

Chương 3:

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Phần 1:

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

NỘI DUNG

1. Tham số hóa đường cong
2. Định nghĩa tích phân đường loại 1
3. Tính chất tích phân đường loại 1
4. Cách tính tích phân đường loại 1

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẪNG

Tổng quát: (C) viết dạng tham số:

$$x = x(t), y = y(t)$$

VD: 1/ Đoạn thẳng nối $A(a_1, a_2)$ và $B(b_1, b_2)$

$$\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

2/ Đường cong $y = f(x)$:
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẪNG

3/ Đường tròn: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

4/ Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

THAM SỐ HÓA ĐƯỜNG CONG PHẪNG

5/ Đường cong trong tọa độ cực: $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

VD: đường tròn : $r = 2\sin\varphi$ có dạng tham số

$$\begin{cases} x = 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ y = 2 \sin^2 \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Lưu ý: hướng ngược chiều Kim đồng hồ là tham số tăng

THAM SỐ HÓA ĐC TRONG KHÔNG GIAN

B1: Chiều đường cong lên mặt phẳng thích hợp

B2: Tham số hóa cho đường cong hình chiếu (trong mặt phẳng)

B3: Tham số hóa cho biến còn lại

Ví dụ

1/ Tham số hóa cho giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 3$

Hình chiếu gtuyn lên mp Oxy là đtròn:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Vậy dạng tham số là:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 3$$

2/ Tham số hóa cho giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ và mặt phẳng $z = 3 - x$

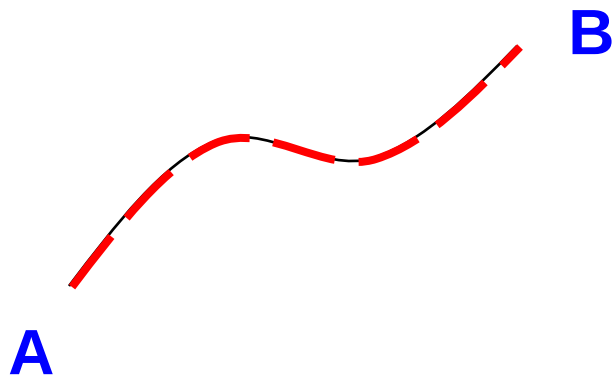
Hình chiếu gtuyến của 2 mặt lên mp Oxy là :

$$x^2 + y^2 + (3 - x)^2 = 6(3 - x) \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 = 9$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$$

ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG 1

Cho AB là đường cong hữu hạn trong mặt phẳng Oxy, $f(x,y)$ xác định trên đường cong.



Phân hoạch cung AB thành những cung C_k , trên mỗi cung C_k lấy M_k , Δl_k là độ dài cung C_k , tính tổng tích phân

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta l_k$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad : \text{tp đường loại 1 của } f \text{ trên } AB$$

Trong R_3 , tp đường loại 1 cũng định nghĩa tương tự.

TÍNH CHẤT TP ĐƯỜNG LOẠI 1

1/ Tp đường loại 1 không phụ thuộc chiều đường đi

$$2 / L = \int_{AB} 1 dl = \text{độ dài cung } AB$$

$$3 / \int_{AB} c \cdot f dl = c \int_{AB} f dl$$

$$\int_{AB} (f + g) dl = \int_{AB} f dl + \int_{AB} g dl$$

$$5 / C = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \int_C f dl = \int_{C_1} f dl + \int_{C_2} f dl$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 1

TH1: (C) viết dạng tham số:

$$x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

TH2: (C) viết dạng $y = y(x), a \leq x \leq b$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 1

TH3: (C) viết dạng $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$$

(C) là đường cong trong không gian

(C) viết dạng tham số:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Lưu ý: nếu $C = C_1 \cup C_2$ (trong R_2) đối xứng qua Oy

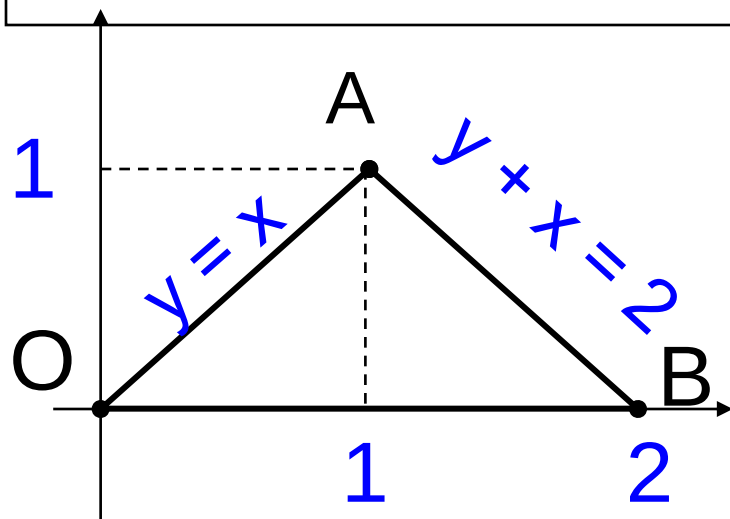
• f lẻ theo x:
$$\int_C f(x, y) dl = 0$$

• f chẵn theo x:
$$\int_C f(x, y) dl = 2 \int_{C_1} f(x, y) dl$$

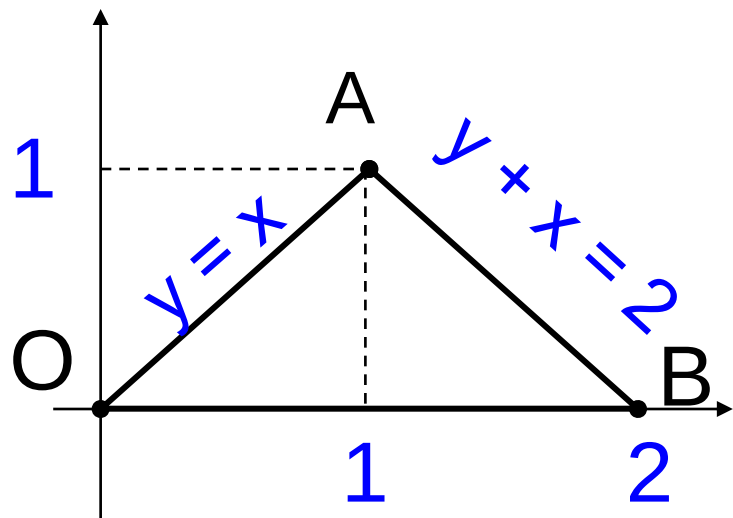
* Trên R_3 , xét tính đối xứng qua các mặt tọa độ.

Ví dụ

1/ Tính $I = \int_C (x + y) dl$ C là biên tam
giác OAB , với $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 0)$



$$I = \int_{OA} (x + y) dl + \int_{AB} (x + y) dl + \int_{OB} (x + y) dl$$



$$\underline{OA}: y = x, 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_{OA} (x + y) dl = \int_0^1 (x + x) \sqrt{2} dx$$

$$\underline{AB}: y = 2 - x, 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

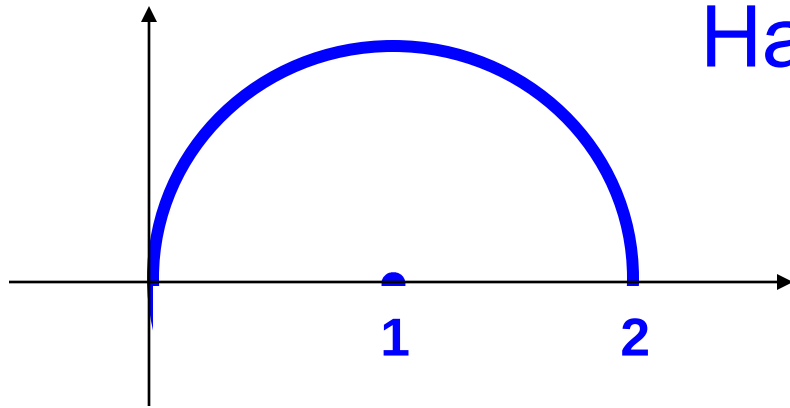
$$\int_{AB} (x + y) dl = \int_1^2 (x + 2 - x) \sqrt{2} dx$$

$$\underline{OB}: y = 0, 0 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 0} = 1$$

$$\int_{OB} (x + y) dl = \int_0^2 (x + 0) \cdot 1 dx$$

$$\Rightarrow I = 2 + \frac{7}{3}\sqrt{2}$$

2/ Tính $I = \int_C xy dl$ với $C : x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$



Hai cách tham số hóa cho C:

C1: $(x - 1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t, y = \sin t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin t + \sin t \cos t) dt = 2$$

C2: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r = 2 \cos \varphi, \cos \varphi \geq 0 \\ y \geq r \Leftrightarrow \sin \varphi \geq 0 \end{cases}$$

C viết lại:
$$\begin{cases} x = 2 \cos \varphi \sin \varphi, y = 2 \sin^2 \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi / 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \varphi \cdot 2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

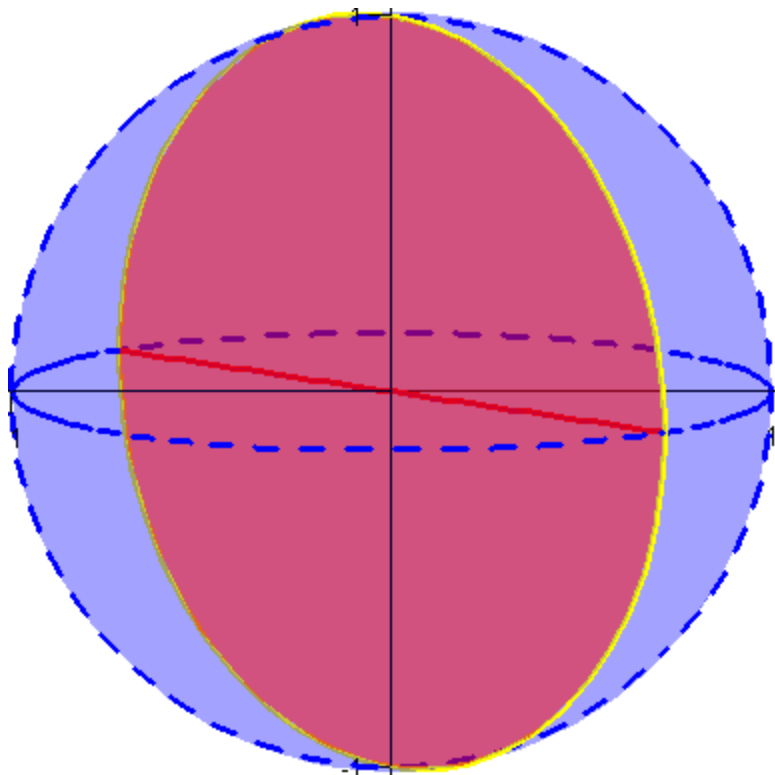
3/ Tính $I = \int_C \sqrt{2x^2 + z^2} dl$, C là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mp $y = x$

Hình chiếu của C lên mp Oxz là ellipse:

$$2x^2 + z^2 = 1$$

C có dạng tham số là:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t, y = x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t, \\ y = x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

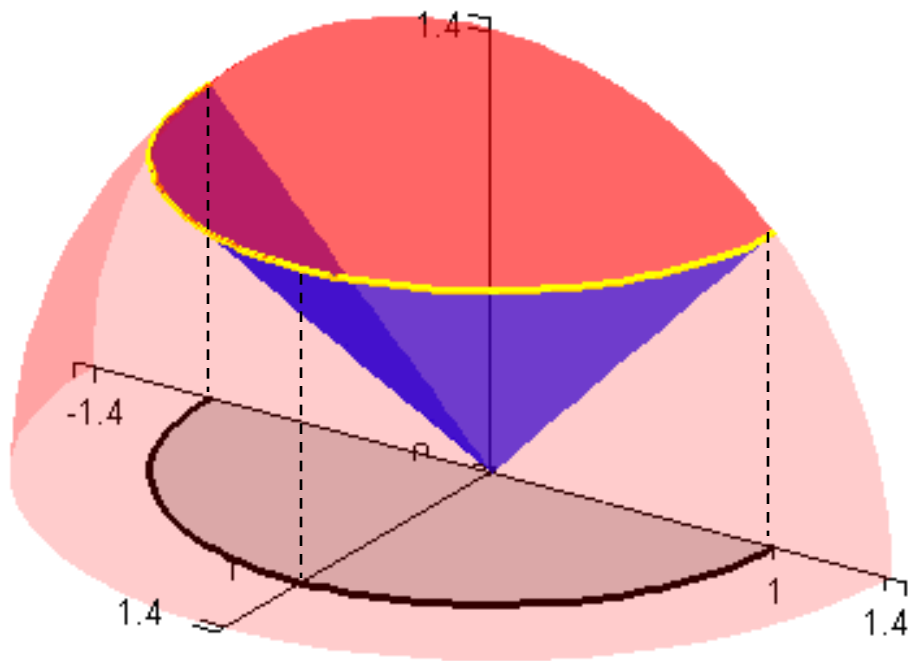
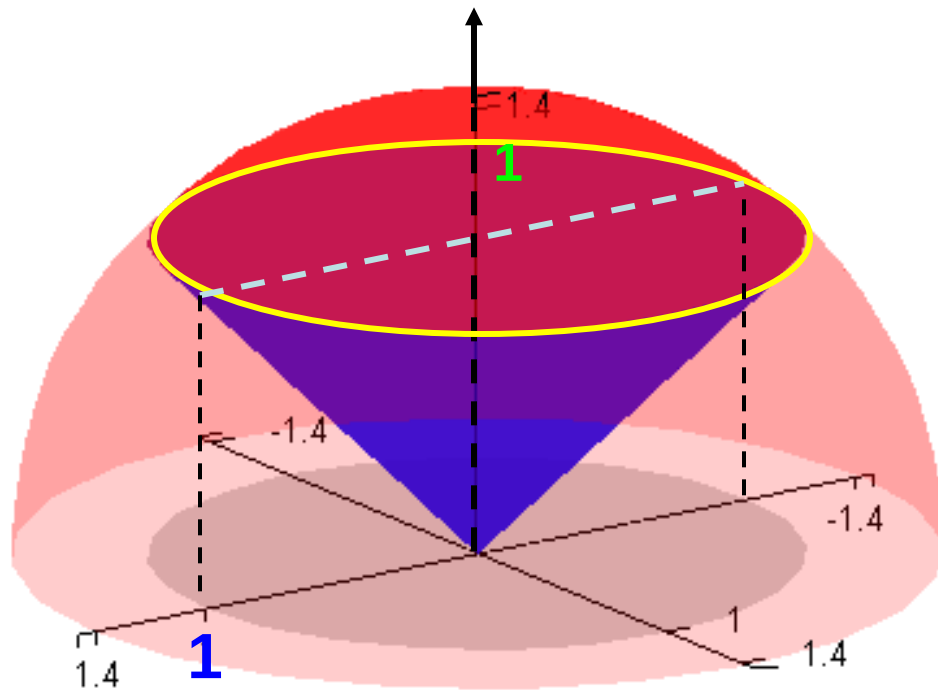
$$I = \int_C \sqrt{2x^2 + z^2} dl = \int_0^{2\pi} 1.1 dt = 2\pi$$

4/ Tính $I = \int_C xz dl$ với C là phần giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $x, z \geq 0$.

Tham số hóa của C :

$$\begin{cases} z = 1, x^2 + y^2 = 1 \\ x, z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t, z = 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} = 2$$

$$I = \int_C xz dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot 1 \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 0} dt$$



5/ Tính $I = \int_C x^2 dl$ với C là phần giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mp $x + y + z = 0$

Việc tham số hóa cho C rất phức tạp.

Nhận xét: vai trò của x, y, z như nhau trên đường cong C.

$$I = \int_C x^2 dl = \int_C y^2 dl = \int_C z^2 dl = \frac{1}{3} \int_C x^2 + y^2 + z^2 dl$$

$$\int_C x^2 + y^2 + z^2 \, dl = \int_C 4 \, dl = 4L$$

với L là độ dài cung C .

Vì mp đi qua tâm của mặt cầu, nên C là đường tròn có bán kính là bán kính mặt cầu.

Vậy:
$$L = 2\pi \times 2 = 4\pi \Rightarrow l = \frac{16\pi}{3}$$