

CHƯƠNG III: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1: THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG

2: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

3: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

1: Tham số hóa đường cong

1. Đường cong trong mặt phẳng: thường được cho bằng 2 cách

a. Cho bởi pt tham số
$$\begin{cases} \dot{x} = x(t) \\ \dot{y} = y(t) \end{cases}$$

b. Cho bởi pt $y=y(x)$: Ta thường đặt $x=t$ thì pt tham số sẽ là

$$\begin{cases} \dot{x} = t \\ \dot{y} = f(t) \end{cases}$$

Trường hợp đặc biệt: Có 2 trường hợp

a. Viết phương trình tham số của đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ta sẽ đặt

$$\begin{cases} \dot{x} = a + R \cos t \\ \dot{y} = b + R \sin t \end{cases}$$

1: Tham số hóa đường cong

b. Viết phương trình tham số của đường ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta sẽ đặt :

$$\begin{cases} x = a \cos j \\ y = b \sin j \end{cases}$$

2. Đường cong trong không gian: thường được cho bằng 2 cách

a. Được cho sẵn bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

1: Tham số hóa đường cong

b. Cho là giao tuyến của 2 mặt cong:
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Khi đó, thông thường ta sẽ đặt **1** trong 3 **biến bằng t**, thay vào 2 phương trình trên để được hpt với 2 pt và 2 ẩn là 2 biến còn lại. Giải hpt đó theo tham số t, ta sẽ ra **2 biến còn lại cũng tính theo t**

1: Tham số hóa đường cong

Ví dụ 1: Viết phương trình tham số đường cong C là giao tuyến của $x^2 + y^2 = z^2$ và $ax = y^2$ ($z \geq 0$)

Ta đặt $y=t$ thì

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ ax = y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{a}t^2 \\ y = t \\ z = \frac{1}{a}\sqrt{t^2(t^2 + a^2)} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình tham số đường cong C là giao tuyến của $x^2 = y$ và $x = z$ ($x \geq 0$)

Ta đặt $x=t$ thì

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = z \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$$

1: Tham số hóa đường cong

Tuy nhiên, trong một số trường hợp thông thường hay gặp, ta sẽ có cách tham số hóa từng đường cong cụ thể tùy vào những điểm đặc biệt của chúng

Ví dụ 3: Viết pt tham số của 2 đường cong C_1, C_2 là giao tuyến của $x^2+y^2+z^2=2, z^2=x^2+y^2$

Ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Tức là C_1, C_2 vừa là giao tuyến của mặt cầu và mặt nón vừa là giao tuyến của mặt trụ với 2 mặt phẳng. Nói cách khác: C_1, C_2 là 2 đường tròn đơn vị nằm trên 2 mp đối xứng nhau qua mp $z=0$.

1: Tham số hóa đường cong

Khi đó, ta đặt $x = \cos t$ thì suy ra $y = \sin t$. Vậy pt tham số của C là

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

1: Tham số hóa đường cong

Ví dụ 4: Viết phương trình tham số của đường cong
C: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình mặt cầu

Ta được: $2x^2+z^2=a^2$, là pt của đường ellipse. Tức là
C là đường ellipse $2x^2+z^2=a^2$ trên mp $x=y$

Đặt $2x^2=a^2\cos^2 t$ thì suy ra $z^2=a^2\sin^2 t$.

Vậy ta được:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ \\ x = y \end{array} \hat{=} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2x^2 + z^2 = a^2 \\ \\ x = y \end{array} \hat{=} \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} x = y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t \\ \\ z = a \sin t \end{array}$$

1: Tham số hóa đường cong

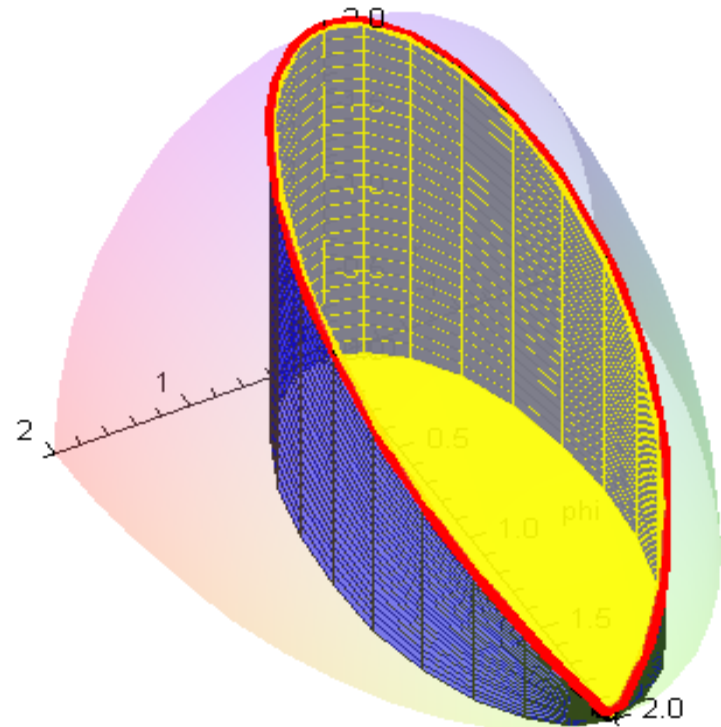
Ví dụ 5: Viết phương trình tham số của đường cong
C: $x^2+y^2+z^2=4$ và $x^2+y^2=2x$ lấy phần ứng với z dương

Từ pt mặt trụ : $x^2+y^2=2x \leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

Ta đặt $x-1=\cos t$, suy ra $y=\sin t$ và thay vào pt mặt cầu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

$$\hat{U} \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{4 - 2(1 + \cos t)} \end{cases}$$



1: Tham số hóa đường cong

Ví dụ 6: Viết phương trình tham số của đường cong
C: $x^2+y^2+z^2=6z$ và $z=3-x$

Ta viết lại pt mặt cầu : $x^2+y^2+(3-z)^2=9$

Thay $3-z=x$ vào để được C là đường ellipse $2x^2+y^2=9$
trên mp $x=3-z$

Đặt $2x^2=3\cos^2 t$, thì $y^2=3\sin^2 t$

Vậy:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6z \\ z = 3 - x \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9 \\ z = 3 - x \end{cases}$$

$$\hat{=} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t \end{cases}$$

1: Tham số hóa đường cong

Ví dụ 7: Viết phương trình tham số của đường cong
C: $x^2+y^2+z^2=2$ và $x+y+z=0$

Thay $z=-(x+y)$ từ pt mặt phẳng vào pt mặt cầu:

$$x^2+y^2+(x+y)^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2+xy=1 \quad \ll \quad \begin{matrix} \text{æ} \\ \text{c} \\ \text{c} \end{matrix} x + \frac{1}{2} y^2 + \frac{\text{æ}\sqrt{3}}{\text{c}2} y = 1$$

Do đó, ta được

$$\begin{matrix} \begin{matrix} \text{æ} \\ \text{c} \\ \text{c} \end{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{matrix} \quad \ll \quad \begin{matrix} \text{æ} \\ \text{c} \\ \text{c} \end{matrix} x + \frac{1}{2} y^2 + \frac{\text{æ}\sqrt{3}}{\text{c}2} y = 1 \quad \ll \quad \begin{matrix} x + \frac{1}{2} y = \cos t \\ \frac{\sqrt{3}}{2} y = \sin t \\ z = -(x + y) \end{matrix}$$

Vậy pt tham số của C là

$$x = \cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t, y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t, z = -\cos t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin t$$

2: Tích phân đường loại 1

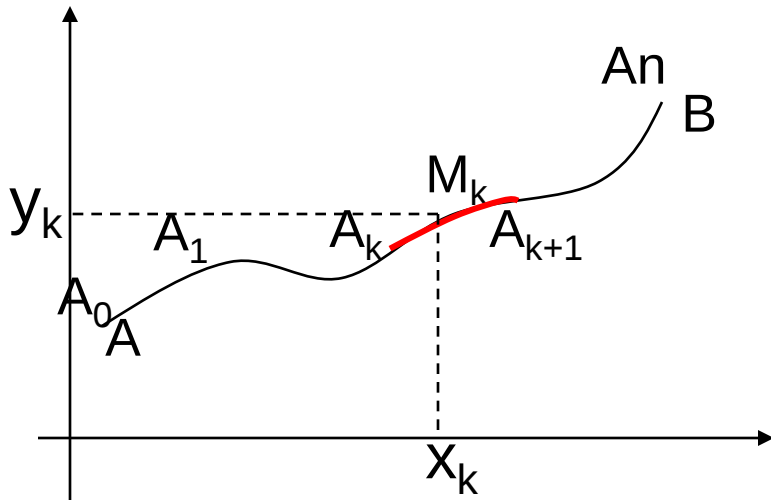
Định nghĩa: Cho hàm $f(x,y)$ xác định trên cung AB .

Chia cung AB thành n phần tùy ý bởi các điểm chia

$$A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_n=B$$

Trên mỗi cung nhỏ $A_k A_{k+1}$ có độ dài là Δl_k lấy 1 điểm $M_k(x_k, y_k)$ bất kỳ

Lập tổng
$$S_n = \sum_{k=0}^n f(x_k, y_k) \Delta l_k$$



Cho $\max \Delta l_k \rightarrow 0$, nếu S_n có giới hạn hữu hạn không phụ thuộc cách chia cung AB và cách lấy điểm M_k thì giới hạn đó được gọi là tp đường loại 1 của hàm $f(x,y)$ dọc cung AB

2: Tích phân đường loại 1

Và kí hiệu là $\int_{AB} f(x,y) dl = \lim_{\max D l_k \rightarrow 0} S_n$

Khi đó, ta nói hàm $f(x,y)$ khả tích trên cung AB

Định nghĩa tương tự cho tp đường loại 1 của hàm 3 biến $f(x,y,z)$

Từ định nghĩa, ta suy ra cách tính độ dài cung AB

$$L_{AB} = \int_{AB} dl$$

Điều kiện khả tích: Hàm $f(x,y)$ liên tục dọc cung trơn từng khúc AB thì khả tích trên cung AB

Cung AB có pt tham số $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a \leq t \leq b$ được gọi là trơn nếu các đạo hàm $x'(t)$, $y'(t)$ tồn tại, liên tục và không đồng thời bằng 0 trên đoạn $[a,b]$ và gọi là trơn từng khúc nếu nó có thể chia thành 1 số hữu hạn các cung trơn

2: Tích phân đường loại 1

Các tính chất: Các hàm f, g khả tích trên cung AB

Tính chất 1: TP đường loại 1 không phụ thuộc vào hướng của đường lấy tp, tức là

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$$

Tính chất 2: Với λ, μ là các hằng số thì $\lambda f + \mu g$ cũng khả tích trên AB và

$$\int_{AB} (\lambda f + \mu g) dl = \lambda \int_{AB} f dl + \mu \int_{AB} g dl$$

Tính chất 3: Cho C là điểm bất kỳ trên cung AB thì

$$\int_{AB} f dl = \int_{AC} f dl + \int_{CB} f dl$$

2: Tích phân đường loại 1

Tính chất 4: Nếu $f \geq 0$ trên cung AB thì $\int_{AB} f dl \geq 0$

Tính chất 5: $\left| \int_{AB} f dl \right| \leq \int_{AB} |f| dl$

Tính chất 6: Tồn tại điểm M thuộc cung AB sao cho

$$\frac{1}{L_{AB}} \int_{AB} f dl = f(M)$$

Trong đó, L_{AB} là độ dài cung AB. Ta gọi $f(M)$ là giá trị trung bình của hàm f trên cung AB

2: Tích phân đường loại 1

Ta chia thành 3 trường hợp nếu cung **AB** trong mp Oxy:

TH1: Cung AB có pt $y=y(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$ thì

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

TH2: Cung AB có pt $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ thì

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

TH3: Cung AB có pt $r=r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ thì :

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$$

2: Tích phân đường loại 1

Nếu AB là cung trong không gian có pt tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Thì

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

2: Tích phân đường loại 1

Ví dụ 1: Tính tích phân đường loại 1 trên biên của ΔABC với $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(1,5)$ của hàm $f(x,y)=x+y$

Biên của ΔABC gồm 3 đoạn

AB: $y=x$, $1 \leq x \leq 3$, BC: $y=6-x$, $1 \leq x \leq 3$, CA: $x=1$, $1 \leq y \leq 5$

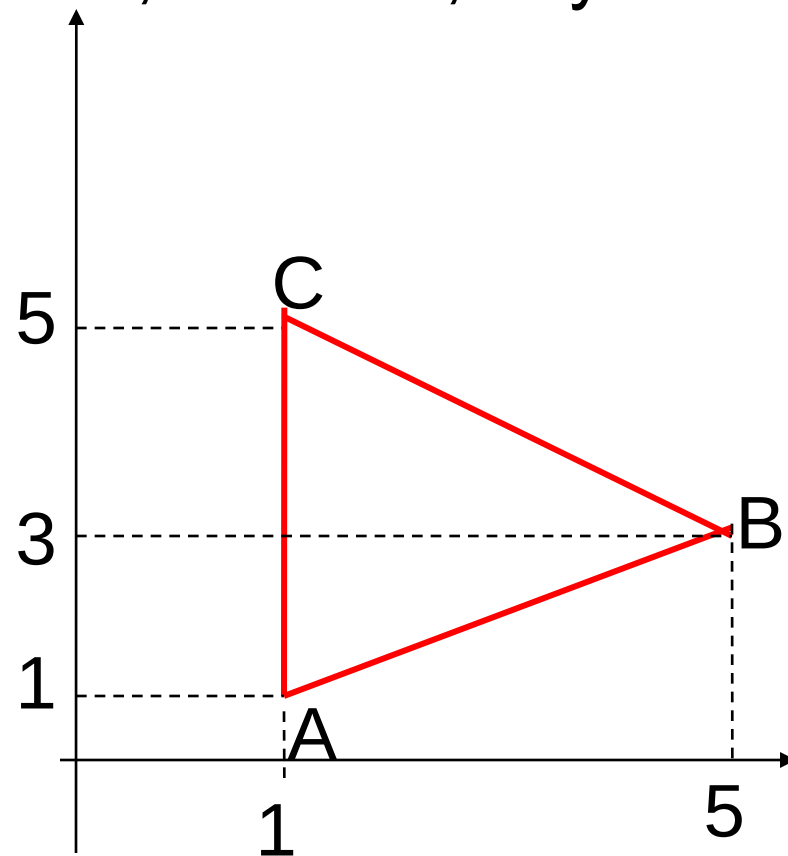
$$I_1 = I_{AB} + I_{BC} + I_{CA}$$

Trên đoạn AB: thay $y=x$ và

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{2}$$

Ta được :

$$I_{AB} = \int_1^3 (x + x) \sqrt{2} dx = 8\sqrt{2}$$



2: Tích phân đường loại 1

Tương tự, ta cũng có

$$I_{BC} = \int_1^3 6\sqrt{2}dx = 12\sqrt{2}$$

$$I_{CA} = \int_1^5 (1+y)dy = 16$$

$$\text{Vậy } I_1 = \int_C (x+y)dl = 20\sqrt{2} + 16$$

2: Tích phân đường loại 1

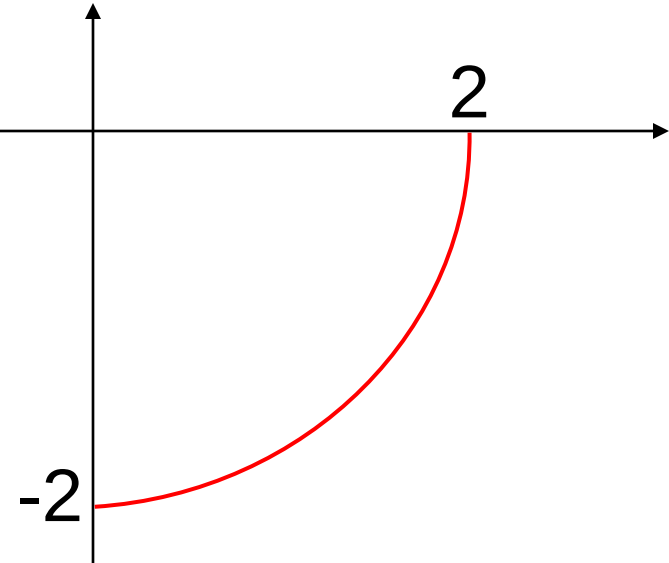
Ví dụ 2: Tính $I_2 = \oint_C (x^2 - y^2) dl$ Với C là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$

Có 3 cách để tính tp I_2 như sau

Cách 1: Tính $y = -\sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

Suy ra
$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Vậy:
$$I_2 = \int_0^2 (x^2 - (4 - x^2)) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$



$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin^2 t - 4) dt = 0$$

$x = 2 \sin t$

2: Tích phân đường loại 1

Cách 2: Viết pt C trong tọa độ cực $r = 2, \frac{3\pi}{2} \leq j \leq 2\pi$

Suy ra:

$$x = r(j) \cos j = 2 \cos j, y = r(j) \sin j = 2 \sin j, \sqrt{r^2(j) + r'^2(j)} = 2$$

Vậy:

$$I_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (4 \cos^2 j - 4 \sin^2 j) \cdot 2 dj = 0$$

Cách 3: Viết pt tham số của C bằng cách đặt $x=2\cos t$ thì $y=2\sin t$

Suy ra : $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2$

Và ta được tích phân như đã tính trong Cách 2

2: Tích phân đường loại 1

Ví dụ 3: Tính $I_3 = \oint_C 2xz \, dl$ Với C là giao tuyến của $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=1, z \geq 0$

Đây là tp đường loại 1 trong không gian nên ta bắt buộc phải viết pt tham số của C

Thay $x^2+y^2=1$ vào pt mặt cầu ta được $z = \sqrt{3}$

Nên ta đặt $x=\cos t$, để có $y=\sin t$

Suy ra $\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} = 1$

Vậy :

$$I_3 = \int_0^{2\pi} 2 \cdot \cos t \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \, dt = 0$$

2: Tích phân đường loại 1

Ví dụ 4: Tính độ dài phần đường parabol $y=x^2$ với $0 \leq x \leq 2$

Ta có $\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + 4x^2}$

Vậy : $L_c = \int_c d l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx$

$$L_c = \frac{1}{2} \ln(4 + \sqrt{17})$$