

CHƯƠNG IV: TÍCH PHÂN MẶT

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

1. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

Tích phân mặt loại 1

Định nghĩa : Cho hàm $f(x,y,z)$ trên mặt S . Chia S thành n phần tùy ý không chồng lên nhau. Gọi tên và diện tích của mỗi mặt đó là ΔS_k , $k=1, 2, \dots, n$. Trên mỗi mảnh đó ta lấy 1 điểm M_k tùy ý và lập tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

Cho $\max(\Delta S_k) \rightarrow 0$ (ΔS_k là đường kính của mảnh S_k), nếu tổng trên dần đến 1 giới hạn hữu hạn thì ta gọi đó là tp mặt loại 1 của hàm $f(x,y,z)$ trên mặt S , kí hiệu là

$$\oiint_S f(x,y,z) ds = \lim_{\max(\Delta S_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta S_k$$

Tích phân mặt loại 1

Tính chất :

Diện tích mặt S được tính bởi

$$S = \iint_S ds$$

$$\iint_S (l f + m g) ds = l \iint_S f ds + m \iint_S g ds$$

Nếu mặt S được chia thành 2 mặt không dẫn lên nhau là S_1 và S_2 thì

$$\iint_S f ds = \iint_{S_1} f ds + \iint_{S_2} f ds$$

Tích phân mặt loại 1

Cách tính:

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

Trong đó :

D_{xy} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy ($z=0$)

Từ pt mặt S là $F(x, y, z)=0$ ta rút ra z theo x, y để
được $z=z(x, y)$

Biểu thức $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = ds$ được gọi là vi
phân của mặt S

Tích phân mặt loại 1

Ví dụ 1: Tính tích phân I_1 trên mặt S là phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ với $0 \leq z \leq 1$ của hàm $f(x, y, z) = x + y + z$

Hình chiếu của S xuống mp $z=0$ là $D_{xy} : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$

Pt mặt S (z dương) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\rightarrow$

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Suy ra: $ds = \sqrt{2} dx dy$ Vậy:

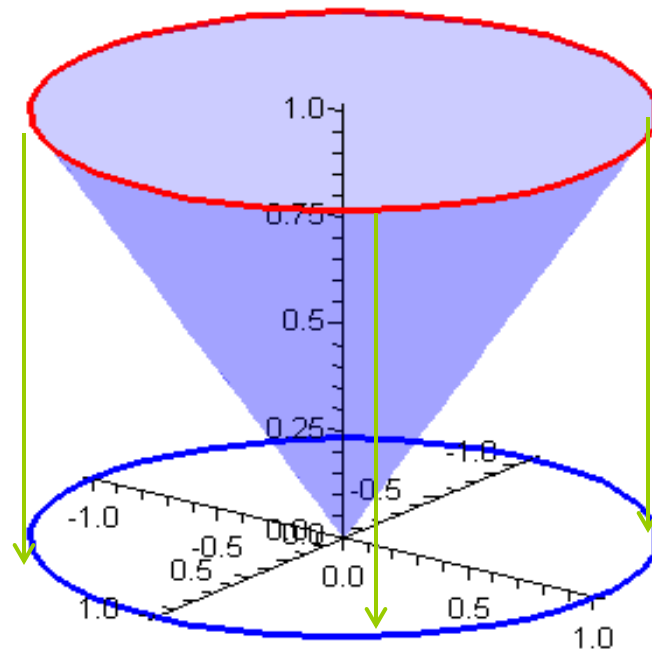
$$I_1 = \iint_S (x + y + z) ds = \iint_{D_{xy}} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2}) \sqrt{2} dx dy$$

Tích phân mặt loại 1

Đổi tp sang tọa độ cực:

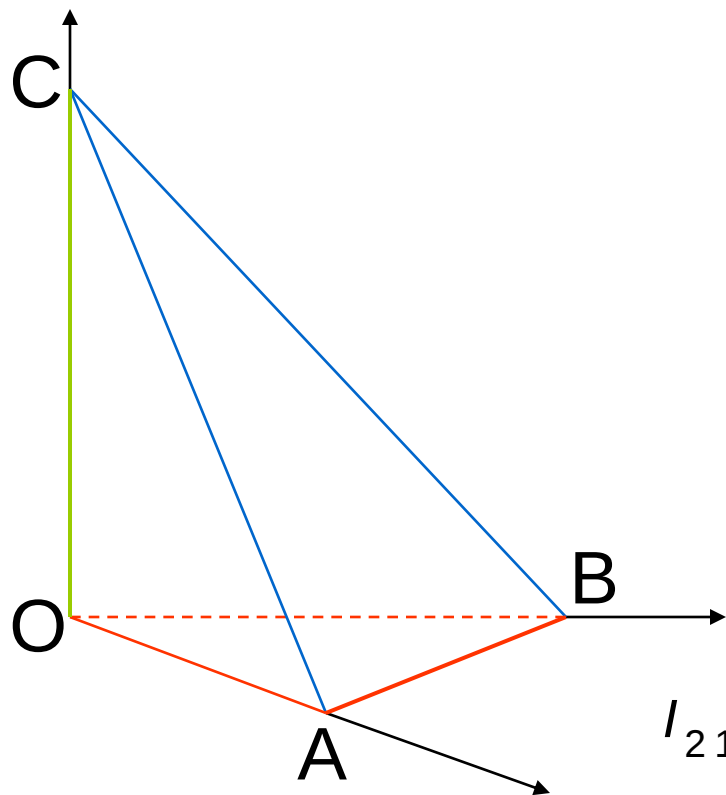
$$I_1 = \int_0^{2p} \int_0^1 (\cos j + \sin j + r) r dr dj$$

$$I_1 = \frac{2p}{3}$$



Tích phân mặt loại 1

Ví dụ 2: Tính tích phân I_2 của hàm $f(x,y,z)=x+2y+3z$ trên mặt S là mặt xung quanh tứ diện $x=0, y=0, z=0, x+2y+3z=6$

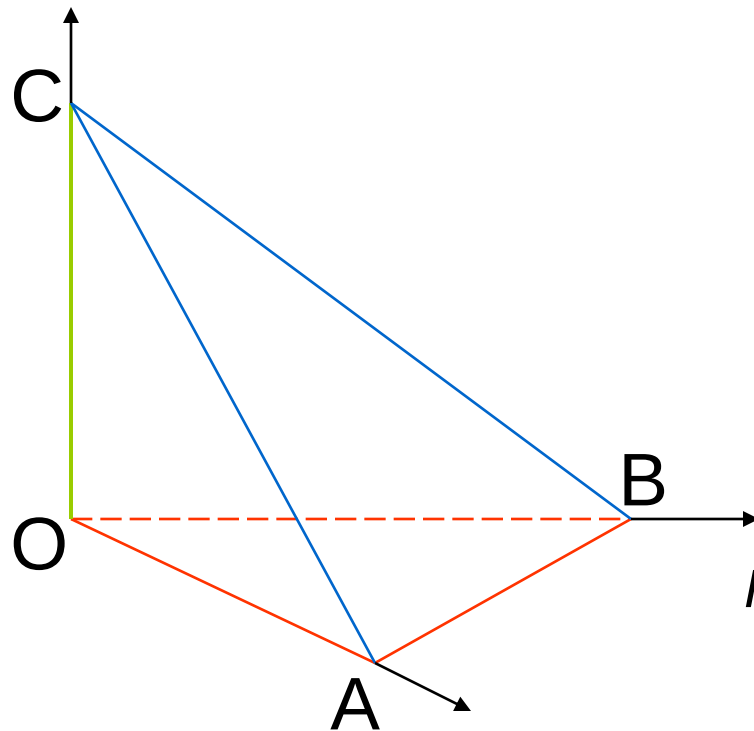


Mặt S gồm 4 mặt nên tp I_2 cũng được chia làm 4 tp

Vì mặt $x=0$ nên $x'_y=x'_z=0 \rightarrow ds=dydz$, chiếu xuống mp $x=0$ ta được $D_{yz}: \triangle OBC$

$$I_{21} = \oiint_{(x=0)} f ds = \oiint_{D O B C} (2y + 3z) dy dz$$

Tích phân mặt loại 1



Tương tự, tp trên 2 mặt tọa độ còn lại

$$I_{22} = \iint_{(y=0)} f ds = \iint_{\triangle OAC} (x + 3z) dx dz$$

$$I_{23} = \iint_{(z=0)} f ds = \iint_{\triangle OAB} (x + 2y) dx dy$$

Cuối cùng, trên mặt $x+2y+3z=6$ (mp(ABC)). Ta chiếu xuống mp $z=0$ thì **Dxy: $\triangle OAB$** , vi phân mặt :

$$z = 2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x \quad \text{p} \quad ds = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy$$

Tích phân mặt loại 1

Do đó: $I_{24} = \iint_{(x+2y+3z=6)} f ds = \iint_{DOAB} 6 \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}$$

Tích phân mặt loại 1

Ví dụ 3: Tính tp I_3 của hàm $f(x,y,z)=x^2+y^2+2z$ trên mặt S là phần hình trụ $x^2+y^2=1$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2=2$

Chú ý: Ta không thể chiếu S xuống mp $z=0$ được vì cả mặt trụ $x^2+y^2=1$ có hình chiếu xuống mp $z=0$ chỉ là **1 đường tròn $x^2+y^2=1$**

Chiếu S xuống mp $x=0$ hay $y=0$ đều như nhau. Ta sẽ tìm **hình chiếu của S xuống mp $x=0$** bằng cách khử x từ 2 pt 2 mặt và được **$D_{yz}: y^2 \leq 1, z^2 \leq 1$**

Khi đó, ta viết x theo y, z từ pt mặt S : $x = \pm \sqrt{1 - y^2}$

Tích phân mặt loại 1

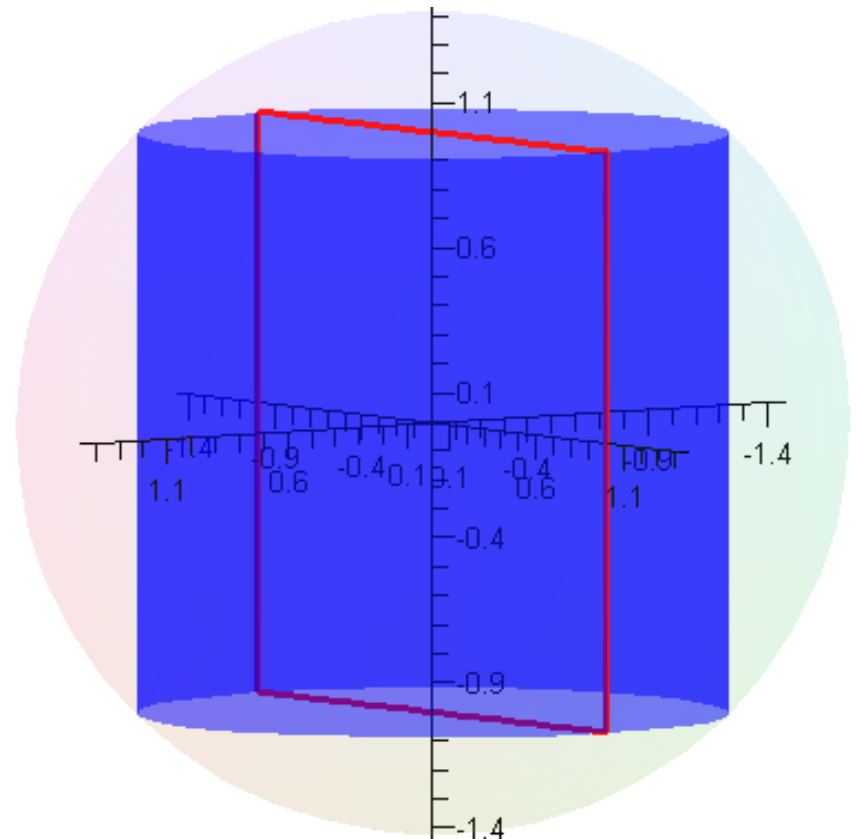
Do pt cả 2 mặt đều chẵn đối với x nên mặt S nhận $x=0$ là mặt đối xứng. Hơn nữa, hàm dưới dấu tp cũng là hàm chẵn với x nên ta sẽ tính tp trên phần mặt S với $x>0$ rồi nhân đôi.

$$x = \sqrt{1 - y^2} \quad \begin{cases} x_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}} \\ x_z = 0 \end{cases}$$

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy dz$$

Vậy:

$$I_3 = 2 \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \frac{1 + 2z}{\sqrt{1 - y^2}} dz$$



Tích phân mặt loại 1

Ví dụ 4: Tính diện tích S_4 của phần mặt paraboloid $y=1-x^2-z^2$ nằm phía trên mp $y=0$

Với $y \geq 0$, ta được hình chiếu xuống mp $y=0$ của paraboloid là $D_{xz} : x^2+z^2 \leq 1$

Pt mặt S:

$$y = 1 - x^2 - z^2 \quad \text{P} \quad \begin{cases} y'_x = -2x \\ y'_z = -2z \end{cases}$$

Vậy:

$$S_4 = \iint_{S_4} ds = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz$$

$$S_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{p}{6} (\sqrt{125} - 1)$$

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Vecto Gradient: Cho mặt cong S có pt là $F(x,y,z)=0$.
Ta gọi vecto gradient của hàm F tại điểm M là vecto

$$\vec{\nabla} F(M) = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$$

Mặt cong S được gọi là mặt trơn nếu các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục và không đồng thời bằng 0 trên S tức là vecto gradient của F liên tục và khác 0

Khi mặt S được cho bởi pt $z=z(x,y)$ thì ta đặt
 $F(x,y,z) = z - z(x,y) = 0 \quad (x,y) \in D$

Lúc đó, mặt S trơn nếu các đạo hàm riêng z'_x, z'_y liên tục trên D

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Mặt định hướng : Mặt S được gọi là mặt định hướng hay là mặt 2 phía nếu tại điểm M bất kỳ của S xác định được vecto pháp đơn vị $n(M)$ sao cho hàm vecto $n(M)$ liên tục trên S

Khi ta chọn 1 hàm vecto xác định, ta nói ta đã định hướng xong mặt S , vecto đã chọn là vecto pháp dương. Phức tương ứng của mặt S là phía mà khi ta đứng trên phía ấy, vecto pháp ứng từ chân lên đầu

Mặt S trơn cho bởi pt $F(x,y,z)$ là mặt định hướng được với pháp vecto đơn vị là

$$n = \pm \frac{\tilde{\nabla} F}{|\tilde{\nabla} F|}$$

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Pháp vecto đơn vị trên còn có thể viết bằng cách khác:

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Trong đó α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi nửa dương 3 trục Ox, Oy, Oz với pháp vecto

Để xác định pháp vecto của mặt S với pt là $F(x,y,z)=0$, ta sẽ làm theo 3 bước sau:

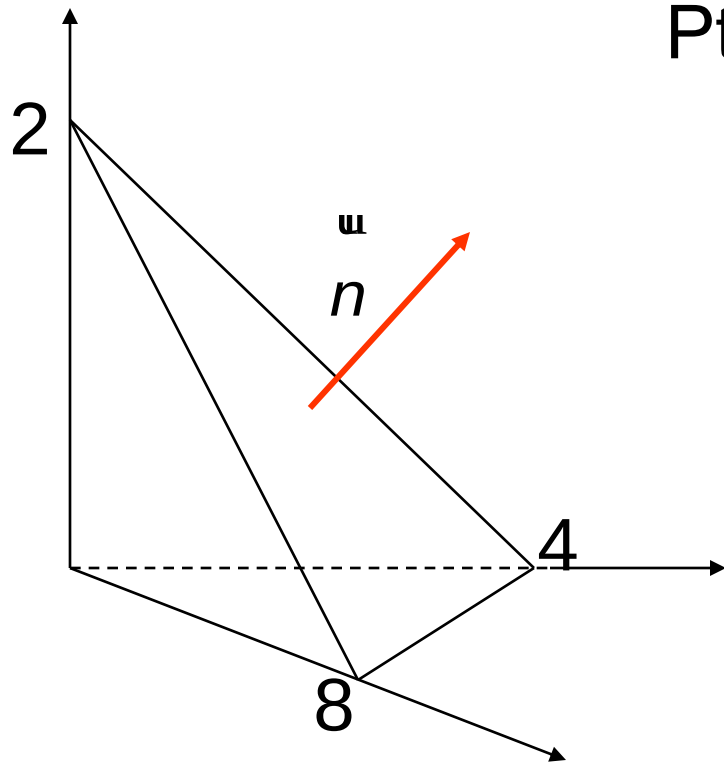
1. Tính $\vec{\nabla} F = (F_x, F_y, F_z)$

2. Xác định **1 trong 3** góc α, β, γ xem góc là **nhọn** hay là **tù** để suy ra 1 trong 3 tọa độ của pháp vecto là **dương** hay **âm**

3. Xác định dấu của pháp vecto

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Ví dụ 1: Tính pháp vecto của mặt S với S là phía trên mặt phẳng $x+2y+4z=8$



$$\vec{n} = + \frac{1}{\sqrt{21}} (1, 2, 4)$$

Pt mặt S: $F(x,y,z) = x+2y+4z-8(=0)$

$$\rightarrow \vec{\nabla} F = (1, 2, 4)$$

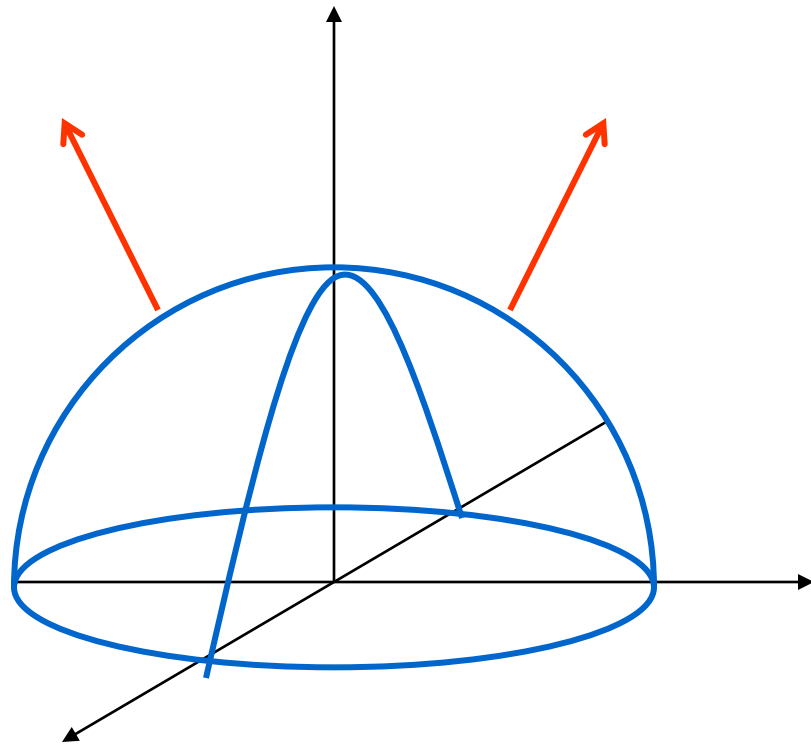
Hướng của mặt S là phía trên tức là vecto pháp cùng hướng với nửa dương trục Oz, nên:

$$g = g(\vec{Oz}, \vec{n}) < \frac{p}{2} \rightarrow \cos \gamma > 0$$

Vậy dấu cần lấy là “+” để tọa độ thứ 3 là dương.

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Ví dụ 2: Cho S là phía trên của nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geq 0$. Tính pháp vecto của S



$$\vec{n} = + \frac{(x, y, z)}{R}$$

Pt mặt S là

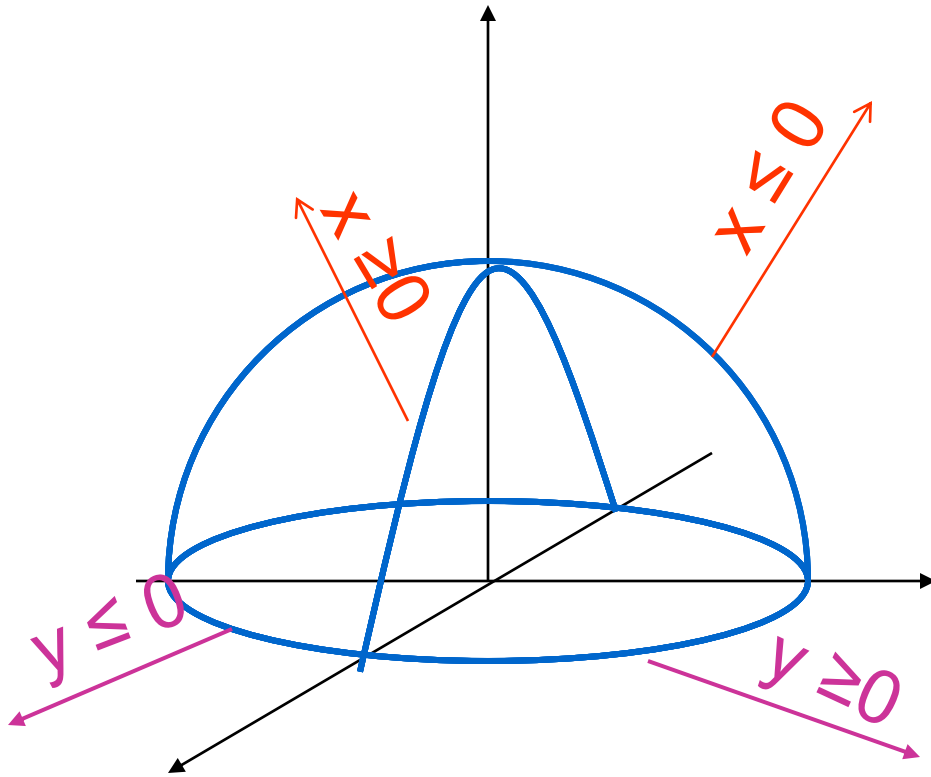
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 (=0)$$

$$\vec{\nabla} F = (2x, 2y, 2z)$$

Cho S là phía trên tức là pháp vecto cùng hướng với nửa dương trục Oz , suy ra góc $\gamma \leq \pi/2$ nên $\cos \gamma > 0$

Vì mặt S chỉ tính với z dương nên ta chọn dấu “+” để tọa độ thứ 3 của pháp vecto dương

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt



$$\vec{n} = + \frac{(x, y, z)}{R}$$

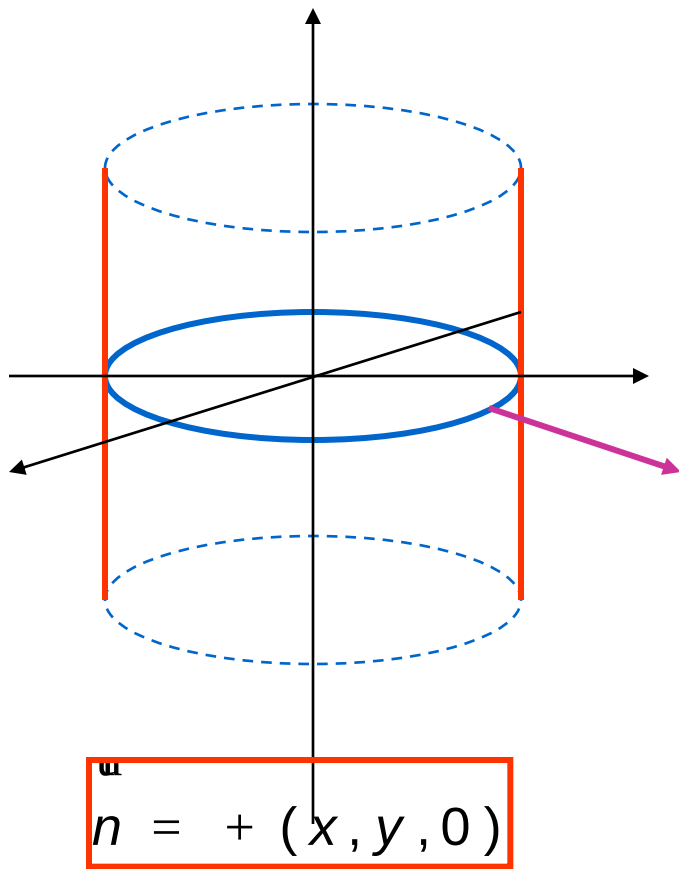
Khi đó, 2 góc α , β là nhọn hay tù sẽ phụ thuộc vào x , y là dương, hay âm

Với $x \geq 0$: thành phần thứ nhất dương tức là $\cos \alpha \geq 0 \rightarrow \alpha \leq \pi/2$ và $x \leq 0$: $\cos \alpha \leq 0 \rightarrow \alpha \geq \pi/2$

Với $y \geq 0$: $\cos \beta \geq 0 \rightarrow \beta \leq \pi/2$ và $y \leq 0$: $\cos \beta \leq 0 \rightarrow \beta \geq \pi/2$

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Ví dụ 3: Tính pháp vecto của mặt S là phía ngoài mặt trụ $x^2+y^2=1$



Pt mặt S: $F(x,y,z)=x^2+y^2-1(=0)$

$$\vec{\nabla} F = (x, y, 0)$$

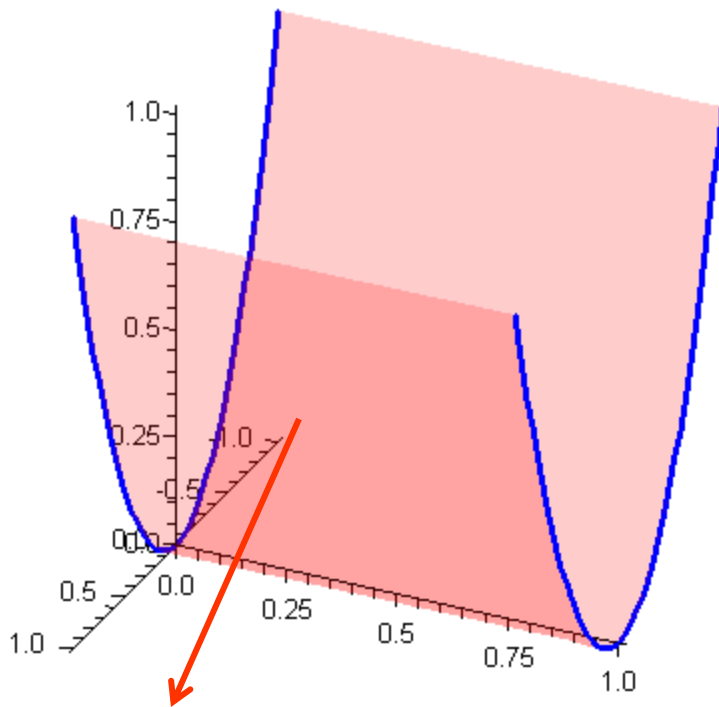
Rõ ràng, S là mặt trụ song song với trục Oz nên pháp vecto vuông góc với trục Oz tức là $\gamma = \pi/2 \rightarrow \cos \gamma = 0$

Pháp vecto hướng ra phía ngoài, ta sẽ so với nửa dương trục Oy, thì $\beta \leq \pi/2 \rightarrow \cos \beta \geq 0$

Ta chọn dấu sao cho khi $y > 0$ thì thành phần thứ 2 của vecto cũng dương tức là chọn dấu “+”

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Ví dụ 4: Tìm pháp vecto của mặt S là phía dưới của mặt trụ $z=x^2$



Pt mặt S: $F(x,y,z)=x^2-z(=0)$

$$\tilde{N} F = (2x, 0, -1)$$

Mặt S là phía dưới tức là pháp vecto ngược với hướng nửa dương trục Oz, tức là

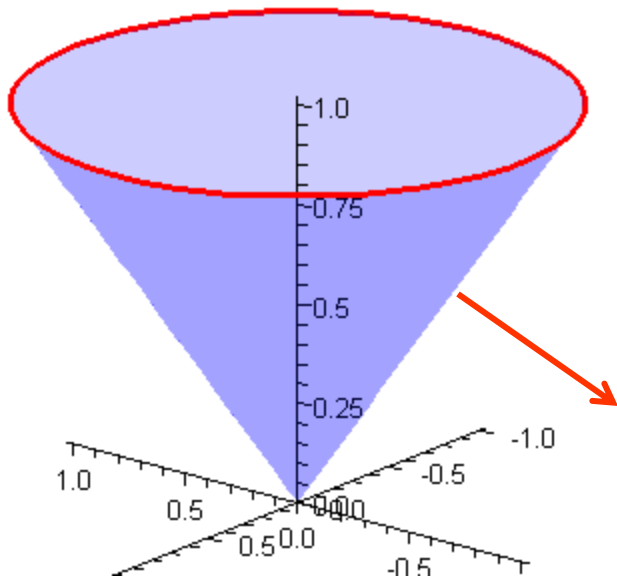
$$\gamma > \pi/2 \rightarrow \cos \gamma < 0$$

Vậy để tọa độ thứ 3 của pháp vecto âm, ta sẽ chọn dấu “+”

$$\vec{n} = + \frac{(2x, 0, -1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Tích phân mặt loại 2 – Pháp vecto của mặt

Ví dụ 5: Tìm pháp vecto của mặt S là phía dưới của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Pt mặt S: $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$

$$\vec{N}_F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

Với S là phía dưới mặt nón tức là pháp vecto quay xuống dưới

Ta có $\gamma > \pi/2 \rightarrow \cos \gamma < 0$

Do vậy, ta lấy dấu của pháp vecto là “+” và thay $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ để được :

$$\vec{n} = + \frac{1}{\sqrt{2z}} (x, y, -1)$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Định nghĩa: Cho các hàm $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ xác định trên mặt định hướng S với pháp vectơ đơn vị $\vec{n} = (\cos a, \cos b, \cos g)$

Tp mặt loại 1 của hàm $f(x,y,z)=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ trên mặt S được gọi là tp mặt loại 2 của 3 hàm P , Q , R trên mặt S và kí hiệu là

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \oiint_S (P \cos a + Q \cos b + R \cos g) ds$$

Cách tính: Có 2 cách

Cách 1: Tìm pháp vectơ của mặt S

$$\vec{n} = (\cos a, \cos b, \cos g)$$

Thay vào công thức trên, tức là đưa về tp mặt loại 1

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Cách 2: Ta tính từng phần của tp mặt loại 2 trên

$$I_1 = \iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_S P \cos \alpha ds \quad \text{Theo 4 bước sau}$$

Bước 1: Xác định góc α nhọn (hay tù) để có $\cos \alpha \geq 0$ (hay $\cos \alpha \leq 0$).

Bước 2: Vì cần tính tp theo $dydz$ nên ta tìm hình chiếu của S xuống mp Oyz là D_{yz}

Bước 2: Ta viết lại pt mặt S : $F(x, y, z) = 0 \leftrightarrow x = x(y, z)$
để thay vào hàm P

Bước 4: Đưa tp trên về thành tp kép

$$I_1 = \iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

Trong đó: tp kép lấy dấu **dương** (âm) nếu $\cos \alpha$ **dương** (âm)

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Đặc biệt: Nếu S là phần mặt song song với trục Ox thì góc $\alpha = \pi/2$ tức là $\cos\alpha = 0$, Suy ra

$$I = \iint_S P \, dy \, dz = 0$$

Tính tương tự cho 2 tp còn lại

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Ví dụ 1: Tính $I_1 = \oiint_S z dx dy$ với S là phía ngoài của mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$

Pt mặt S là $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1 \rightarrow \tilde{N} F = (x, y, z), |\tilde{N} F| = 1$

Ta phải chia S thành 2 phần ứng với $z \geq 0$ và $z \leq 0$, chúng đối xứng nhau qua mp $z=0$ và cùng có hình chiếu xuống mp Oxy là **Dxy: $x^2+y^2 \leq 1$**

Ta sẽ tính tp này bằng 2 cách

Cách 1: Tính trực tiếp

Trên mặt **S_1 với $z \geq 0$** , pt S_1 là

$$z = + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

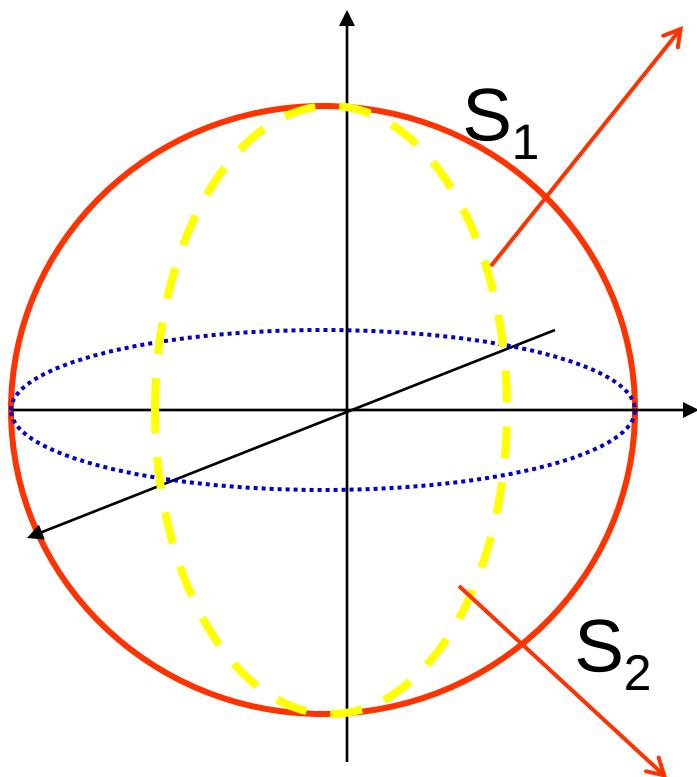
Pháp vectơ hướng ra phía ngoài tức là hướng lên trên, khi đó góc **$\gamma \leq \pi/2$ nên $\cos \gamma \geq 0$** , tp kép lấy dấu “+”

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Vậy

$$I_{11} = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2p} dj \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} dr$$

Tương tự, trên mặt S_2 ứng với $z \leq 0$



$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Pháp vectơ hướng ra ngoài tức là quay xuống dưới nên $\gamma \geq \pi/2$

→ $\cos \gamma \leq 0$, tp kép lấy dấu “-”

Hình chiếu D_{xy} : $x^2 + y^2 \leq 1$

$$I_{12} = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = I_{11}$$

Vậy :

$$I_1 = \frac{4p}{3}$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Cách 2: Chuyển về tích phân mặt loại 1

Mặt S_1 ứng với $z \geq 0$, pháp vectơ hướng lên trên nên

$$\vec{n}_1 = + (x, y, z) \rightarrow \cos \gamma = z \text{ và } z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Mặt S_2 ứng với $z \leq 0$, pháp vectơ hướng xuống dưới nên

$$\vec{n}_2 = (x, y, z) \rightarrow \cos \gamma = z \text{ và } z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Như vậy với cả 2 mặt S_1, S_2 ta đều có $\cos \gamma = z$ và
Tức là ta không cần chia làm 2 tp như cách 1, mà chỉ cần tính trên nửa phía trên rồi nhân đôi.

Vậy:

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

$$I_1 = \oiint_S z dx dy = 2 \oiint_S z \cdot z ds = 2 \iint_{D_{xy}} (1 - x^2 - y^2) \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Ví dụ 2: Cho S là phía trên mặt trụ $z=x^2$ giới hạn bởi các mặt : $y=0$, $y=1$, $z=1$, $z=0$. Tính

$$I_2 = \oiint_S z dx dy + yz dy dz + xyz dz dx$$

Do S là phần mặt trụ $z=x^2$ song song với trục Oy nên

$$I_{23} = \oiint_S xyz dx dz = 0$$

Ghi nhớ: Pt mặt S chỉ chứa x, z thì

$$\oiint_S R dz dx = 0$$

Pt mặt S: $F(x,y,z)=z-x^2=0$ suy ra $\vec{N} F = (-2x, 0, 1)$

S là phía trên mặt trụ tức là pháp vecto hướng lên trên: $\gamma \leq \pi/2$, $\cos \gamma \geq 0$. Vậy ta lấy dấu “+” cho pháp vecto

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Pháp vectơ đơn vị của S:

$$\vec{n} = \frac{(-2x, 0, 1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Ta tính I_{21} theo $dx dy$: $I_{21} = \iint_S z dx dy$

Pt mặt S: $z=x^2$, với $0 \leq z \leq 1$, ta được $0 \leq x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

Hình chiếu xuống mp Oxy là D_{xy} : $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Tọa độ thứ 3 của pháp vectơ dương nên $\cos \gamma \geq 0$

Do vậy :

$$I_{21} = \iint_S z dx dy = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \int_{-1}^1 x^2 dx \int_0^1 dy = \frac{2}{3}$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Pháp vectơ đơn vị của S

$$\vec{n} = \frac{(-2x, 0, 1)}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Tp theo dydz $I_{22} = \iint_S yz \, dy \, dz$

Pt mặt S: $z=x^2$

Hình chiếu xuống mp Oyz là $D_{yz}: 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Tọa độ thứ nhất của pháp vectơ phụ thuộc vào x nên ta sẽ chia S thành 2 phần ứng với $x \geq 0$ và $x \leq 0$

$$I_{22} = \iint_{S, x \geq 0} yz \, dy \, dz + \iint_{S, x \leq 0} yz \, dy \, dz$$

Pt mặt trụ chẵn đối với x, 4 mặt cắt trụ đều có pt không chứa x nên mặt S nhận $x=0$ là mặt đối xứng.

tức là hình chiếu Dyz của 2 phần mặt $(S, x \geq 0)$ và $(S, x \leq 0)$ như nhau $\rightarrow$ miền lấy tp của 2 tp trên như nhau

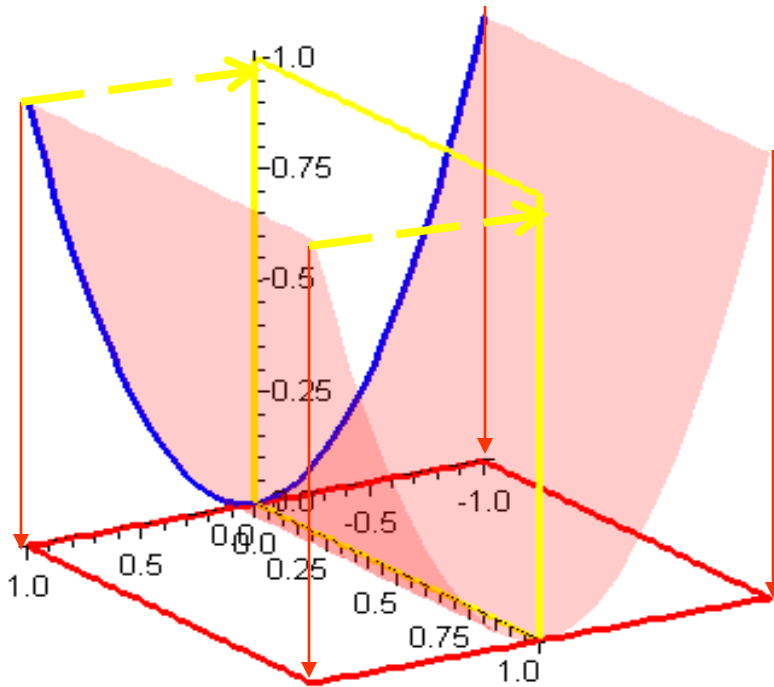
Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Suy ra tp I_{22} là tổng 2 tp có cùng hàm dưới dấu tp là yz , cùng miền lấy tp là D_{yz} nhưng dấu thì ngược nhau

$$I_{22} = + \iint_{D_{yz}} yz dy dz - \iint_{D_{yz}} yz dy dz = 0$$

Vậy

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} = \frac{2}{3}$$



Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

Ví dụ 3: Cho S là phía trên mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

Tính
$$I_3 = \oiint_S z^2 dx dy + z dy dz + y^2 dz dx$$

Do $z \geq 0$ nên pt mặt S là

$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

$$\tilde{N} F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

Ta lấy S là phía trên mặt nón tức là $\gamma \leq \pi/2 \rightarrow \cos \gamma \geq 0$
Vậy pháp vectơ của S là

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

$$\vec{n}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

Tp theo dxdy : $I_{31} = \iint_S z^2 dx dy, \cos g = \frac{1}{\sqrt{2}}, z^2 = x^2 + y^2$

Hình chiếu của S xuống mp $z=0$ là

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$$

Suy ra: $I_{31} = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \cdot r^2 dr$

$$I_{31} = \frac{\pi}{2}$$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

$$\vec{n}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

Tính tp theo dydz :
$$I_{32} = \oiint_S z dy dz, \cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$$

Vì $\cos \alpha$ phụ thuộc vào x nên ta phải chia S thành 2 phần ứng với $x \geq 0$ và $x \leq 0$, 2 phần đó đối xứng nhau qua mp $x=0$ vì pt S là chẵn đối với x

2 tp trên 2 phần đó, khi chuyển sang tp kép sẽ có hàm dưới dấu tp cùng là $f(x,y,z)=z$, hình chiếu cùng là D_{yz} : $-z \leq y \leq z, 0 \leq z \leq 1$ nhưng trái dấu nhau vì 2 nửa cho ta 2 pháp vecto ngược nhau

Vậy $I_{32}=0$

Tích phân mặt loại 2 – Cách tính

$$\vec{n}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

Tính tp theo $dx dz$: $I_{33} = \oiint_S y^2 dy dz, \cos b = \frac{-y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$

Tương tự tp I_{32} , ta cũng được : $I_{32}=0$

Vậy :

$$I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33} = \frac{p}{2}$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Công thức Gauss – Ostrogradski:

Cho miền V đóng, bị chặn trong không gian có biên là mặt S trơn từng khúc. Các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trong miền mở chứa V . Ta có công thức

$$\oint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz$$

Trong đó: Tụ bộ 3 lấy dấu “+” nếu S là mặt biên phía ngoài V và lấy dấu “-” nếu S là mặt biên phía trong V

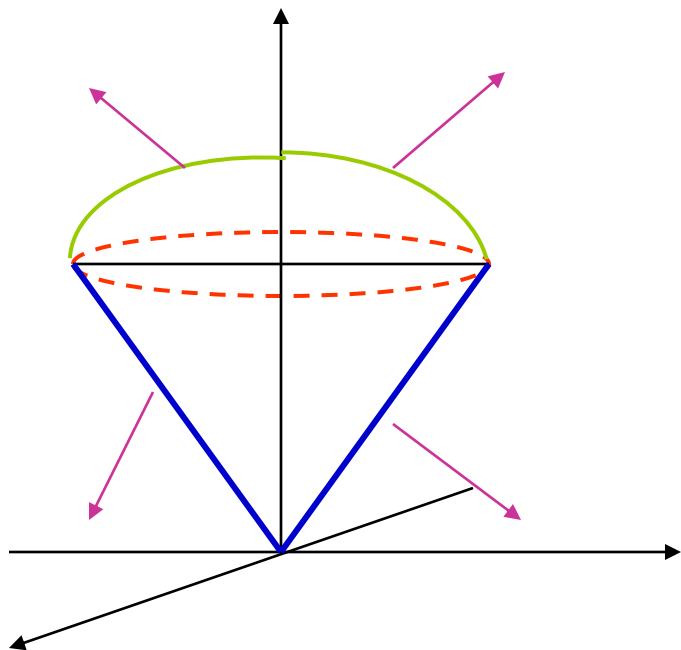
Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Ví dụ 4: Cho mặt S là phía ngoài vật thể giới hạn bởi :

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ và $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ Tính tp sau bằng 2 cách trực tiếp và dùng CT Gauss

$$I_3 = \oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z dx dy$$

Cách 1: Tính trực tiếp



Mặt S gồm 2 mặt S_1 là phía trên mặt cầu với $\sqrt{3} \leq z \leq 2$

Và S_2 là phía dưới mặt nón với $0 \leq z \leq \sqrt{3}$

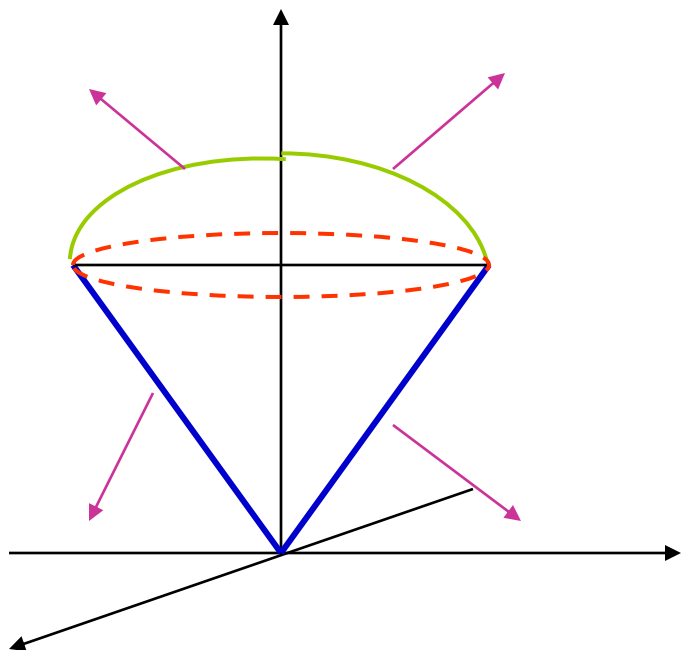
Trên mặt S_1, S_2 , ta thấy chúng đều nhận mp $x=0$, mp $y=0$ là mặt đối xứng

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Do đó, các tp tính theo $dydz$, $dzdx$ đều chia thành 2 phần với hình chiếu như nhau và dấu tp kép trái nhau.

Hơn nữa, 2 tp đó đều có hàm dưới dấu tp kép giống nhau. Ta được:

$$\oiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx = 0$$



Tích phân trên mặt S_1 : pt mặt

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Lấy phía trên mặt cầu tức là $y \leq \pi/2$, tp kép lấy dấu “+”

Hình chiếu xuống mp $z=0$ là
 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 2$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

$$\oiint_{S_1} z dx dy = + \oiint_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

Tích phân trên mặt S_2 : pt mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Lấy phía dưới mặt nón tức là $\varphi \geq \pi/2$, tp kép lấy dấu “-”

Hình chiếu xuống mp $z=0$ là $D_{xy}: x^2+y^2 \leq 1$

$$\oiint_{S_2} z dx dy = - \oiint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$\text{Vậy: } I_3 = + \oiint_{D_{xy}} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy - \oiint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} dj \int_0^1 r (\sqrt{4 - r^2} - r) dr$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Cách 2: S là mặt biên phía ngoài miền V giới hạn bởi

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

Hình chiếu của V xuống mp $z=0$ là hình tròn $x^2+y^2 \leq 1$

Áp dụng CT Gauss, ta được

$$I_3 = \iiint_V (2x + 2y + 1) dx dy dz$$

$$I_3 = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} (2x + 2y + 1) dz$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} dj \int_0^1 r (\sqrt{4 - r^2} - r) (2r \cos j + 2r \sin j + 1) dr$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Ví dụ 4: Cho S là mặt biên phía trong của V giới hạn bởi $x^2+y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq x^2+y^2$. Tính tích phân

$$I_4 = \oiint_S ydydz + xydzdx - zdx dy$$

Áp dụng CT Gauss, ta được

$$I_4 = - \iiint_V (0 + x - 1) dx dy dz$$

$$I_4 = - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x-1) dx dy \int_0^{x^2+y^2} dz$$

$$I_4 = - \int_0^{2\pi} dj \int_0^2 r \cdot r^2 (r \cos j - 1) dr$$

$$= - \int_0^{2\pi} \cos j \, dj \int_0^1 r^4 dr + \int_0^{2\pi} dj \int_0^1 r^3 dr$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Gauss

Ví dụ 5: Cho S là mặt biên ngoài của V : $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=2$. Tính $I_5 = \oiint_S xz dydz + xz dzdx + xy dxdy$

Cách 1: Áp dụng CT Gauss

$$I_5 = + \oiint_V (z + 0 + 0) dx dy dz$$

$$I_5 = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} z dz$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Công thức Stokes:

Cho mặt định hướng S trơn từng khúc có biên là đường cong kín C trơn từng khúc và không tự cắt. Các hàm P, Q, R và các đh riêng cấp 1 liên tục trong miền mở chứa S . Ta có CT Stokes

$$\iint_S (Q_x - P_y) dx dy + (P_z - R_x) dz dx + (R_y - P_z) dy dz \\ = \oint_C (P dx + Q dy + R dz)$$

Trong đó, hướng của C được lấy sao cho khi đứng phía mặt S và đi theo hướng đó thì ta thấy S bên trái.

Ghi chú: Nếu C lấy **ngược chiều kim đồng hồ** nhìn từ phía **$z > 0$** ($z < 0$) thì hướng trên mặt S là **cùng phía** (ngược phía) với trục Oz , tức là góc **$\gamma \leq \pi/2$** ($\gamma \geq \pi/2$)

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Công thức Stokes còn được dùng ở dạng liên hệ giữa tp đường loại 2 và tp mặt loại 1 như sau

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S (Q_x - P_y) \cos \alpha + (P_z - R_x) \cos \beta + (R_y - Q_z) \cos \gamma \, dS$$

Trong trường hợp C là giao của 1 mp và 1 mặt cong vì khi đó ta sẽ chọn S là phần mp bị cắt bởi mặt cong, suy ra pháp vectơ của S là hằng số.

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Ví dụ 6: Tính $I_6 = \oint_C ydx + zdy + xdz$

Với C là giao của mặt $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=4$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía $z>0$

Cách 1: Áp dụng CT Stokes

Vì C là giao của mp $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=4$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía $z>0$

Nên ta chọn S là phần mp $x+y+z=0$ nằm phía trong mặt cầu, lấy phía trên. S là hình tròn tâm tại O, bán kính bằng 2

Suy ra vectơ chỉ phương của S là

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Và ta sử dụng CT Stokes dưới dạng:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \gamma \right) dS$$

Để được :

$$\begin{aligned} I_6 &= \oint_C y dx + z dy + x dz \\ &= \iint_S \left[(0 - 1) \frac{1}{\sqrt{3}} + (0 - 1) \frac{1}{\sqrt{3}} + (0 - 1) \frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS \\ &= -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3} \cdot S \end{aligned}$$

Trong đó S là diện tích mặt S,

Vậy $I_6 = -4\sqrt{3}p$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Cách 2: Tính trực tiếp bằng cách viết pt tham số của C
(Xem trong phần tp đường loại 2- pt tham số)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cos t - \frac{\sqrt{6}}{3} \sin t \\ y &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \sin t \\ z &= -\sqrt{2} \cos t - \frac{\sqrt{6}}{3} \sin t \\ t &\text{ từ } 0 \text{ đến } 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos t \\ y &= \frac{2\sqrt{6}}{3} \cos t \\ z &= \sqrt{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{3} \cos t \\ t &\text{ từ } 0 \text{ đến } 2\pi \end{aligned}$$

$$I_6 = \oint_C \tilde{N} \cdot dy dx + z dy + x dz = \int_0^{2\pi} -\sqrt{12} dt = -4\sqrt{3}\pi$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Ví dụ 7: Tính tp $I_7 = \oint_C y dx - z dy + dz$

Với C là giao tuyến của $x^2+y^2+z^2=4y$ và $x=y-2$ lấy cùng chiều kim đồng hồ nhìn từ phía $x>0$ bằng 2 cách : trực tiếp và dùng CT Stokes

Cách 1: Dùng CT Stokes

Chọn S là phần mp $x=y-2$ nằm trong hình cầu, lấy hướng ngược với nửa dương trục Ox

Suy ra $\alpha \geq \pi/2 \rightarrow \cos \alpha \leq 0$

Pt mặt S là $F(x,y,z)=x-y+2(=0)$: $\tilde{N} F = (1, -1, 0)$

Vì $\cos \alpha \leq 0$, nên ta chọn dấu “-” cho pháp vecto

$$\vec{n} = - \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$

Vậy:

$$I_7 = \oint_C \vec{N} \cdot d\vec{r} = \oint_C (y dx - z dy + dz)$$

$$= \iint_S [(0 - 1) \cdot 0 + (0 - 0) \frac{1}{\sqrt{2}} + (0 + 1)(-\frac{1}{\sqrt{2}})] ds$$

S là phần mp $x=y-2$ nằm trong hình cầu. Ta kẻ x từ 2 pt để được hình chiếu của S xuống mp $x=0$ là

$$D_{yz}: 2(y-2)^2 + z^2 \leq 4, \quad ds = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz = \sqrt{2} dy dz$$

Suy ra
$$I_7 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{D_{yz}} \sqrt{2} dy dz$$

$$I_7 = -2\sqrt{2}p$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Cách 2: Viết pt tham số của C

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4y \\ x = y - 2 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} 2(y - 2)^2 + z^2 = 4 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2 + \sqrt{2} \cos t \\ z = 2 \sin t \\ t \text{ đi từ } 0 \text{ đến } 2\pi \end{cases} \quad \text{p} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \sin t \\ y = -\sqrt{2} \sin t \\ z = 2 \cos t \end{cases}$$

$$I_7 = \oint_C y dx - z dy + dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [(2 + \sqrt{2} \cos t)(-\sqrt{2} \sin t) - 2 \sin t] dt$$

$$I_7 = -2\sqrt{2}\pi$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Ví dụ 8: Tính $I_8 = \oint_C (x + y)dx + (2x - z)dy + ydz$

Với C là giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ và $z = y^2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía $z > 0$

Cách 1: Dùng CT Stokes

Vì C là giao tuyến của 2 mặt trụ, ta chưa biết nên chọn S là mặt nào nên ta sẽ dùng CT Stokes để viết I_8 dưới dạng Tp mặt loại 2 trước

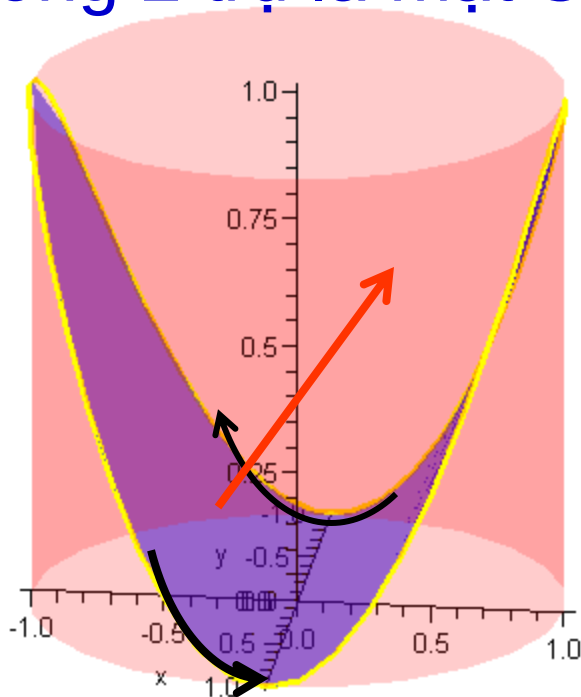
$$I_8 = \oint_C (x + y)dx + (2x - z)dy + ydz$$

$$= \iint_S (2 - 1)dx dy + (0 - 0)dz dx + (1 + 1)dy dz$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Để tính I_g , ta sẽ phải tính 2 tp : tp theo $dx dy$ và $dy dz$.
Tức là ta sẽ phải tìm hình chiếu của S xuống 2 mp $z=0$ và $x=0$.

Như vậy, ta sẽ chọn S sao cho hình chiếu của nó xuống 1 trong 2 mặt trên dễ tìm, vì khi đã chọn xong 1 trong 2 trụ là mặt S thì 1 trong 2 tp phải tính bằng 0



Ta chọn S là phần mặt trụ parabol $z=y^2$ nằm trong trụ tròn xoay $x^2+y^2=1$ lấy phía trên,

suy ra $y \leq \pi \rightarrow \cos y \geq 0$

Pt mặt S : $F(x,y,z) = y^2 - z$

$$\tilde{N} F = (0, 2y, -1)$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Pháp vectơ mặt S:

$$\vec{n} = - \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 1}} (0, 2y, -1)$$

$$I_8 = \oint_C \vec{N} \cdot (x + y) dx + (2x - z) dy + y dz$$

$$= \iint_S (2 - 1) dx dy + (0 - 0) dz dx + (1 + 1) dy dz$$

Để tính tp mặt loại 2 trên, ta có 2 cách: tính trực tiếp hoặc đưa về tp mặt loại 1

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Tính trực tiếp:

Vì S là mặt trụ song song với Ox (Pt chỉ chứa y, z) nên $\vec{r}$ theo $dydz$ bằng 0. Do đó:

$$I_8 = \iint_S dx dy \quad \text{Với } \cos \gamma > 0 \text{ và hình chiếu } D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$$

Vậy :

$$I_8 = + \iint_{D_{xy}} dx dy = p$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Đưa I_8 về thành tp mặt loại 1 Ta có:

$$\vec{n} = - \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 1}} (0, 2y, -1) = (\cos a, \cos b, \cos g)$$

Suy ra

$$\cos a = 0, \quad \cos b = \frac{-2y}{\sqrt{4y^2 + 1}}, \quad \cos g = \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 1}}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} I_8 &= \iint_S (2 - 1)dx dy + (0 - 0)dz dx + (1 + 1)dy dz \\ &= \iint_S [1 \cdot \cos g + 2 \cdot \cos a] ds \end{aligned}$$

Pt mặt S: $z=y^2$ nên $ds = \sqrt{1 + 4y^2} dx dy$

Vậy:

$$I_8 = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{4y^2 + 1}} \sqrt{4y^2 + 1} dx dy \quad \boxed{I_8 = p}$$

Tích phân mặt loại 2 – Công thức Stokes

Ví dụ 8: Tính $I_8 = \oint_C (x + y)dx + (2x - z)dy + ydz$

Với C là giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ và $z = y^2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía $z > 0$

Cách 2: Tính trực tiếp bằng cách viết pt tham số của C

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = y^2 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin^2 t \\ t \text{ đi từ } 0 \text{ đến } 2\pi \end{cases}$$

Vậy:

$$I_8 = \int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (2\cos t - \sin^2 t)\cos t + \sin t \cdot 2\sin t \cos t] dt$$

$$I_8 = p$$