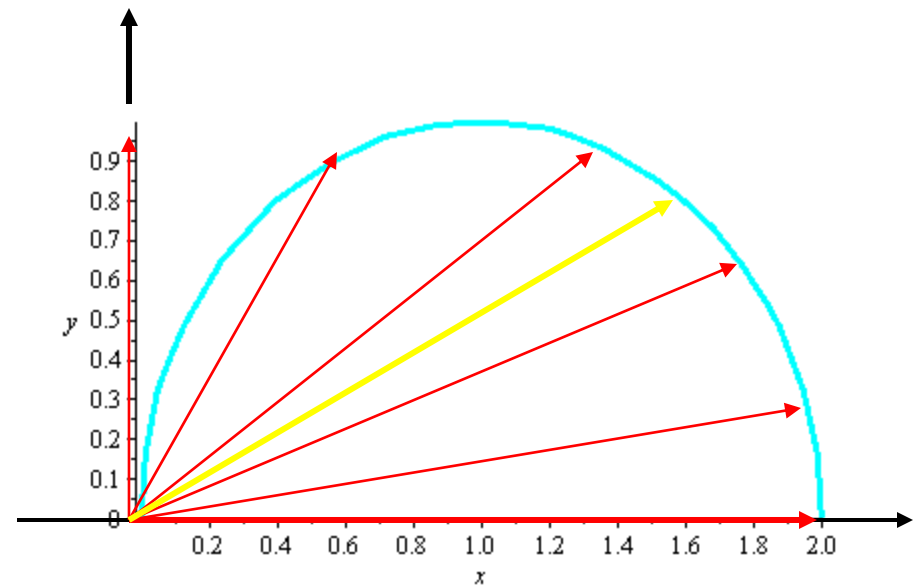
**Ví dụ :** Tính tích phân  $I = \iint_D (x - 2y) dx dy$

Trong đó  $D$  giới hạn bởi :  $x^2 + y^2 = 2x, y = 0 (y \geq 0)$

Để xác định cận của tích phân theo  $\varphi$ , ta quét từ dưới lên theo ngược chiều kim đồng hồ bởi các tia màu đỏ.

Ta được  $\varphi$  đi từ 0 đến  $\pi/2$

Còn để xác định cận của tích phân theo  $r$ , ta sẽ đi theo 1 tia màu vàng từ trong gốc tọa độ ra, gặp đường nào trước thì pt đường đó (trong tọa độ cực) là cận dưới, đường nào trước thì pt đường đó là cận trên.



# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Nếu chỉ gặp 1 đường như trong ví dụ này thì cận dưới ta sẽ lấy là **0**, cận trên là pt đường tròn sau khi đổi sang tọa độ cực:  **$r = 2\cos\varphi$**

Vậy :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r(r\cos\varphi - 2r\sin\varphi)dr \\ &= \int_0^{\pi/2} ((\cos\varphi - 2\sin\varphi) \frac{r^3}{3})_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 2\sin\varphi) 8\cos^3\varphi d\varphi \end{aligned}$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

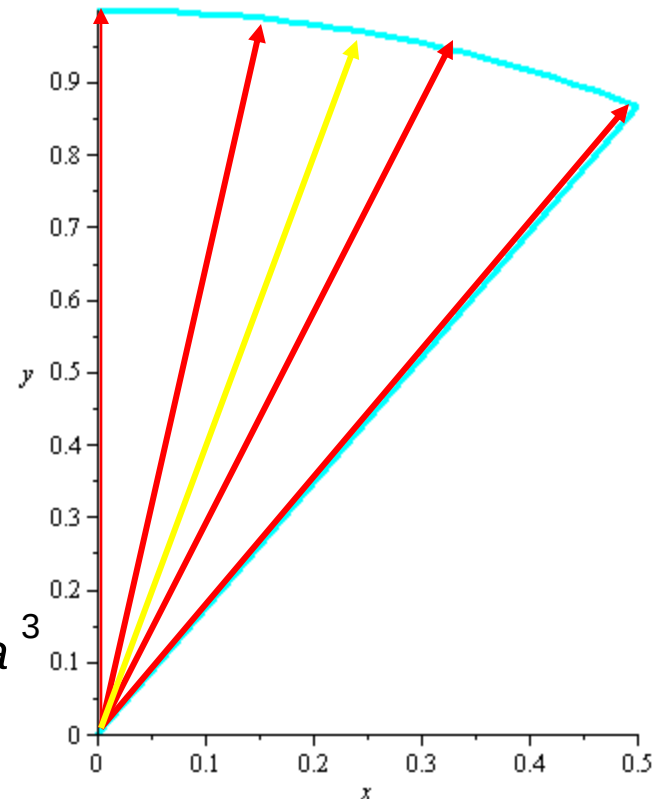
Trong đó D giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = a^2, x = 0, y = \sqrt{3}x (x, y \geq 0)$

$$y = \sqrt{3}x \leftrightarrow y/x = \sqrt{3} \leftrightarrow \varphi = \pi/3$$

Suy ra:  $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Đi từ trong gốc tọa độ ra chỉ gặp 1 đường nên  $0 \leq r \leq a$

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^a r \cdot r \cdot dr = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \left( \frac{r^3}{3} \right)_0^a = \frac{\pi}{18} a^3$$



# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân  $I = \iint_D xy dx dy$

Trong đó D giới hạn bởi  $x^2 + y^2 \leq 2y, x + y \leq 0$

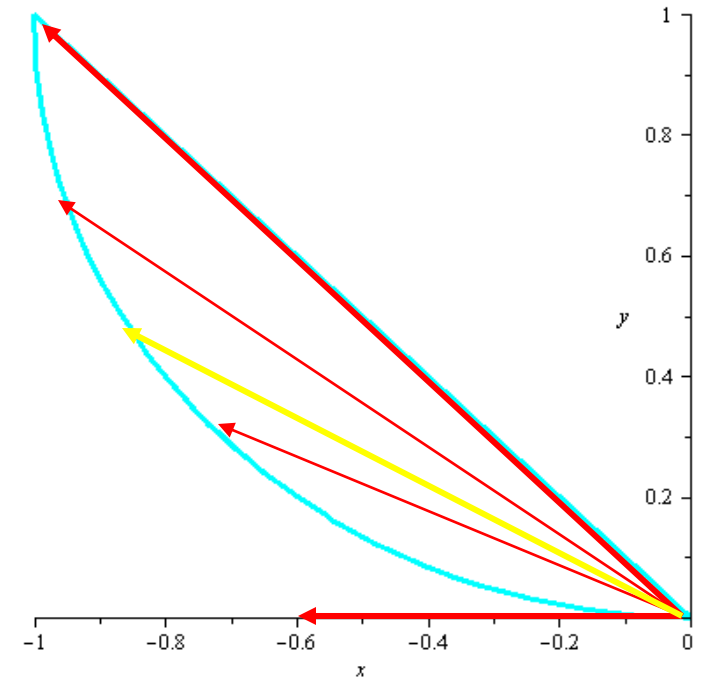
$$y > 0, x+y=0 \leftrightarrow \varphi = 3\pi/4$$

$$\text{Suy ra : } 3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi$$

$$x^2 + y^2 = 2y \leftrightarrow r = 2\sin\varphi$$

$$\text{Suy ra : } 0 \leq r \leq 2\sin\varphi$$

$$I = \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r \cdot r \cos\varphi \cdot r \sin\varphi dr$$



# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

**Ví dụ :** Tính tích phân  $I = \iint_D (2y - 1) dx dy$

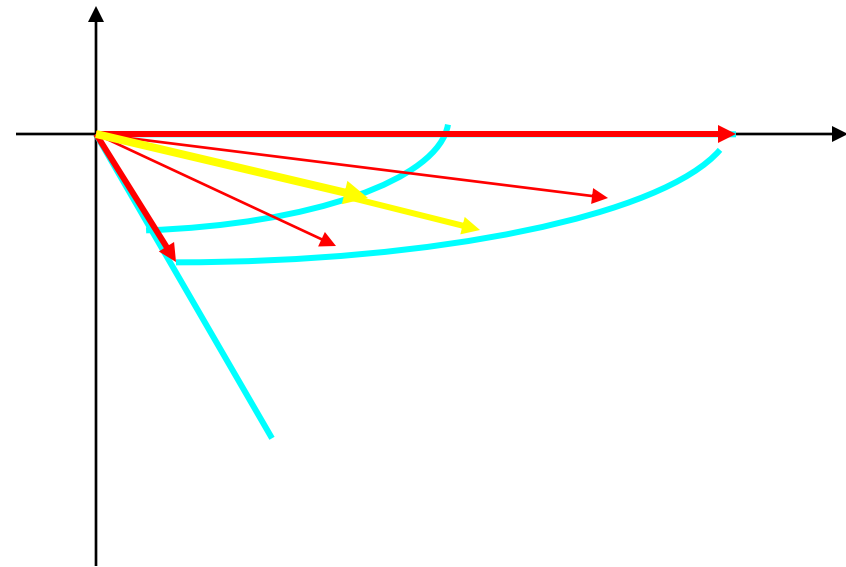
Trong đó  $D$  giới hạn bởi :  $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, -\sqrt{3}x \leq y \leq 0$

$$2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \Leftrightarrow$$

$$2\cos\varphi \leq r \leq 4\cos\varphi$$

$$-\sqrt{3}x \leq y \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$$

Đây là trường hợp ta có thể không cần vẽ hình cũng lấy được cận tích phân



$$I = \int_{-\pi/3}^0 d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r(2r\sin\varphi - 1) dr$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

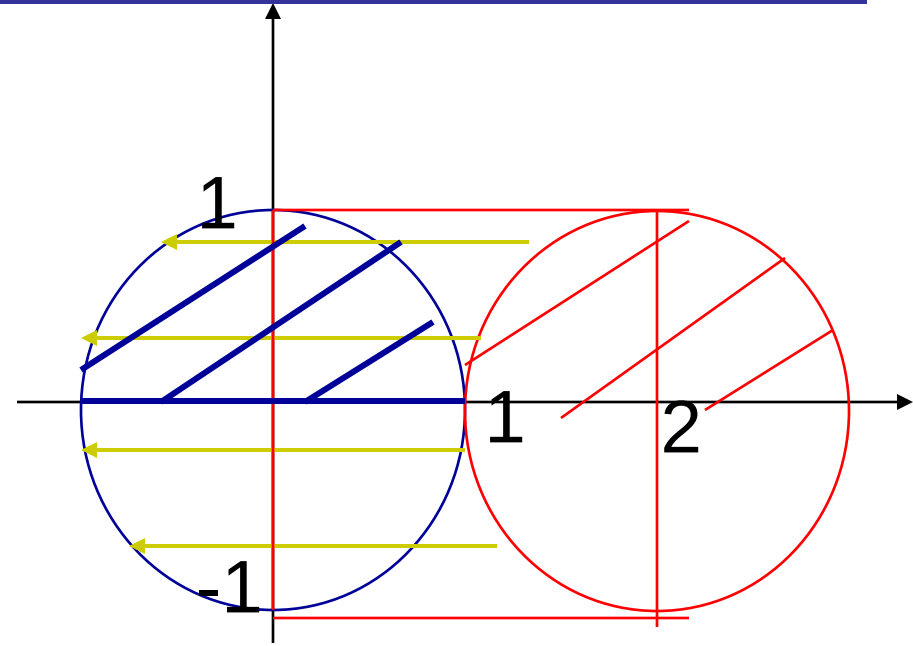
Ví dụ : Tính tích phân  $I = \iint_D x dx dy$

Trong đó  $D$  giới hạn bởi  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y$

Ta đi tích phân này bằng cách dời hình tròn để tâm hình tròn là  $(0,0)$ , sau đó mới đổi sang tọa độ cực.

Thực hiện 2 việc trên bằng 1 phép đổi biến sang tọa độ cực mở rộng như sau: đặt

$$\begin{cases} x = 2 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Khi đó, miền D giới hạn bởi 
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Vậy :

$$I = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r(2 + r \cos \varphi) dr$$

# 1: Tích phân kép – Đổi biến sang tọa độ cực

Ví dụ : Tính tích phân

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

Trong đó D giới hạn bởi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \leq 0$$

Ta đổi biến sang tọa độ cực mở rộng bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow J = abr$$

Thì D giới hạn bởi

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abr \sqrt{1 - r^2} dr$$

