

TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

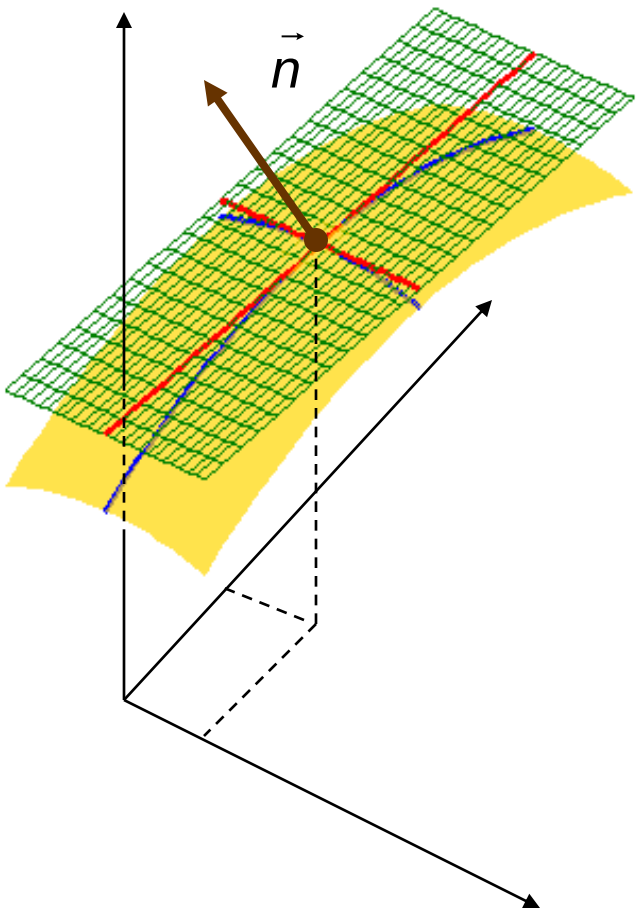
PHÁP TUYẾN CỦA MẶT CONG.

Cho mặt cong $S: F(x, y, z) = 0$, $M(x_0, y_0, z_0) \in S$

- L là đường cong trong S đi qua M . Tiếp tuyến của L tại M gọi là **tiếp tuyến của S tại M** .

- Các tiếp tuyến này cùng thuộc 1 mặt phẳng gọi là **mặt tiếp diện của S tại M** .

- Pháp tuyến của mặt tiếp diện tại M gọi là **pháp tuyến của S tại M** .



PHÁP TUYẾN MẶT CONG

Giả sử $L \subset S$ có pt: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$M = (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in L$$

Vt chỉ phương của tiếp tuyến tại M là :

$$\vec{u} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

$M \in S: F(x,y,z) = 0$, ta có:

$$F'_x(M) x'(t_0) + F'_y(M) y'(t_0) + F'_z(M) z'(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \perp (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$$

$$x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0) \perp F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)$$

(đúng với mọi đường cong trong S và qua M)

$$\Rightarrow \vec{n} = \pm F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M) \text{ và các vector tỷ lệ}$$

là pháp vector của S tại M

Một ký hiệu khác:

$$\text{grad} F(M) = F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)$$

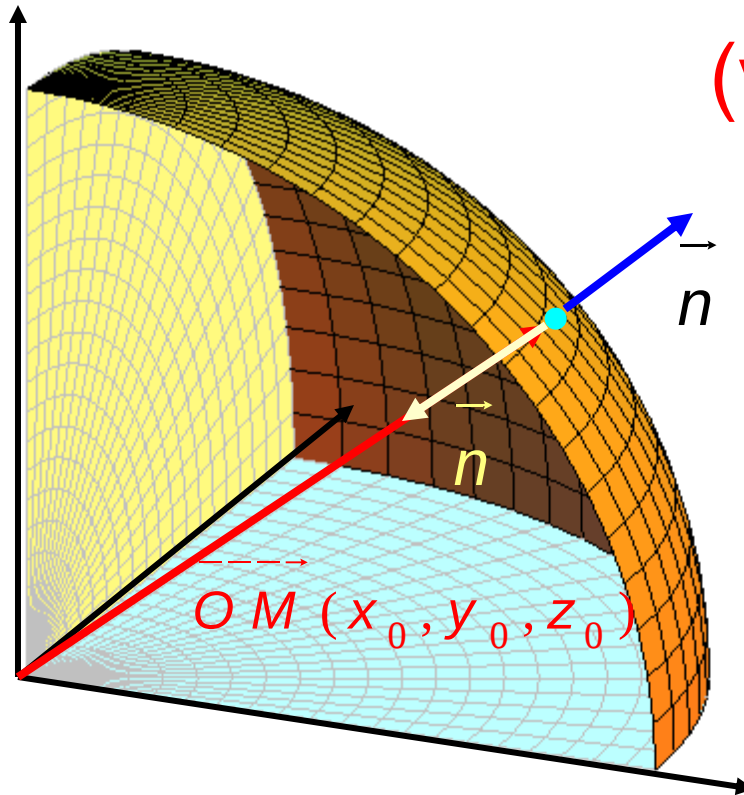
(gradient của F tại M)

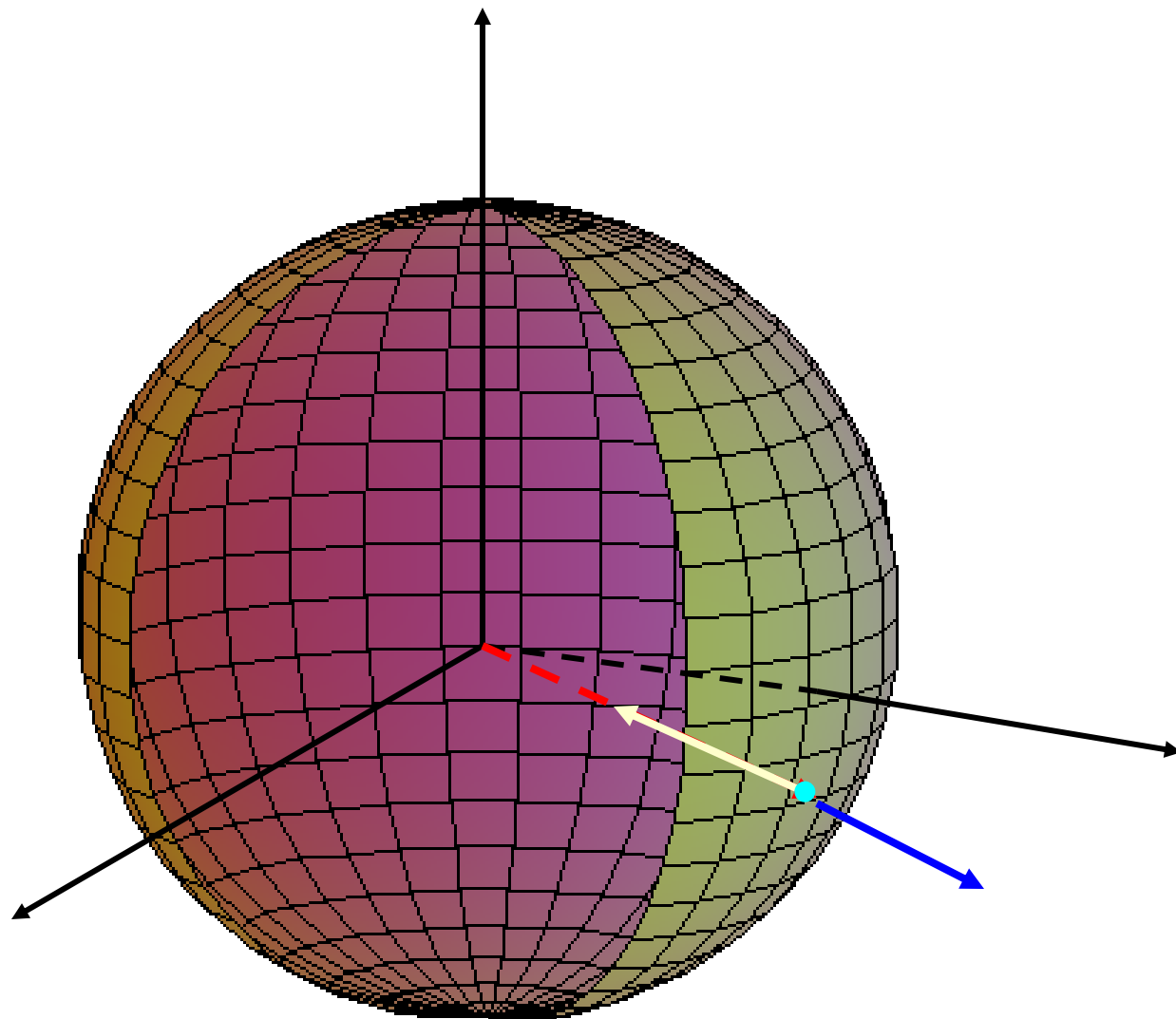
Một số ví dụ tìm pháp vector

a/ Mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \vec{n}(M) = \pm 2x_0, 2y_0, 2z_0$$

(và các vector tỷ lệ)



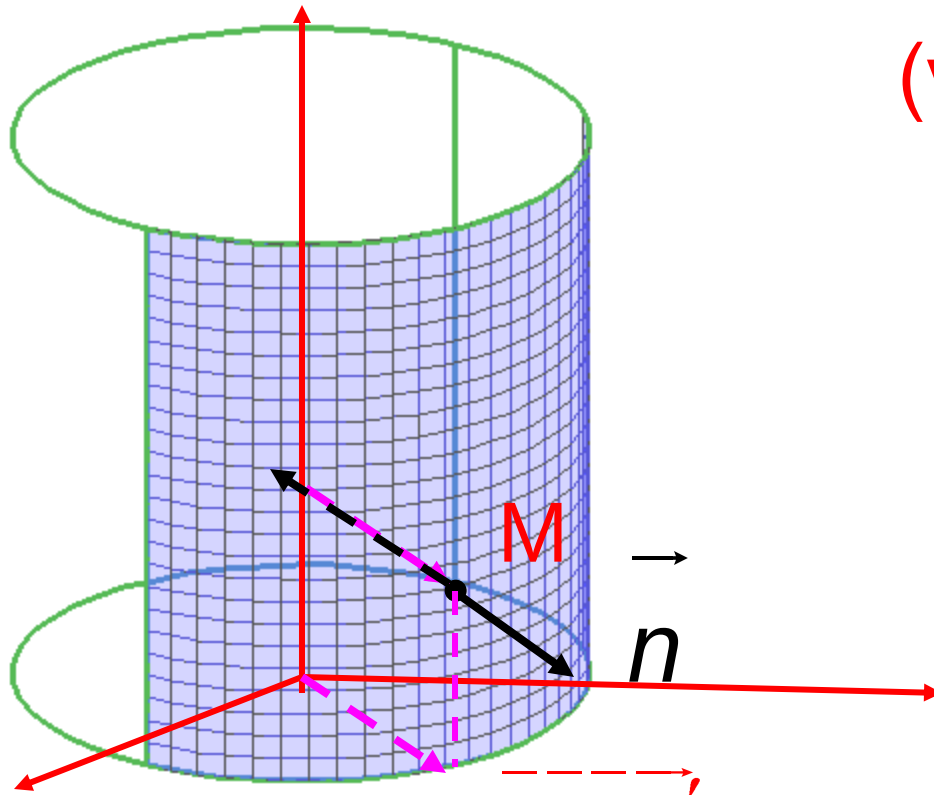


Một số ví dụ tìm pháp vector

a/ Mặt trụ $S : x^2 + y^2 = R^2$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \vec{n}(M) = \pm (2x_0, 2y_0, 0)$$

(và các vector tỷ lệ)

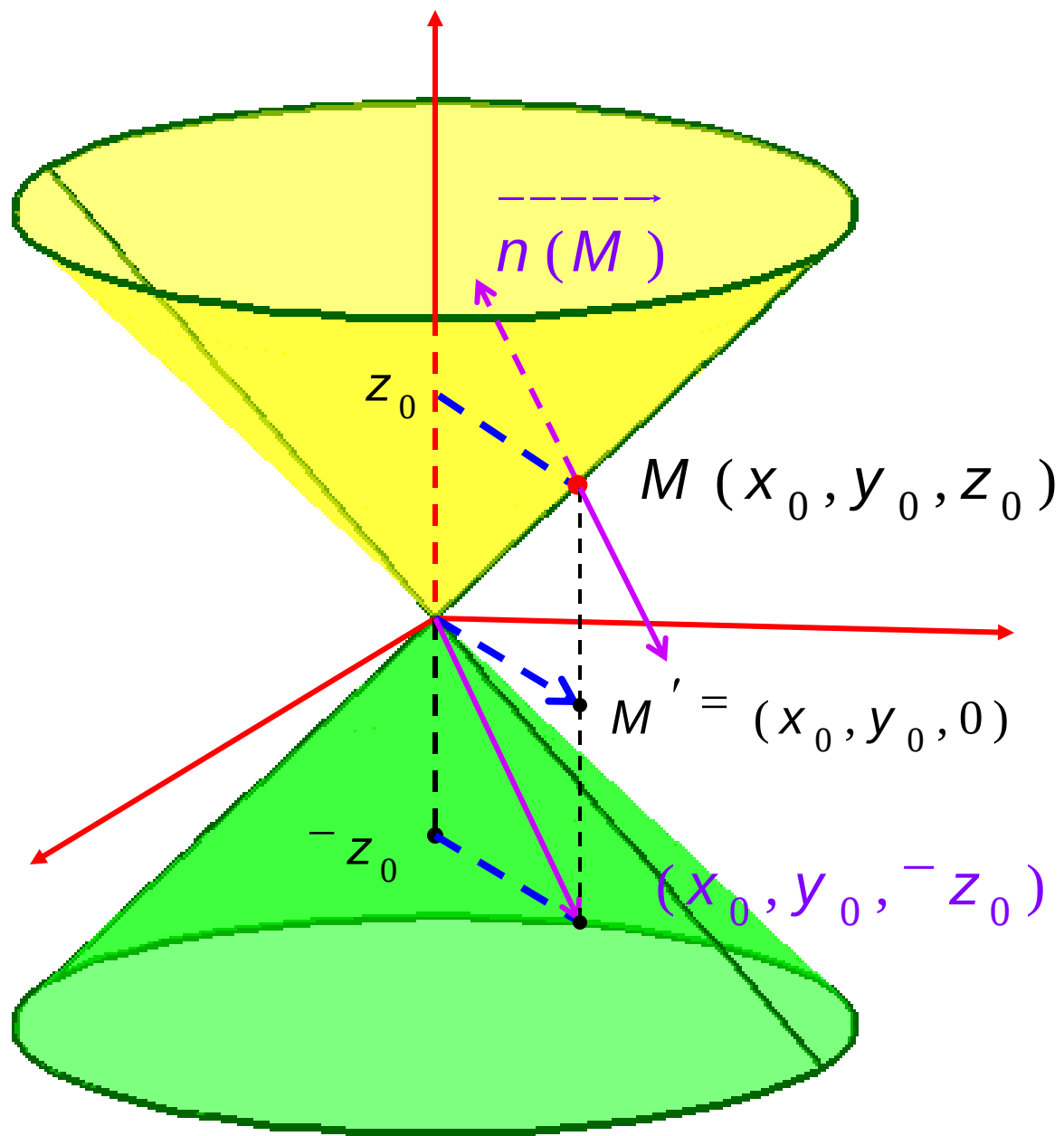


$$\vec{OM'} = (x_0, y_0, 0)$$

Một số ví dụ tìm pháp vector

a/ Mặt nón $S : x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \overrightarrow{n(M)} = \pm 2x_0, 2y_0, -2z_0$$



MẶT ĐỊNH HƯỚNG

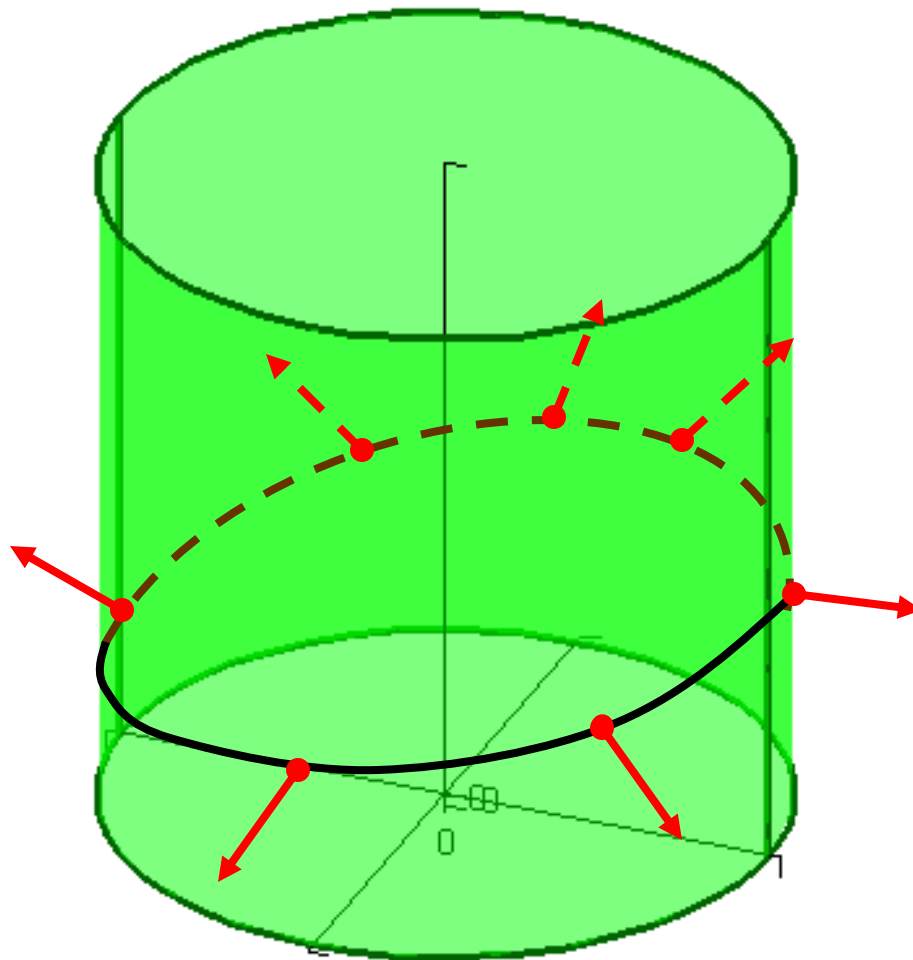
S được gọi là mặt định hướng (mặt 2 phía) nếu cho pháp vector tại $M \in S$ di chuyển dọc theo 1 đường cong kín không cắt biên, khi quay về điểm xuất phát vẫn không đổi chiều.

Ngược lại, pháp vector đảo chiều, thì S được gọi là mặt không định hướng (mặt 1 phía).

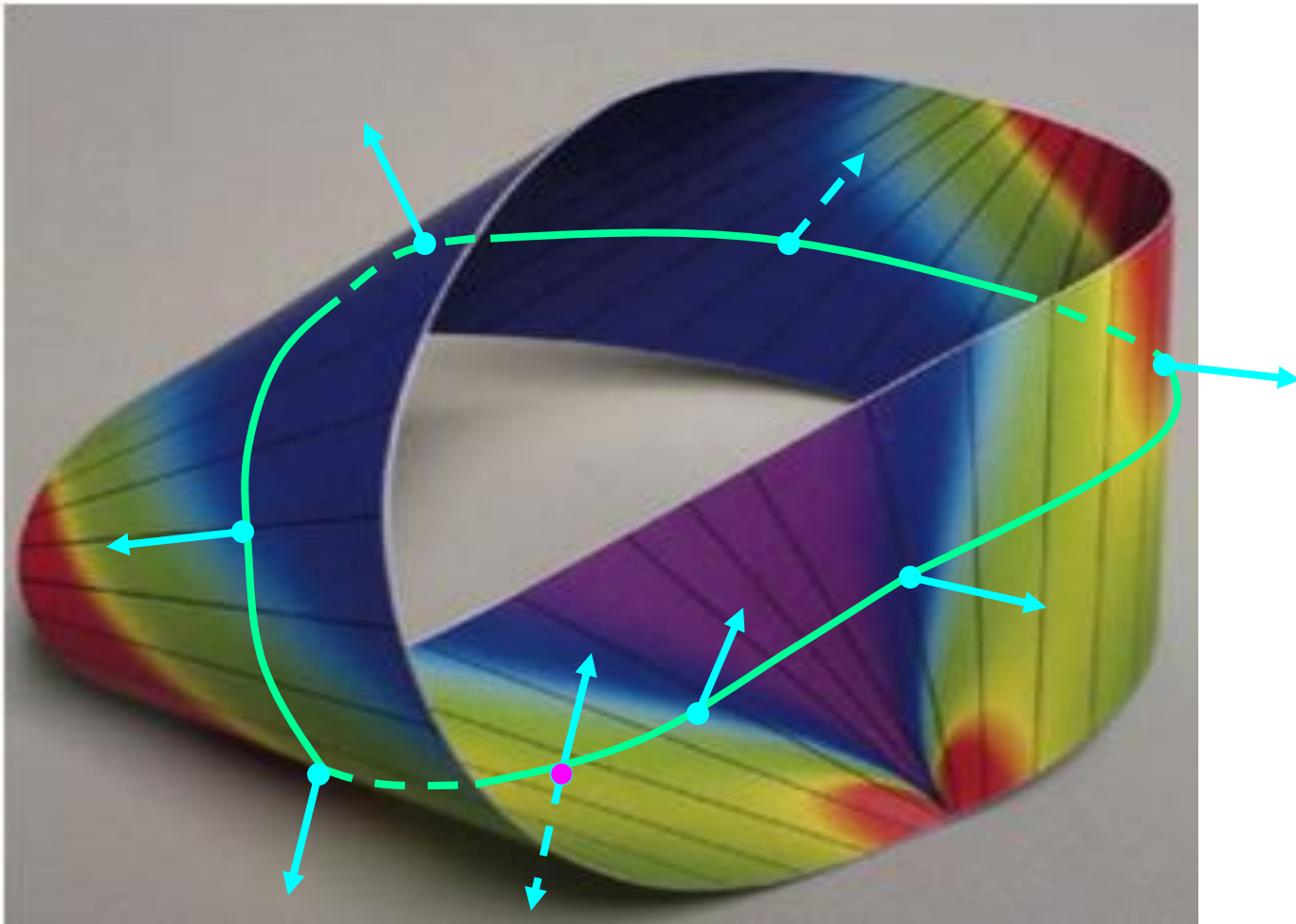
Phía của S là phía mà đứng trên đó, pháp vector hướng từ chân lên đầu.

(Chương trình chỉ xét mặt 2 phía)

Mặt một phía



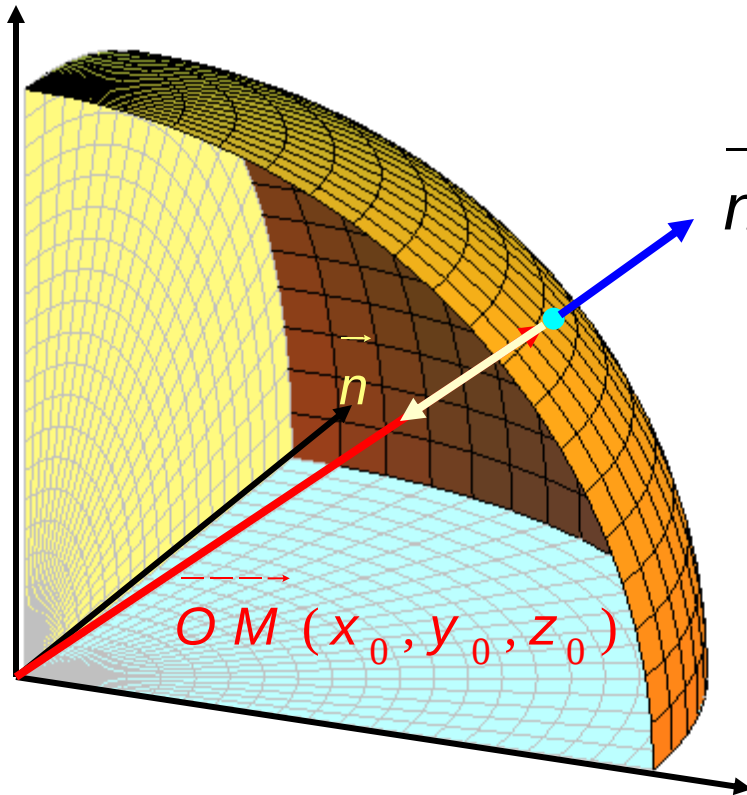
Mặt hai phía



Ví dụ tìm PVT tương ứng với phía mặt cong

a/ Mặt cầu $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S,$$



$$\vec{n} = (x_0, y_0, z_0)$$

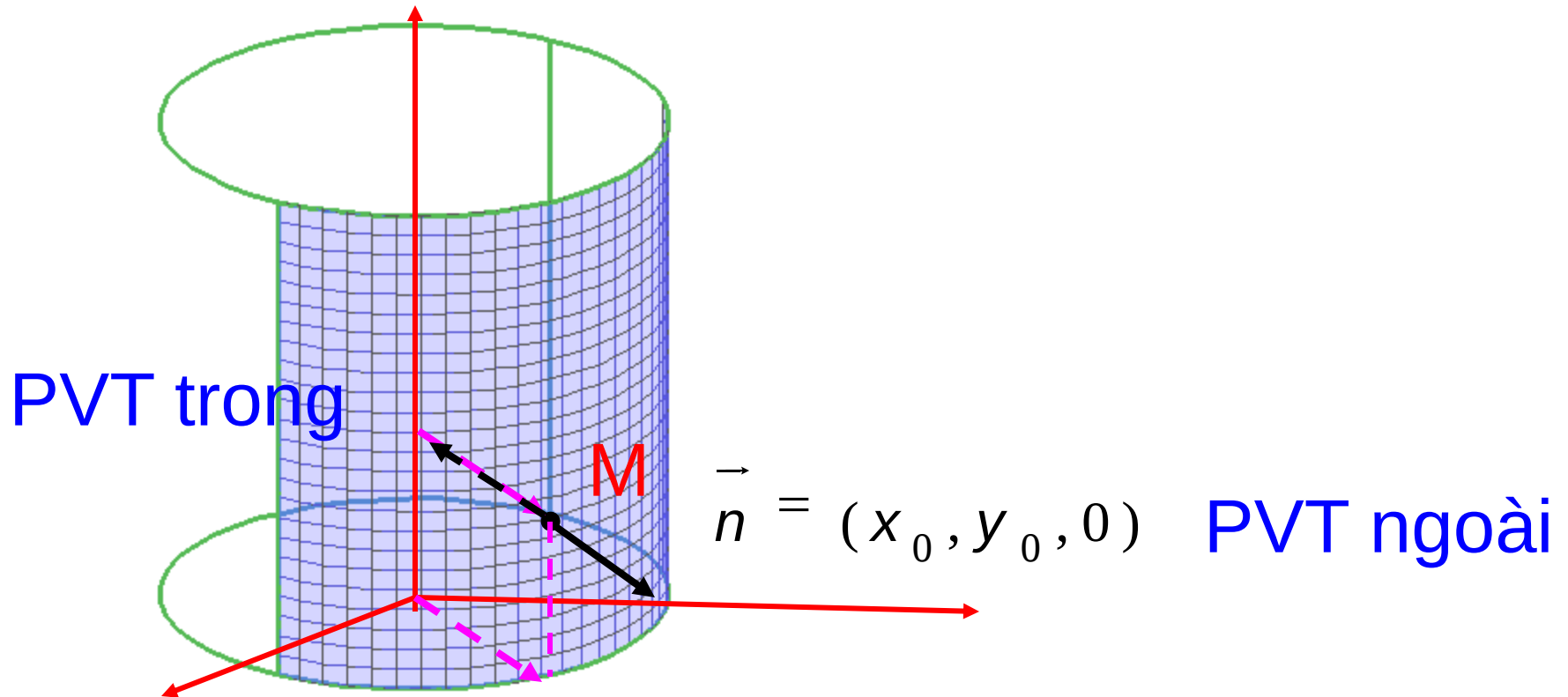
pháp VT ngoài

$$\vec{n} = -(x_0, y_0, z_0)$$

pháp VT trong

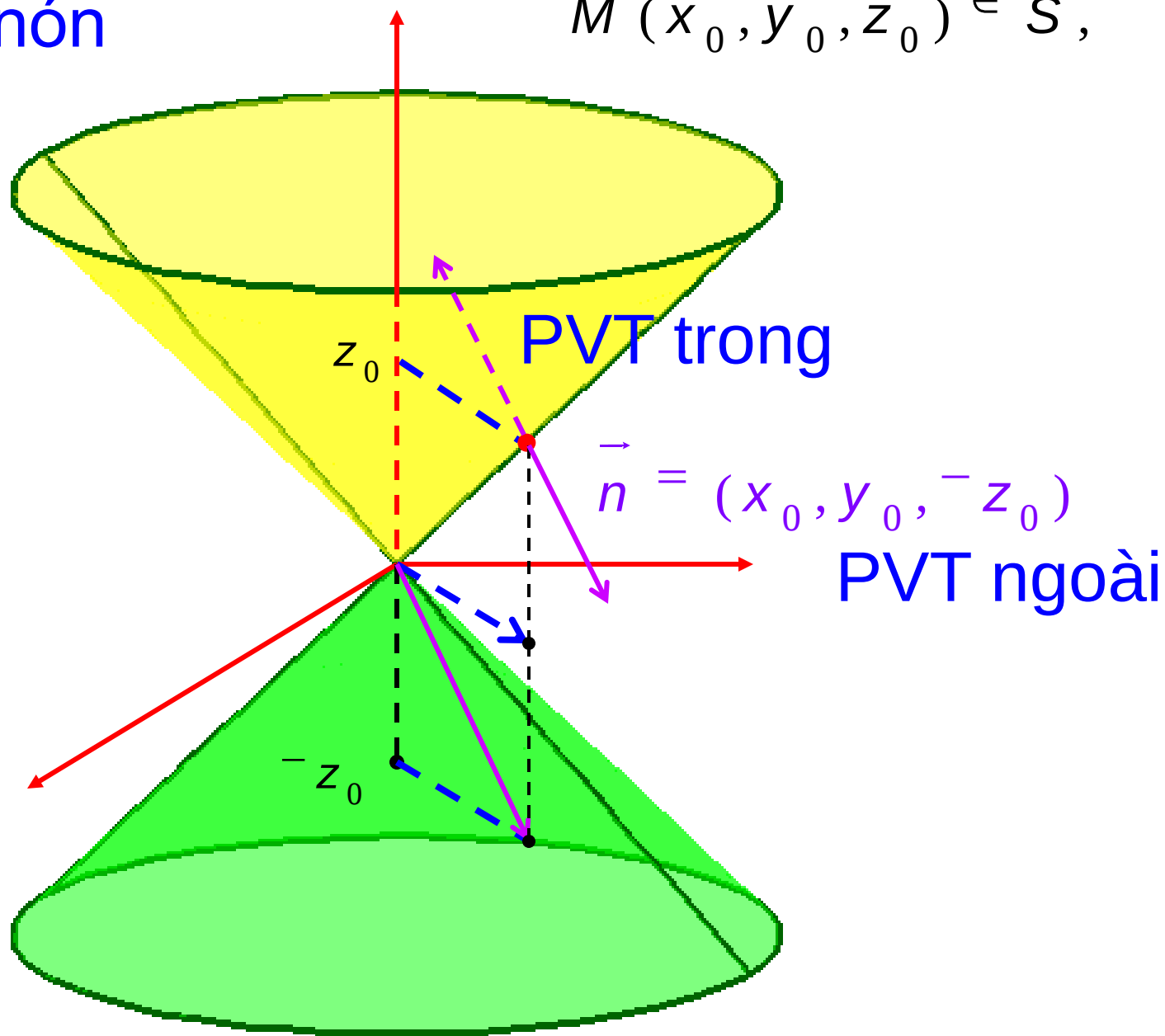
b/ Mặt trụ $S : x^2 + y^2 = R^2$

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S, \quad \vec{n}(M) = \pm (2x_0, 2y_0, 0)$$

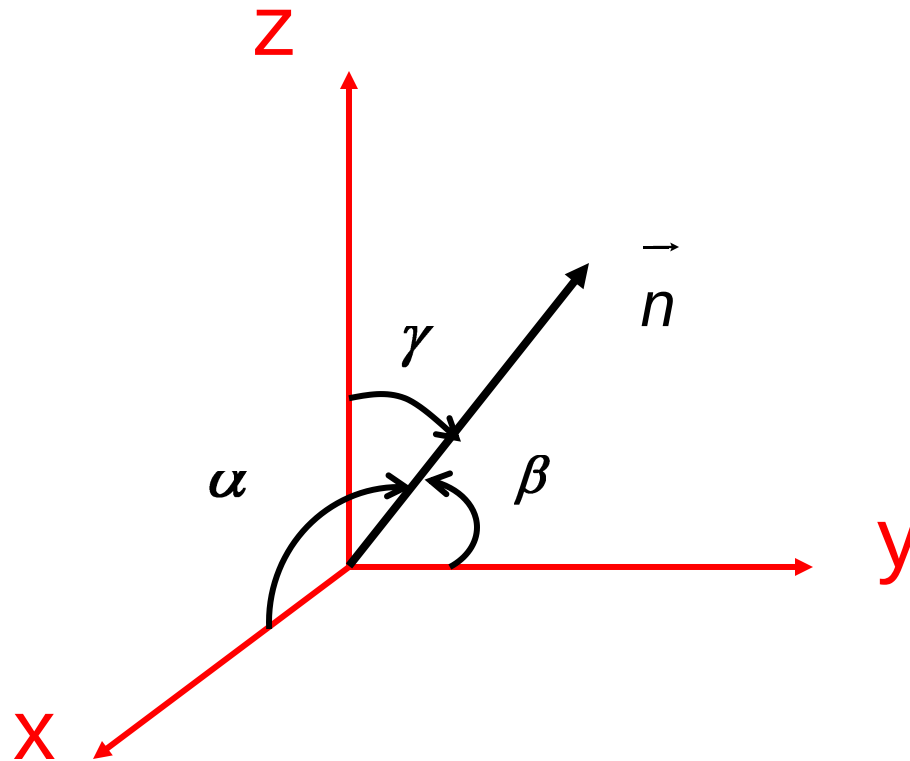


c/ Mặt nón

$$M(x_0, y_0, z_0) \in S,$$



Pháp vector đơn vị



$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng S . Gọi pháp vector đơn vị của S là

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Tích phân mặt loại 2 của P, Q, R trên S định nghĩa bởi

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P, Q, R) \cdot \vec{n} ds$$

$$\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

$$= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

VÍ DỤ

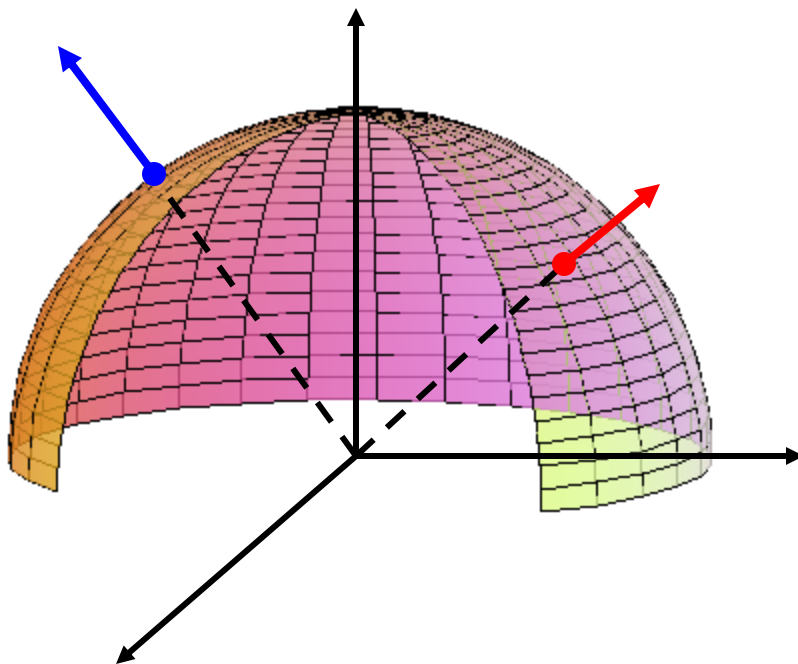
1/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \text{ tính}$$

$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

Tại $M(x, y, z)$ trên S , pháp vector đơn vị là

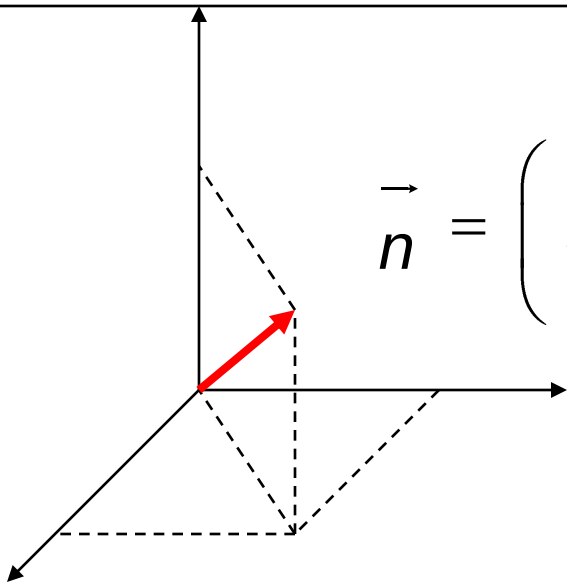
$$\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}$$



$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S (P, Q, R) \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{R} \, ds \\
 &= \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} \, ds = \iint_S \frac{R^2}{R} \, ds = R \iint_S ds \\
 &= 2\pi R^2
 \end{aligned}$$

2/ Cho S là của phần mp $x + y + z = 1$
 bị chặn bởi các mặt tọa độ, lấy phía trước
 nhìn từ phía dương trục Oz, tính

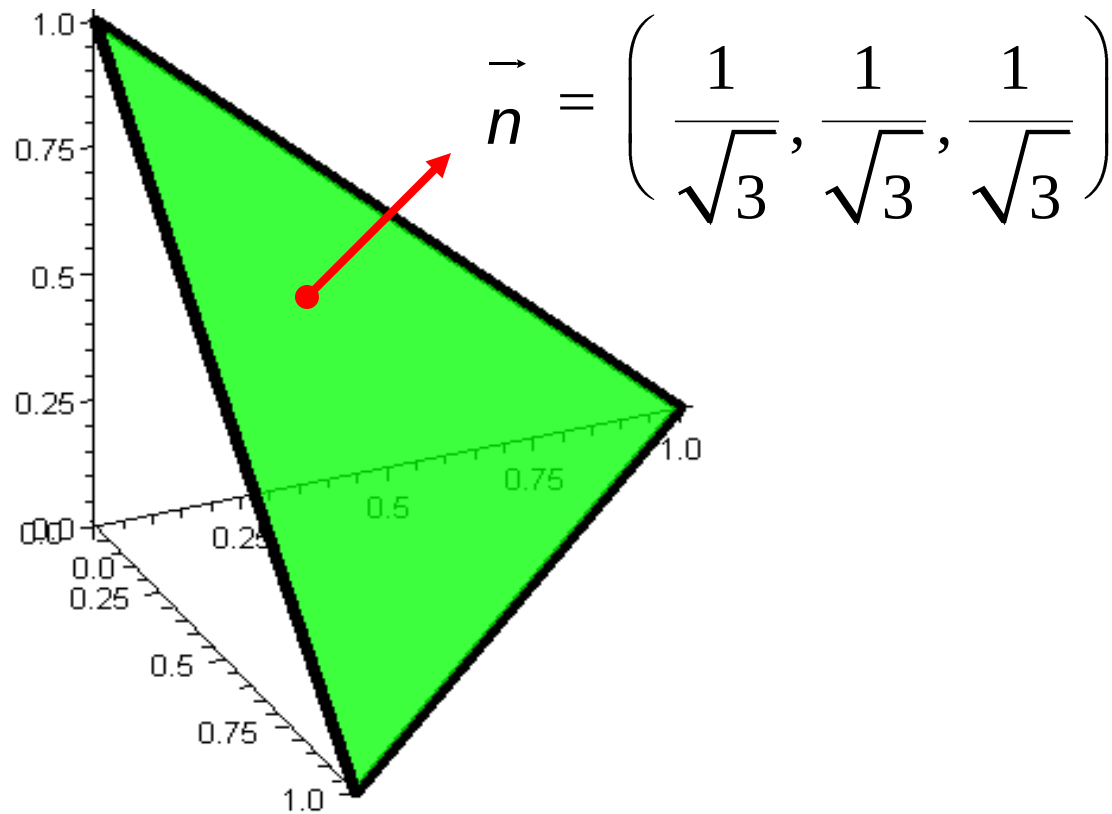
$$I = \iint_S (x - y) dy dz + z dx dy$$



$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

hay $\vec{n} = - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

Phía trên nhìn từ $Oz+$ $\Rightarrow$ thành phần thứ 3 của $\vec{n}$ phải không âm



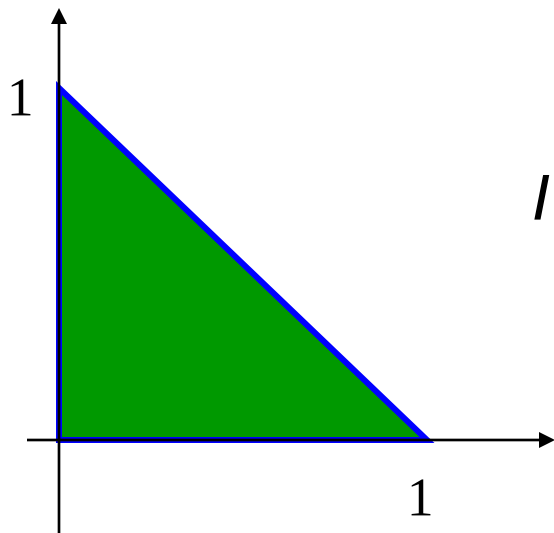
$$I = \iint_S (x - y) dy dz + z dx dy$$

$$= \iint_S (x - y, 0, z) \cdot \vec{n} ds$$

$$= - \iint_S (x - y, 0, z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x - y + z) ds$$

$$S: z = 1 - x - y, \text{ h.c. } S = D : x = 0, y = 0, x + y = 1$$



$$I = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x - y + z) ds$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_D (x - y + 1 - x - y) \sqrt{3} dx dy$$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1 - 2y) dx = -\frac{1}{6}$$

CÁCH TÍNH TP MẶT LOẠI 2

Vì pháp vector đơn vị thông thường rất phức tạp nên ta có thể dùng cách tính sau để thay thế:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Tính

$$I_3 = \iint_S R(x, y, z) dx dy$$

γ : góc hợp bởi Oz+ với $\vec{n}$

- Viết pt S dạng: $z = z(x, y)$ (bất buộc)
- Tìm hình chiếu D_{xy} của S lên mp $z = 0$ (Oxy)
(bất buộc)

$$\gamma \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = + \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

$$\gamma \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

Lưu ý

Nếu $\gamma = \pi/2$ (S//Oz hoặc S chứa Oz) $\Rightarrow I_3 = 0$

Dấu $+$ ($-$) nếu pháp vt hợp với chiều dương Oz
một góc *nhọn* (*tù*)

Hay

$+$: nếu S lấy phía *trên* nhìn từ Oz+

$-$: nếu S lấy phía *dưới* nhìn từ Oz+

(áp dụng với I_3)

Tương tự: $I_1: \left\{ \begin{array}{l} \text{Pt của S: } x = x(y, z) \\ D_{yz} = \text{hc của S lên Oyz} \\ \text{Góc của PVT so với Ox+} \end{array} \right.$

$I_2: \left\{ \begin{array}{l} \text{Pt của S: } y = y(x, z) \\ D_{zx} = \text{hc của S lên Ozx} \\ \text{Góc của PVT so với Oy+} \end{array} \right.$

$S // \text{Ox (hoặc chứa Ox)} \Rightarrow I_1 = 0$

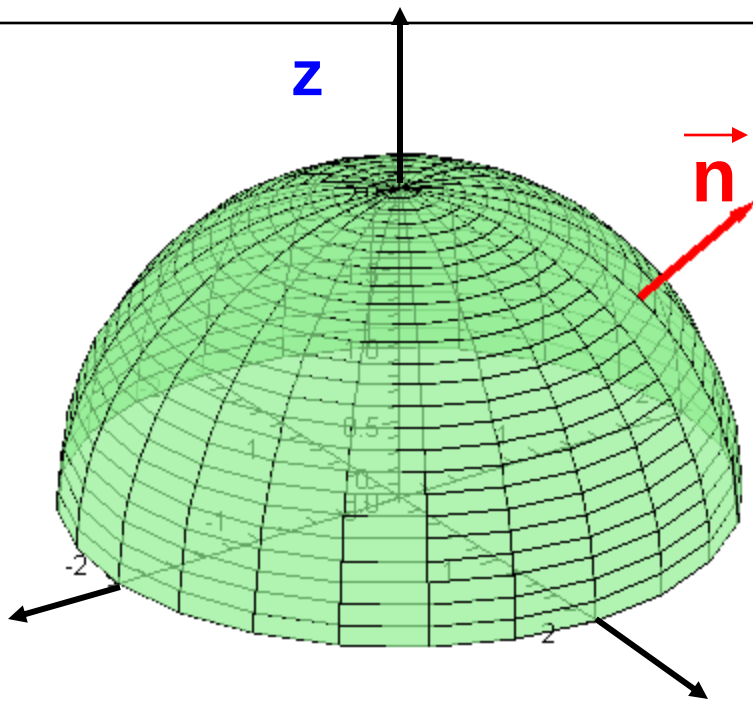
$S // \text{Oy (hoặc chứa Oy)} \Rightarrow I_2 = 0$

$S // \text{Oz (hoặc chứa Oz)} \Rightarrow I_3 = 0$

VÍ DỤ

1/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{tính} \quad I = \iint_S z dx dy$$



$$I = I_3 = \iint_S z dx dy$$

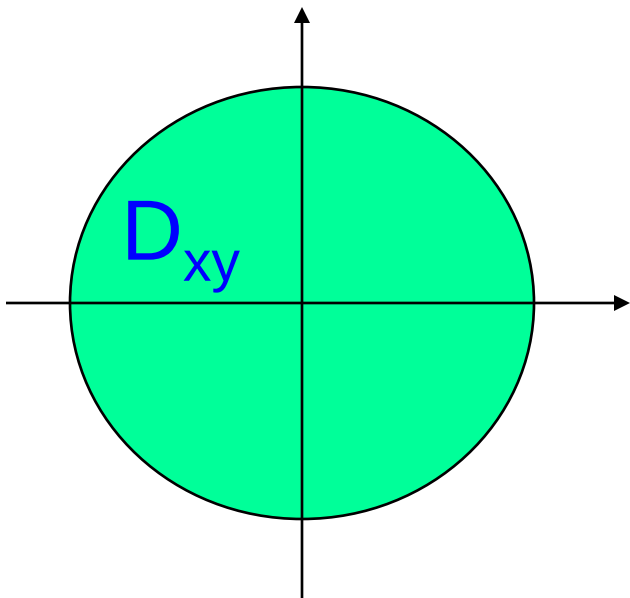
$$\left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ \gamma \leq \frac{\pi}{2} \\ h c S = D_{xy} : x^2 + y^2 \leq R^2 \end{array} \right.$$

$$I = \iint_S z dx dy = + \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

S

D_{xy}

$$\gamma \leq \frac{\pi}{2}$$



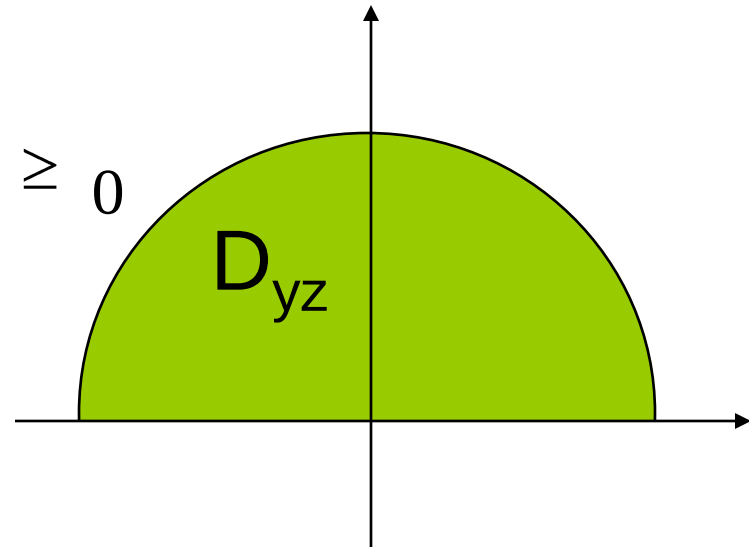
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} R^3$$

2/ Cho S là phía ngoài của nửa mặt cầu

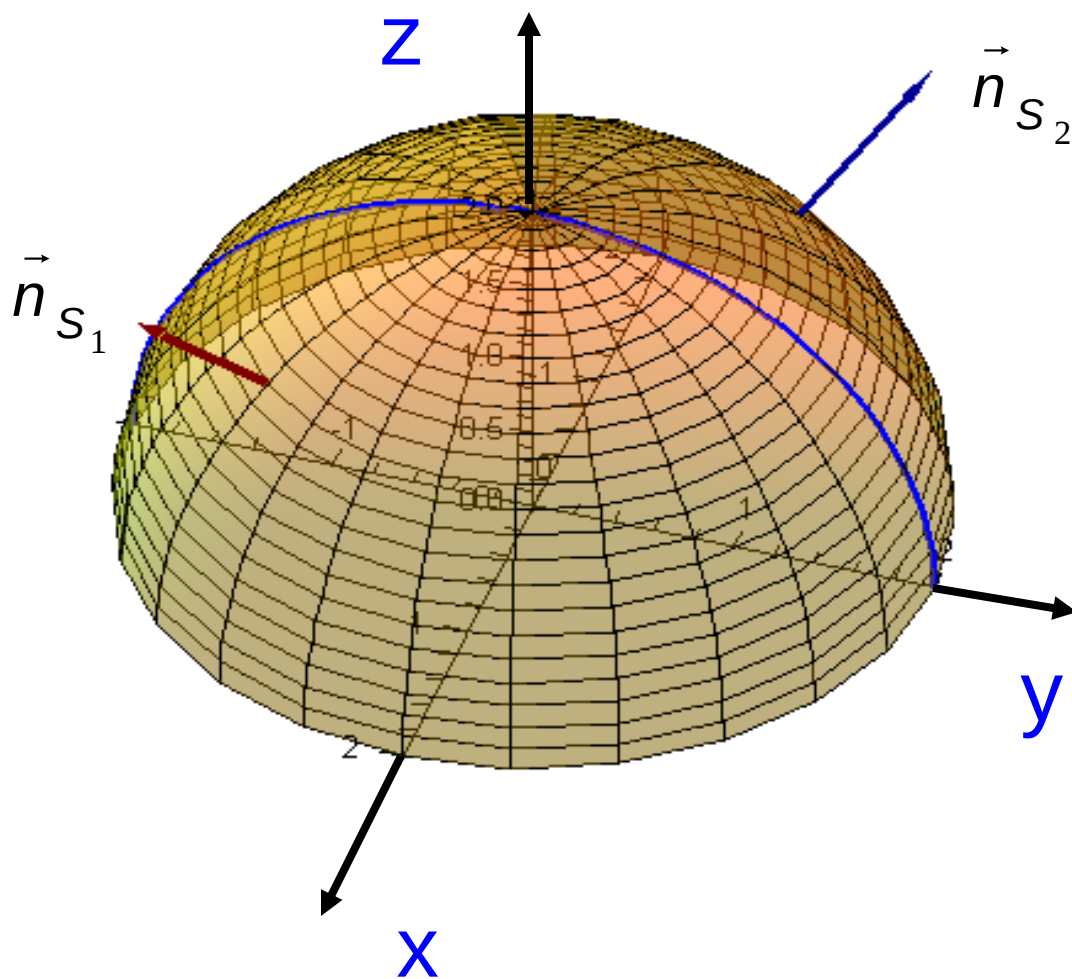
$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{tính } I = \iint_S x dy dz$$

$$I = I_2 \quad S = S_1 \cup S_2 : x = \pm \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$

$$hc_{Oyz} S_{1,2} = D_{yz} : y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$$



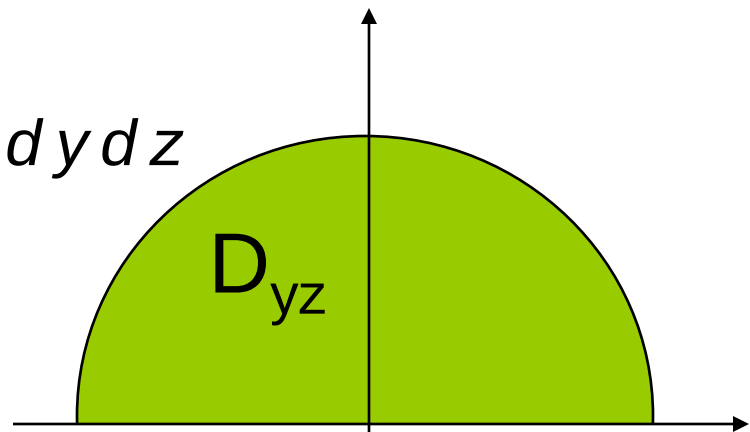
Lưu ý: S_1 và S_2 đối xứng qua mp $x = 0$



$$\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}, \alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$$

α là góc của
Ox+ với $\vec{n}$

$$I = \iiint_S x dy dz = \iint_{S_1} x dy dz + \iint_{S_2} x dy dz$$



$$= + \iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy dz - \iint_{D_{yz}} -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy dz$$

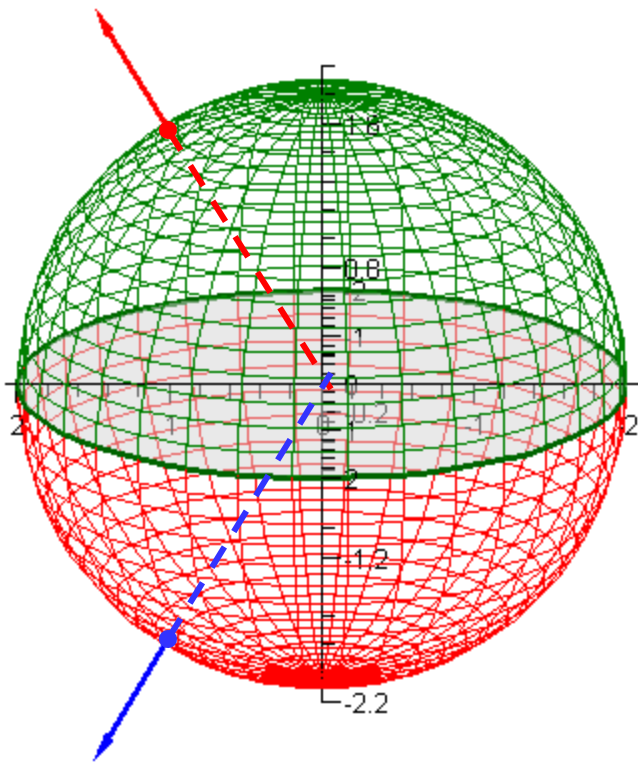
$$\alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy dz = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr$$

3/ Cho S là phía ngoài của mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{tính} \quad I = \iint_S xz^2 dx dy$$



$$S_1 \cup S_2: z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\gamma_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_2 \geq \frac{\pi}{2}$$

$$hc_{Oxy} S_{1,2} = D_{xy}: x^2 + y^2 \leq R^2$$

Lưu ý: S_1 và S_2 đối xứng qua mp $z = 0$

$$I = \iint_S xz^2 dx dy = \iint_{S_1} xz^2 dx dy + \iint_{S_2} xz^2 dx dy$$

$$= + \iint_{D_{xy}} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}^2 dx dy$$

$$- \iint_{D_{xy}} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}^2 dx dy$$

$$= 0$$

Lưu ý về tính đối xứng

S gồm S_1 và S_2 đối xứng qua mp $z = 0$

- $R(x, y, z)$ chẵn theo z : $I_3 = 0$
- $R(x, y, z)$ lẻ theo z :

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = 2 \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy$$

Tương tự cho I_1 (xét P và mp $x=0$), I_2 (xét Q và mp $y=0$)

4/ Cho S là phía trên của phần mặt trụ $z = y^2$
bị chắn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, tính

$$I = \iint_S (x + y^2) dy dz + 2z \cos y dz dx + z dx dy$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

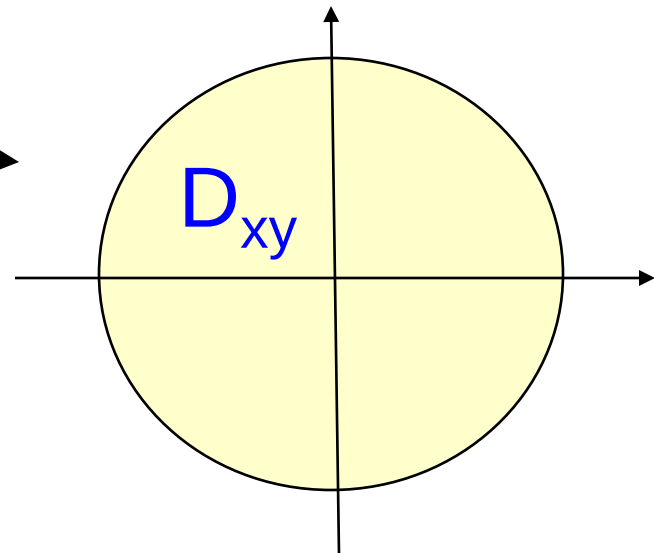
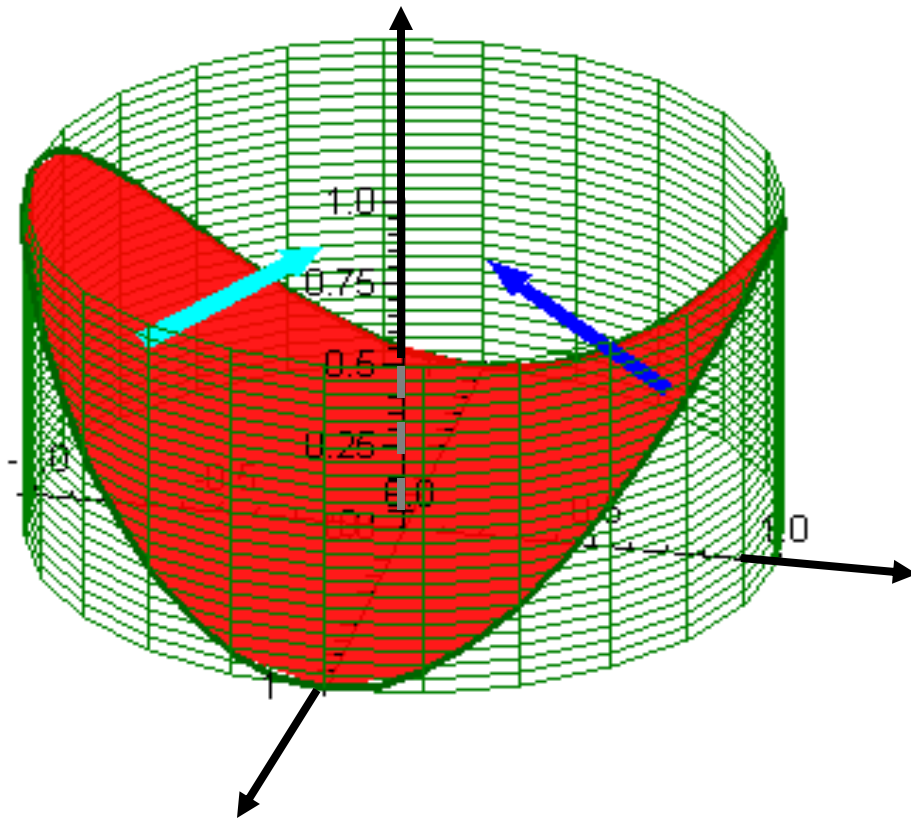
- S chứa $Ox \Rightarrow I_1 = 0$
- S đối xứng qua mp $y = 0$, $Q = 2z \cos y$
chắn theo y

$$\Rightarrow I_2 = 0$$

$$I = I_3 = \iiint z dx dy$$

$$= + \iint_S y^2 dx dy$$

D_{xy}



ĐỊNH LÝ GAUSS - OSTROGRATSKI

Cho Ω là miền đóng và bị chặn trong R_3 , S là **phía ngoài** mặt biên của Ω (S là mặt cong kín). P, Q, R là các hàm liên tục trên Ω .

Tích phân mặt loại 2

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Tích phân bội ba

VÍ DỤ

1/ Cho S là phía ngoài mặt bao khối Ω :
 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Tính

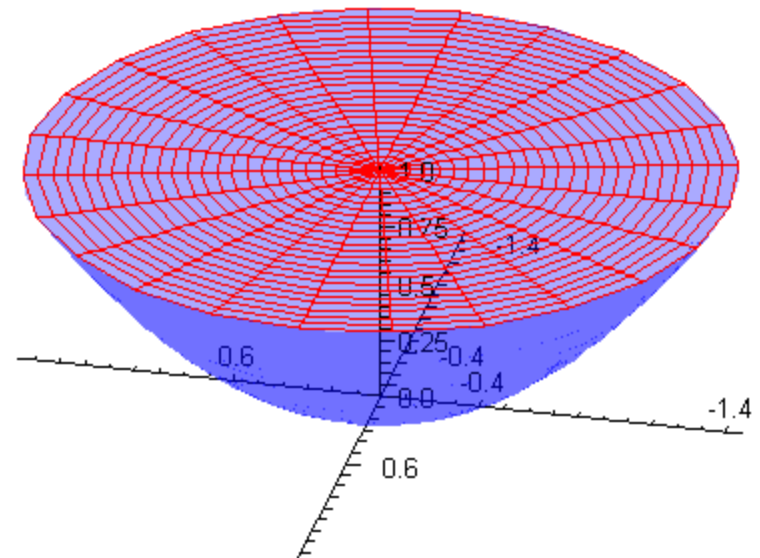
$$I = \iint_S zy^2 dy dz + (y + y^2) dz dx + x^2 dx dy$$

$$I \stackrel{G-O}{=} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} (0 + 1 + 2y + 0) dx dy dz$$

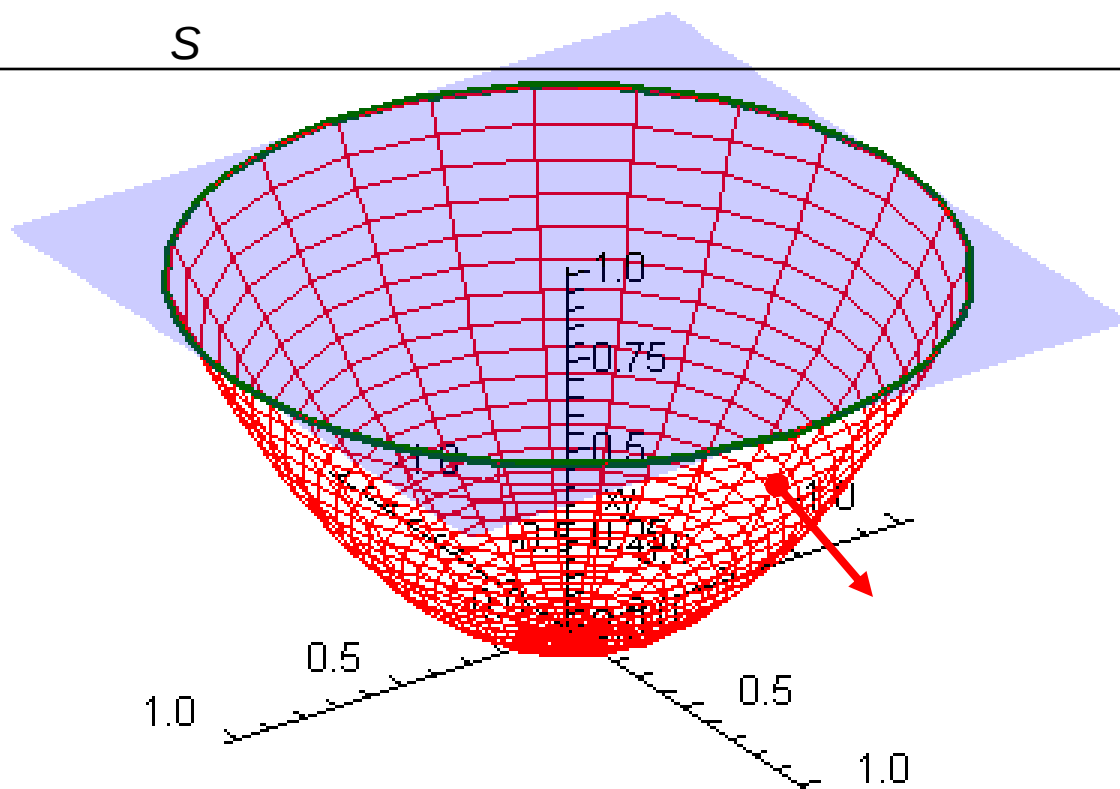
$$I = \iiint_{\Omega} (1 + 2y) dx dy dz \quad \Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 (1 + 2r \sin \varphi) r dz = \frac{\pi}{2}$$



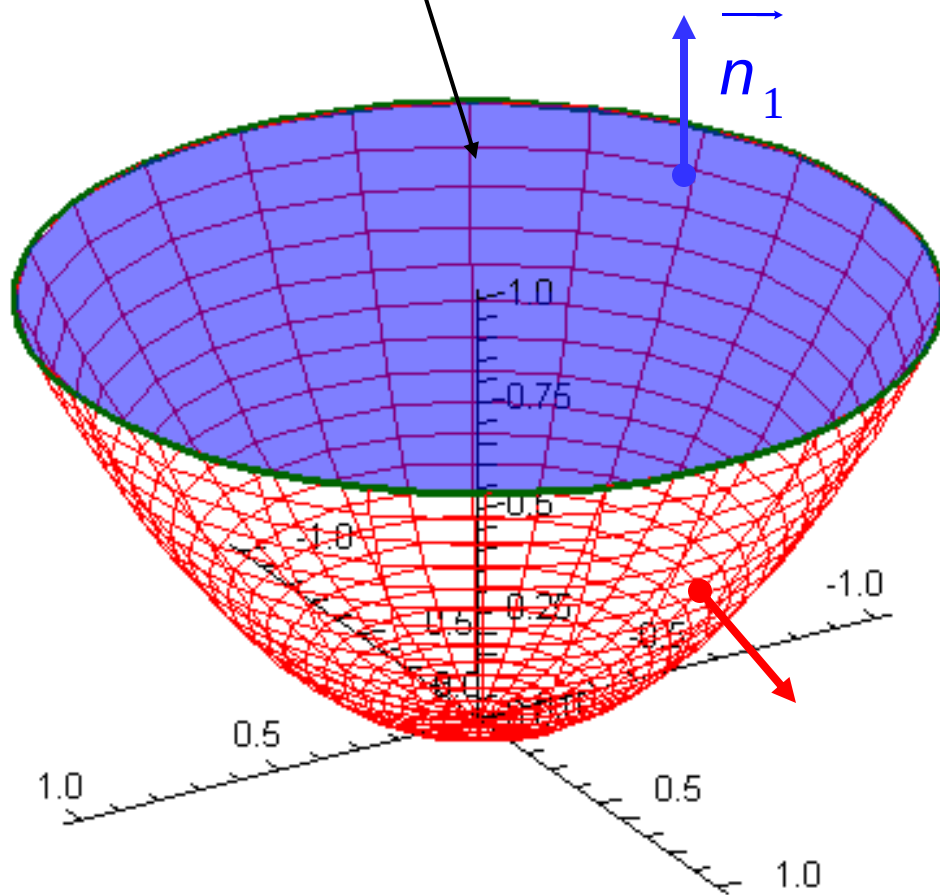
2/ Cho S là phía ngoài phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ bị chặn bởi mp $z = 1$. Tính

$$I = \iint_S zy^2 dy dz + (y + y^2) dz dx + x^2 dx dy$$



S là mặt hở.

Thêm S_1 vào để tạo thành mặt kín



S_1 là phía trên phần
mp $z = 1$ bị chắn
trong paraboloid.

Gọi Ω là vật thể được
bao bởi $S \cup S_1$.

Áp dụng công thức G-O:

$$\iint_{S \cup S_1} zy^2 dy dz + (y + y^2) dz dx + x dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \frac{\pi}{2}$$

(xem ví dụ trước)

$$\Rightarrow \iint_S + \iint_{S_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_S + \iint_{S_1} = \frac{\pi}{2} \quad S_1: z = 1, \text{ trong trụ } x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \iint_{S_1} \underbrace{zy^2 dy dz + (y + y^2) dz dx}_{=0} + \underbrace{x^2 dx dy}_{=0}$$

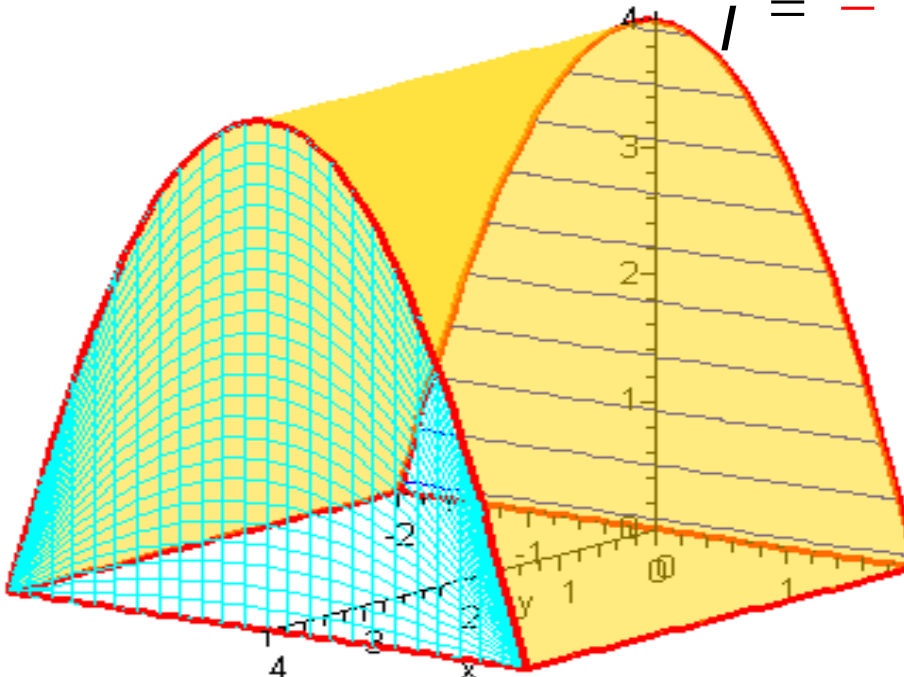
(Vì $S \parallel O_x, O_y$)

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \frac{\pi}{4}$$

3/ Cho S là phía **trong** mặt bao khối Ω

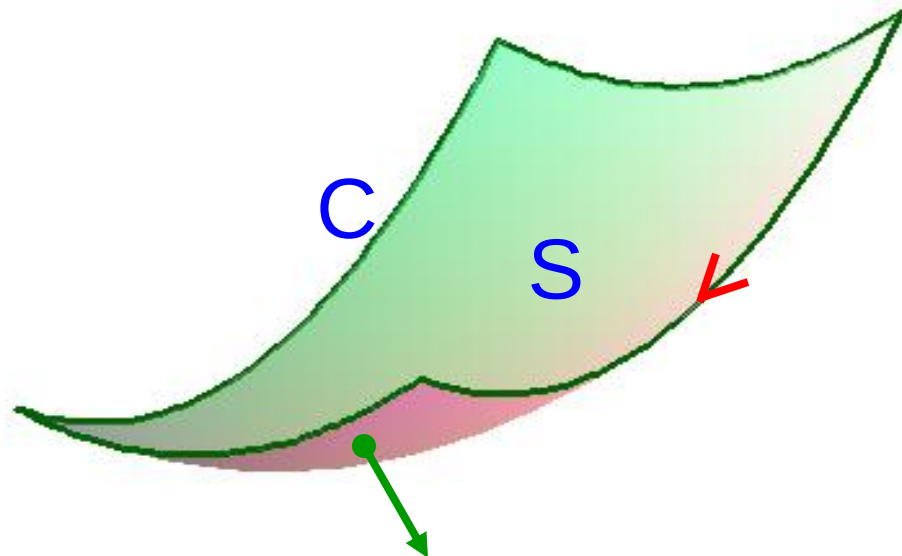
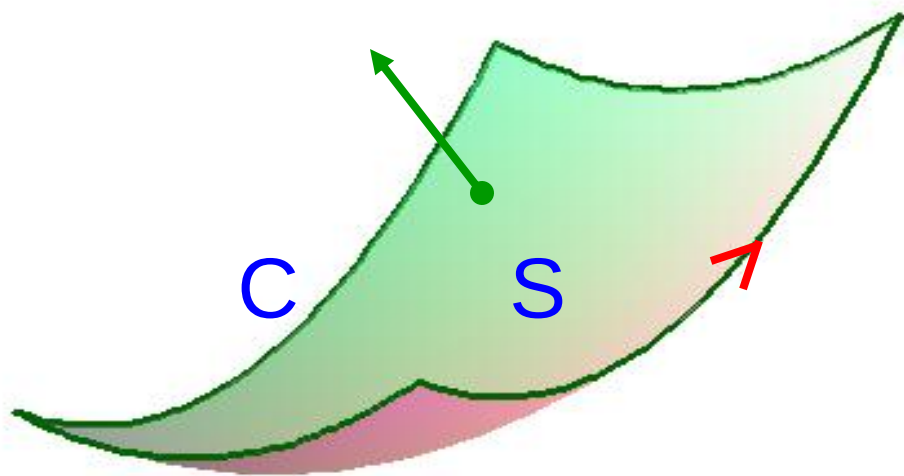
giới hạn bởi: $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 4$, $z = 0$.

Tính:
$$I = \iint_S zx dy dz + x dz dx + zy dx dy$$


$$\begin{aligned} I &= - \iiint_{\Omega} P'_x + Q'_y + R'_z \, dx dy dz \\ &= - \iiint_{\Omega} (z + 0 + y) \, dx dy dz \\ &= - \int_0^4 dx \int_{-2}^2 dy \int_0^{4-y^2} (z + y) \, dz \end{aligned}$$

CÔNG THỨC STOKES

Cho đường cong C là biên của mặt định hướng S . C được gọi là định hướng dương theo S nếu khi đứng trên S (pháp tuyến hướng từ chân lên đầu) sẽ nhìn thấy C đi ngược chiều kim đồng hồ.



CÔNG THỨC STOKES

Cho $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên S , C là biên **định hướng dương** của S . Khi đó:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz \longleftarrow \text{Tích phân đường 2}$$

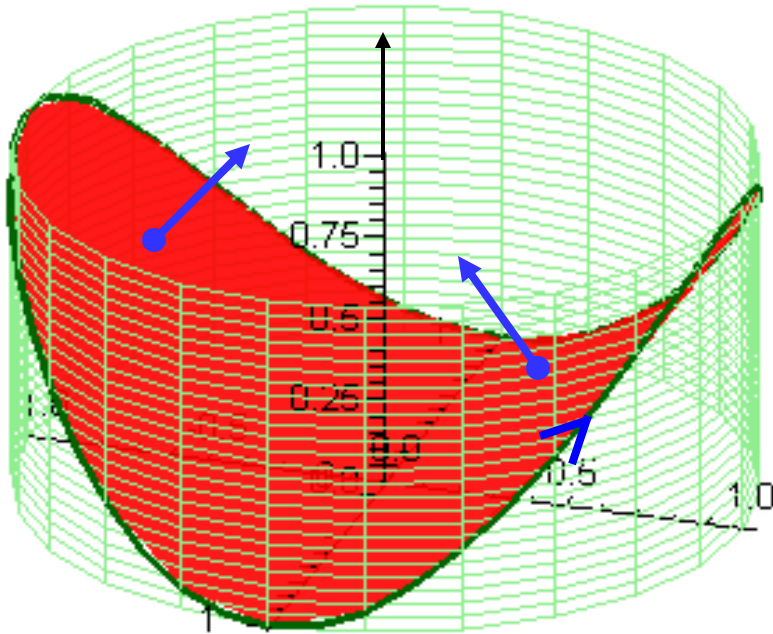
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Tích phân mặt 2

VÍ DỤ

1/ Cho C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 1$ và trụ $z = y^2$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương Oz . Tính:

$$I = \int_C (x + y) dx + (2x^2 - z) dy + xy^2 dz$$



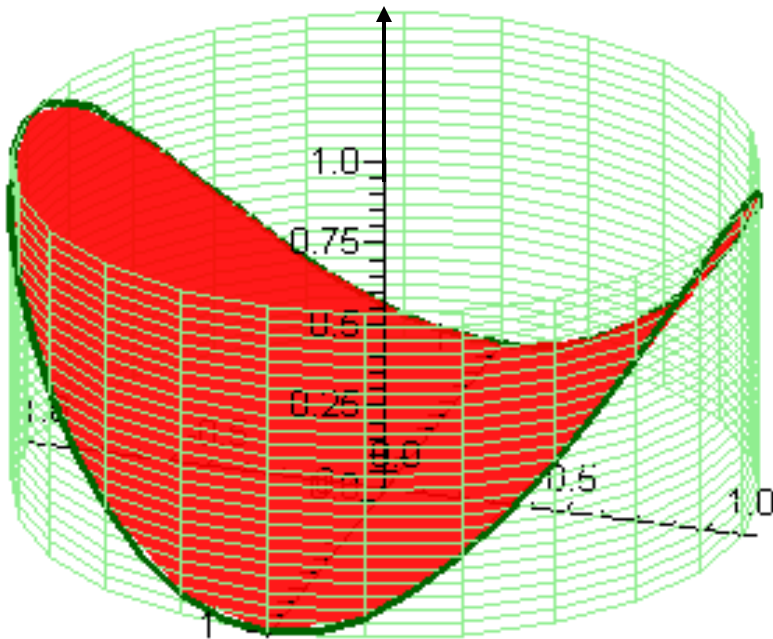
Chọn S là phía trên
mặt trụ $z = y^2$

$$P = x + y$$

$$Q = 2x^2 - z$$

$$R = xy^2$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_S 2xy + 1 \, dy dz + 0 - y^2 \, dz dx + 4x - 1 \, dx dy
 \end{aligned}$$



$z = y^2$ bị chặn
trong trụ $x^2 + y^2 = 1$

$$I = \iint_S \underbrace{2xy + 1}_{=0} dydz - \underbrace{y^2 dzdx + 4x - 1}_{=0} dx dy$$

(Vì S chứa Ox) (tính đối xứng)

$$I = I_3 = \iint_S (4x - 1) dx dy$$

$$= + \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (4x - 1) dx dy = -2\pi$$

2/ Cho C là giao tuyến của trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $x + z = 1$ lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ gốc tọa độ. Tính:

$$I = \int_C (y - z^2) dx + (z - x^2) dy + (x - y^2) dz$$

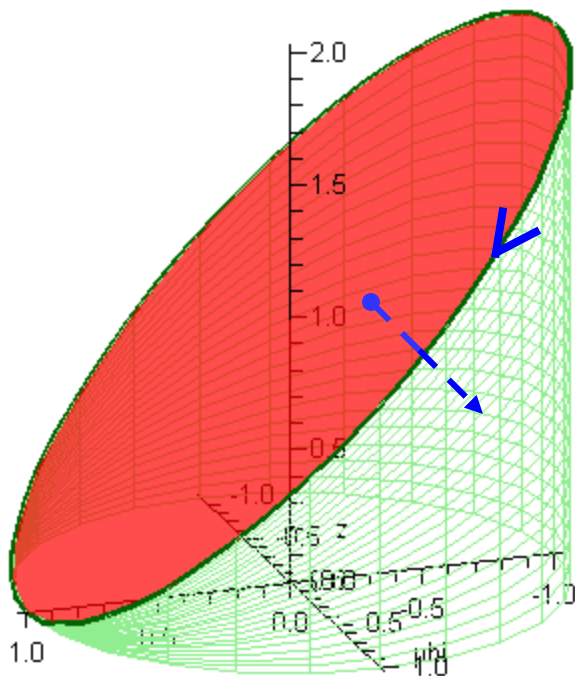
$$I = \int_C (y - z^2) dx + (z - x^2) dy + (x - y^2) dz$$

Chọn S là phía dưới phần mặt phẳng $x + z = 1$,
bị chắn bên trong trụ.

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



$$I = \iint_S -2y - 1 \, dy dz + -2z - 1 \, dz dx + -2x - 1 \, dx dy$$

$$I = \iint_S -2y^{-1} dydz + -2z^{-1} dzdx + -2x^{-1} dxdy$$

Chuyển sang tp mặt loại 1

$$S: x + z = 1, \quad \vec{n} = -\frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$I = \iint_S -2y^{-1}, -2z^{-1}, -2x^{-1} \cdot \vec{n} ds$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_S (y + x + 1) ds$$

S: $z = 1 - x$, bị chặn trong trụ $x^2 + y^2 = 1$

$$h c S = D : x^2 + y^2 \leq 1$$

Oxy

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_S (y + x + 1) ds$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_D (y + x + 1) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_D (x + y + 1) \sqrt{2} dx dy = 2\pi$$