

2: Tích phân đường loại 2- Cách tính

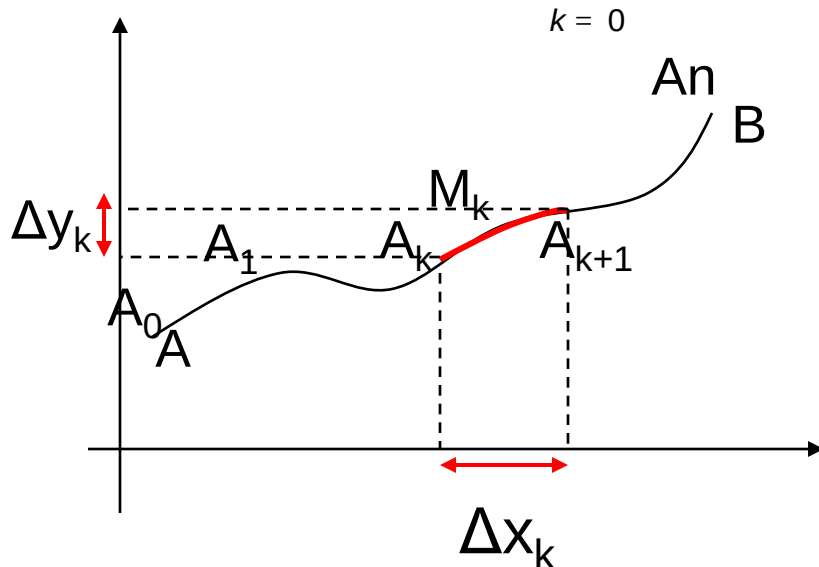
Định nghĩa: Cho hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên cung AB trong mp Oxy

Chia cung AB thành n phần tùy ý bởi các điểm chia

$$A=A_0, A_1, A_2, \dots A_n=B, A_k(x_k, y_k)$$

Trên mỗi cung nhỏ $A_k A_{k+1}$ lấy 1 điểm M_k bất kỳ, đặt $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, Δl_k là độ dài cung

$$\text{Lập tổng} \quad s_n = \sum_{k=0}^n [P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k]$$



2: Tích phân đường loại 2- Cách tính

Cho $\max \Delta l_k \rightarrow 0$, nếu S_n có giới hạn hữu hạn không phụ thuộc cách chia cung AB và cách lấy điểm M_k thì giới hạn đó được gọi là tp đường loại 2 của các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ dọc cung AB và kí hiệu là

$$\oint_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max \Delta l_k \rightarrow 0} S_n$$

Điều kiện tồn tại: Nếu các hàm P, Q liên tục trong miền mở chứa cung AB trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại 2 của P, Q dọc cung AB

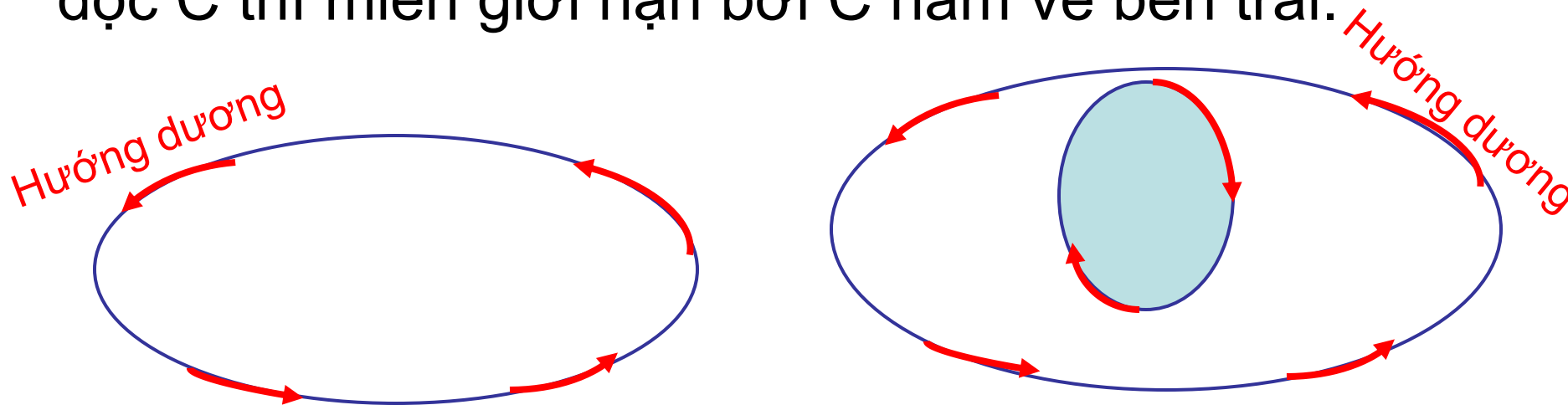
2: Tích phân đường loại 2 – Cách tính

Tính chất :

Tích phân đường loại 2 đổi dấu nếu hướng đi trên cung AB thay đổi

$$\oint_{AB} P dx + Q dy = - \oint_{BA} P dx + Q dy$$

Trường hợp đường lấy tp là đường cong kín C, ta quy ước hướng dương trên C là hướng mà khi đi dọc C thì miền giới hạn bởi C nằm về bên trái.



Hướng âm là hướng ngược với hướng dương

2: Tích phân đường loại 2– Cách tính

Cách tính tích phân đường loại 2

Nếu cung AB có phương trình $y=y(x)$, đi từ $A(x_1, y(x_1))$ đến $B(x_2, y(x_2))$ thì

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{x_1}^{x_2} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx$$

Nếu cung AB có phương trình tham số $x=x(t)$, $y=y(t)$ đi từ $A(x(t_1), y(t_1))$ đến $B(x(t_2), y(t_2))$ thì

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

Nếu AB là đường cong không gian, ta có cách tính tương tự khi có **pt tham số** của đường cong

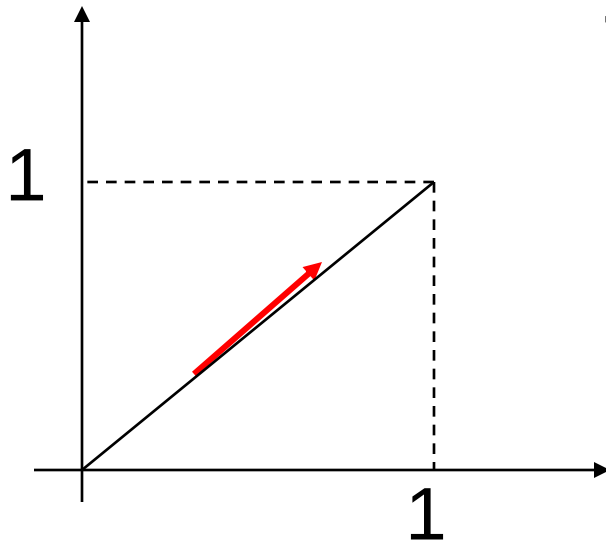
2: Tích phân đường loại 2 – Cách tính

Ví dụ 1: Tính tích phân I_1 đi từ $A(0,0)$ đến $B(1,1)$ của 2 hàm $P=x^2$ và $Q=xy$ theo các đường

1. Đường thẳng

2. Parabol $y=x^2$

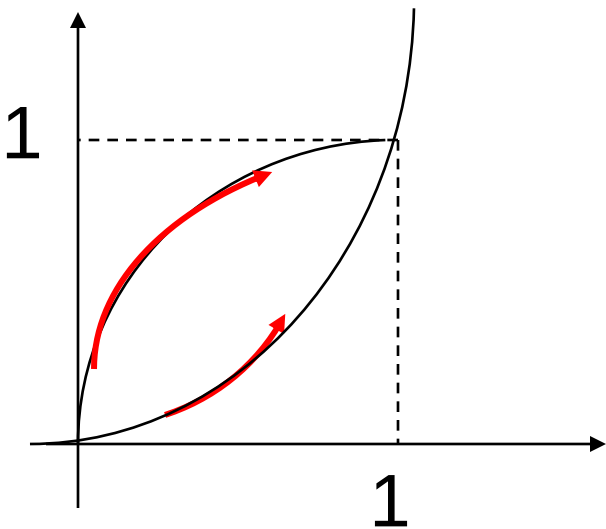
3. Đường tròn $x^2+y^2=2x$



1. AB là đoạn thẳng $y=x$, x từ 0 đến 1

$$I_1 = \int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx$$

2: Tích phân đường loại 2 – Cách tính



2. AB là phần parabol $y=x^2$ với x từ 0 đến 1, $y'=2x$

$$I_1 = \int_0^1 (x^2 + x \cdot x^2 \cdot 2x) dx$$

3. AB là phần đường tròn $x^2+y^2=2x$

Ta viết pt tham số của AB bằng cách viết lại pt

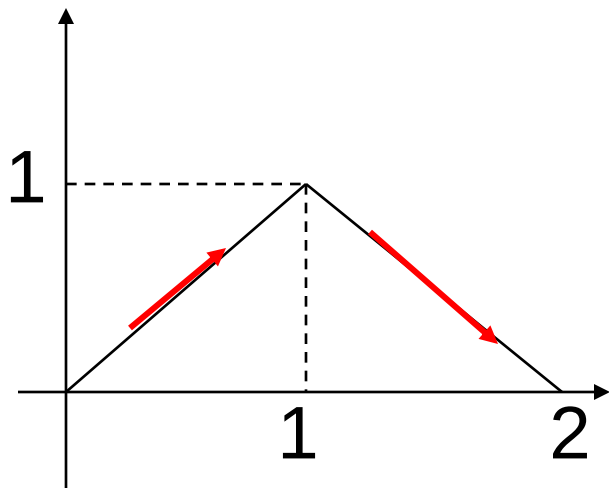
$(x-1)^2+y^2=1$ và đặt $x=1+\cos t$ thì $y=\sin t$ với t đi từ π đến $\pi/2$

$$I_1 = \int_{\pi}^{\pi/2} (1 + \cos t)^2 (-\sin t) + (1 + \cos t)(\sin t) \cos t \, dt$$

2: Tích phân đường loại 2 – Cách tính

Ví dụ 2: Tính tp đường loại 2 của 2 hàm $P=x^2+2y$ và $Q=y^2$ trên đường cong $C : y=1-|1-x|$ với x đi từ 0 đến 2

Ta viết lại pt đường cong C: $y = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \end{cases}$



Vậy :

$$I_2 = \oint_C P dx + Q dy$$

$$I_2 = \int_0^1 (x^2 + 2x) + x^2 dx + \int_1^2 (x^2 + 2(2-x)) + (2-x)^2(-1) dx$$

2: Tích phân đường loại 2 – Cách tính

Ví dụ 3: Tính $I_3 = \oint_C xdx + zdy + ydz$ với C là giao tuyến của 2 mặt $y=x^2$ và $x=z$ đi từ $O(0,0,0)$ đến $A(1,1,1)$

Ta viết pt tham số của C bằng cách đặt $x=t$ thì ta được : $y=t^2, z=t, t$ đi từ 0 đến 1

Vậy :

$$I_3 = \int_0^1 (t + t \cdot 2t + t^2) dt$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

CÔNG THỨC GREEN: *Mối liên hệ giữa tích phân kép và tích phân đường loại 2*

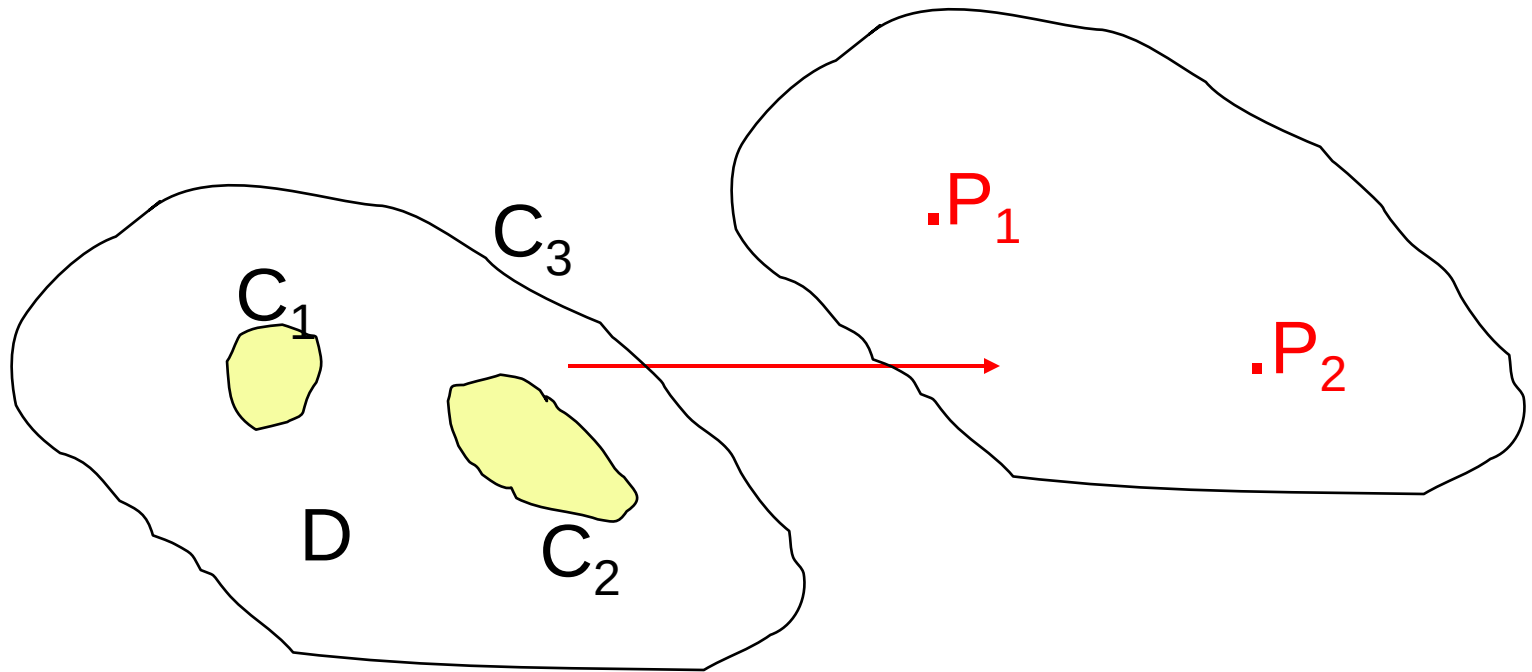
Định lý Green : Cho D là miền đóng, bị chặn trong mp Oxy với biên C trơn từng khúc. Các hàm $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ liên tục trong miền mở chứa D. Khi ấy ta có công thức Green

$$\oint_C P dx + Q dy = \pm \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Trong đó, tp kép lấy dấu “+” nếu hướng đi trên đường cong kín C là **hướng dương** và dấu “-” nếu ngược lại

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Chu tuyến kín C có thể bao gồm nhiều chu tuyến $C_1, C_2, \dots$. Miền D được gọi là miền đơn liên nếu mỗi chu tuyến kín đó có thể co vào 1 điểm thuộc D , khi đó trong D không có “lỗ thủng”

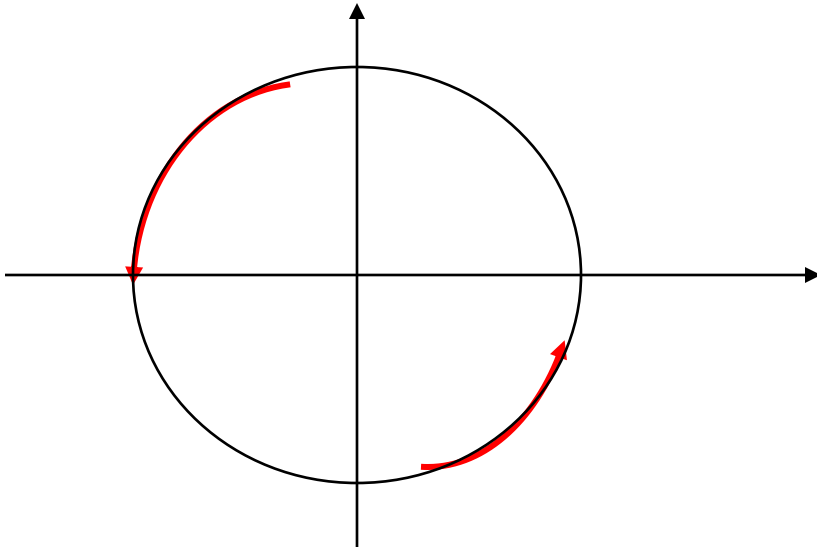


2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Ví dụ 4: Cho $I_4 = \oint_C (4x - 2y)dx - (2x + 3y)dy$

Với C chu tuyến dương của hình tròn $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. Tính tp trên bằng 2 cách: trực tiếp và dùng công thức Green

1. Tính trực tiếp: Ta tính bằng cách viết pt tham số đường tròn đi ngược chiều kim đồng hồ



$x=1+2\cos t, y=-1+2\sin t, t$
đi từ 0 đến 2π

Suy ra :

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

$$I_4 = \int_0^{2\pi} [(4(1 + 2 \cos t) - 2(-1 + 2 \sin t))(-2 \sin t) dt - [(2(1 + 2 \cos t) + 3(-1 + 2 \sin t))2 \cos t] dt$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} (8 \sin^2 t - 8 \cos^2 t) dt = 0$$

2. Dùng CT Green với C là biên dương của miền D: $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ và $P=4x-2y$, $Q=-(2x+3y)$ tức là $Q'_x - P'_y = -2 - (-2) = 0$

Vậy:

$$I_4 = + \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = 0$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Ví dụ 6: Tính $I_5 = \oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$

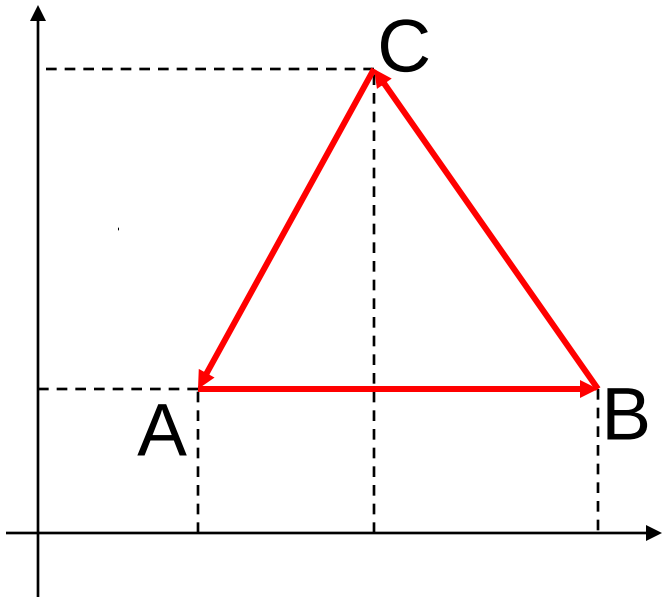
Với C là chu tuyến $\triangle ABC$, $A(2,1)$, $B(6,1)$, $C(4,3)$
ngược chiều kim đồng hồ bằng 2 cách : Trực tiếp
và dùng CT Green

1. Tính trực tiếp bằng cách viết pt tham số 3 cạnh
Pt AB đi qua $A(2,1)$ và vecto chỉ phương $\vec{AB} = (4,0)$

$$x=2+4t, y=1, t \text{ từ } 0 \text{ đến } 1$$

$$\text{pt BC: } x=6-2t, y=1+2t, t \text{ từ } 0 \text{ đến } 1$$

$$\text{pt CA: } x=4-2t, y=3-2t, t \text{ từ } 0 \text{ đến } 1$$



2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Vậy:

$$I_5 = \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \left((2+4t)^2 + 1 \right) 4 dt \right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left((6-2t)^2 + (1+2t)^2 \right) (-2 dt) + 7^2 \cdot 2 dt + \int_2^3 \left((4-2t)^2 + (3-2t)^2 \right) (-2 dt) + (7-4t)^2 (-2 dt) dt$$

$$I_5 = \frac{152}{3}$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

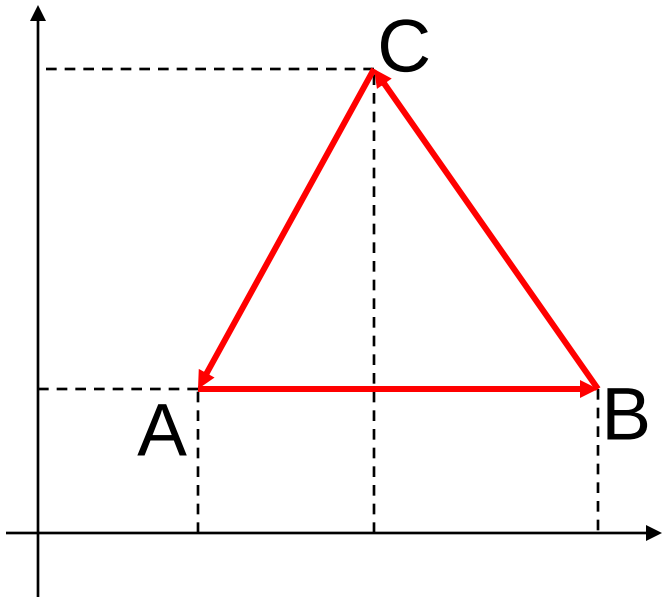
2. Dùng CT Green:

Miền lấy tp kép $D: \triangle ABC$, dấu tp kép: $+$, hàm dưới
dấu tp kép : $Q'_x - P'_y = 2x - 2y$

Vậy:

$$I_5 = \int_1^3 \int_{1+y}^{7-y} (2x - 2y) dx dy$$

$$I_5 = \frac{152}{3}$$



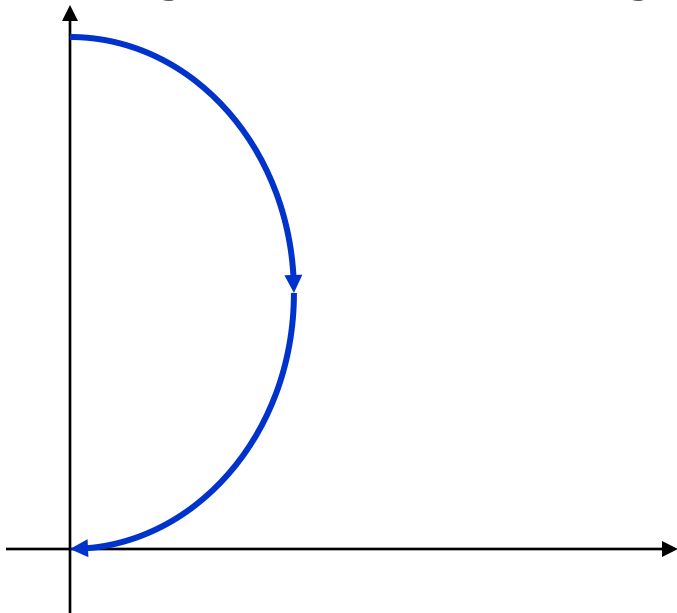
2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Ví dụ 6: Tính

$$I_6 = \oint_C (e^y \sin x - 3x + 2y) dy + (e^y \cos x + 4y) dx$$

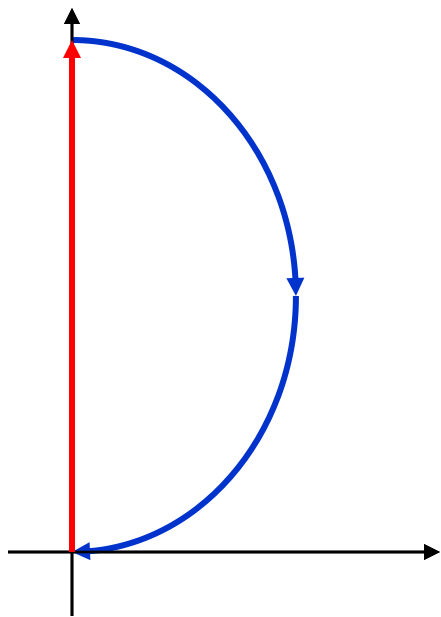
Với C là phần đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, $x \geq 0$, đi từ $(0,2)$ đến $(0,0)$

Không thể tích trực tiếp tích phân này. Ta sẽ tính bằng cách áp dụng CT Green.



Tuy nhiên C là đường cong không kín, nên ta phải “bù” thêm đường cong đi từ $(0,0)$ đến $(2,0)$ để được đường cong kín.

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green



Đường cong bù thêm còn phải được chọn sao cho việc tính tp đường loại 2 của 2 hàm đã cho trên đó là đễ nhất tức là ta sẽ chọn đt song song với các trục tọa độ

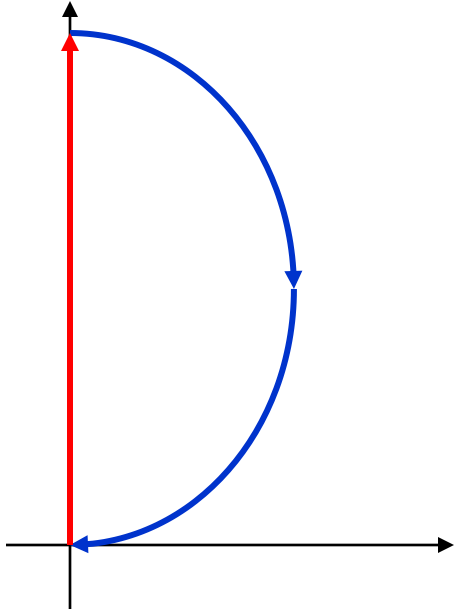
Với ví dụ này, ta chọn C_1 là phần đt $x=0$ từ $(0,0)$ đến $(2,0)$

Như vậy, đường cong kín CC_1 là biên âm của miền $D: x^2+y^2 \leq 2y, x \geq 0$

Áp dụng CT Green, ta được :

$$\oint_{C \cup C_1} P dx + Q dy = - \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green



$$\oint_{C \cup C_1} P dx + Q dy = - \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

$$\hat{=} \oint_C P dx + Q dy + \oint_{C_1} P dx + Q dy = - \iint_D -7 dx dy$$

$$\hat{=} \oint_C P dx + Q dy = - \int_0^1 2y dy + 7S(D) \quad \hat{=} I_6 = -4 + \frac{7p}{2}$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

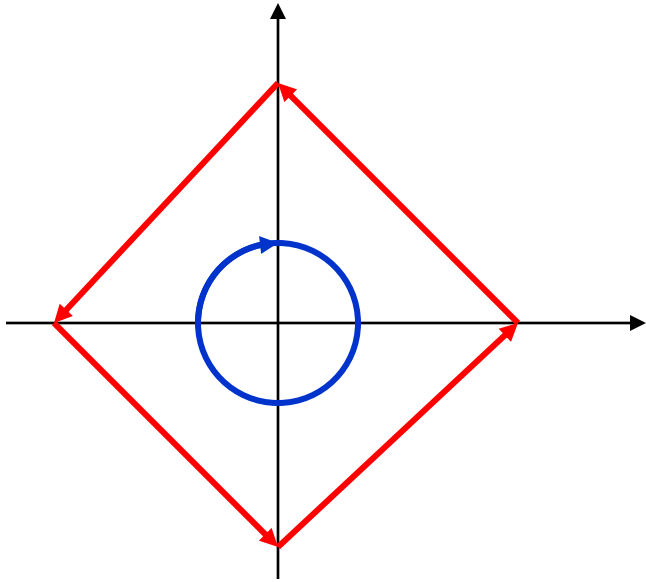
Ví dụ 7: Cho 2 hàm $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Tính $I_7 = \oint_C P dx + Q dy$ với C là chu tuyến kín, dương

1. Của hình vuông $|x|+|y|=1$
2. Của hình tròn $x^2+y^2=1$
3. Không bao quanh gốc tọa độ

Nhận xét : Ta có $Q'_x = P'_y$ và 2 hàm P, Q đều không xác định tại gốc tọa độ O(0,0) tức là nếu đường cong C bất kỳ bao kín miền D chứa O thì ta sẽ không áp dụng được CT Green

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green



1. Hình vuông $|x|+|y|=1$ chứa O. Để áp dụng CT Green, ta sẽ “khoét” đi phần chứa O.

Cụ thể, ta gọi C_1 là đường tròn $x^2+y^2=r^2$, với r đủ nhỏ lấy cùng chiều kim đồng hồ

Áp dụng CT Green trên CUC_1 là biên dương của miền $D: |x|+|y|\leq 1, x^2+y^2\geq r^2$, ta được

$$\oint_{C \cup C_1} P dx + Q dy = + \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

$$\oint_{C \in C_1} P dx + Q dy = + \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

$$\hat{U} \quad \oint_C P dx + Q dy = - \oint_{C_1} P dx + Q dy$$

$$\hat{U} \quad I_7 = - \oint_{C_1} \frac{xdy - ydx}{r^2} \quad \text{Đặt } x=r\cos t, y=r\sin t \text{ ta được}$$

$$I_7 = - \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (r \cos t \cdot r \cos t dt - r \sin t \cdot (-r \sin t dt))$$

$$I_7 = 2\pi$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

2. C là chu tuyến dương của đường tròn $x^2+y^2=1$ nên ta thay vào 2 hàm P, Q để được

$$I_7 = \oint_C x dy - y dx$$

Ta áp dụng được CT Green để được

$$I_7 = 2\pi$$

2: Tích phân đường loại 2 – CT Green

Chú ý: Cách làm ở câu 1. không chỉ đúng cho khi C là chu tuyến dương của hình vuông mà còn được làm tương tự khi C là đường cong bất kỳ bao gốc tọa độ. Tức là với mọi chu tuyến dương bao kín miền D chứa gốc tọa độ ta luôn có $I_7 = 2\pi$

3. Do C không bao quanh gốc tọa độ nên ta áp dụng được CT Green.

Vì $Q'_x = P'_y$ nên ta có $I_7 = 0$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2 KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG ĐI

Cho các hàm $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trong miền mở, đơn liên D . 4 mệnh đề sau tương đương

1. $Q'_x = P'_y$

2. $\int_{AB} P dx + Q dy$ không phụ thuộc đường cong trơn từng khúc nối từ A đến B trong D

3. $\oint_C P dx + Q dy = 0$ Với mọi chu tuyến C kín, trơn từng khúc trong D

4. Tồn tại hàm $U(x,y)$ sao cho $dU = Pdx + Qdy$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

Cách làm:

1. Thông thường, ta sẽ kiểm tra điều kiện 1. hoặc 4.
(nếu là hàm đã cho sẵn)

2. Nếu điều kiện 4. thỏa, ta sẽ có cách 1 để tính tp:

Tìm hàm $U(x,y)$ sao cho $dU = Pdx + Qdy$ tức là ta đi
giải hệ $U'_x = P, U'_y = Q$ và thay vào tích phân (A là
điểm đầu, B là điểm cuối)

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

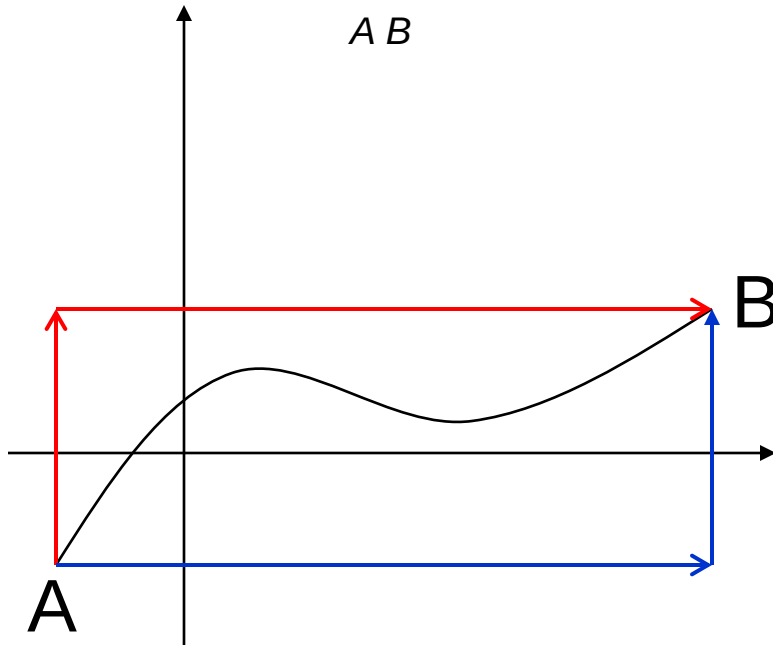
2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

Cách 2: Kiểm tra điều kiện 1. đúng thì ta sẽ chọn đường nối từ A đến B nằm hoàn toàn trong D là đường gấp khúc theo các đt song song với các trục tọa độ

Khi đó : $\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y) dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B) dx$

Hoặc

$$= \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_A) dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y) dy$$



2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

$$\text{Ví dụ 8: Tính } I_8 = \int_{(2,1)}^{(4,2)} x dy + y dx$$

Cách 1: **Tìm hàm U** sao cho $U'_x=y$, $U'_y=x$

Ta được $U(x,y)=xy$. Nên $I_8 = 4.2 - 2.1 = 6$

Cách 2: Kiểm tra điều kiện $Q'_x=P'_y=1$, vì $P=y$, $Q=x$

$$I_8 = \int_2^4 dx + \int_1^2 4 dy = 2 + 4.1 = 6$$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

Ví dụ 9: Tính các tích phân

$$I_9 = \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad \text{theo đường cong không cắt trục Oy}$$

$$I_{10} = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2yzdz$$

9. Tìm hàm U sao cho : $U'_x = -\frac{y}{x^2}, U'_y = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

Ta được $U = \frac{y}{x}$

$$I_9 = \int_{(2,1)}^{(1,2)} dU = U(1,2) - U(2,1) = \frac{3}{2}$$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

10. Ta tìm hàm $U(x,y,z)$ sao cho $dU=Pdx+Qdy+Rdz$

Suy ra $U'_x=2xy$, $U'_y=x^2-z^2$, $U'_z=-2yz$

Đạo hàm theo x của U là $2xy$ thì nguyên hàm chắc chắn có số hạng x^2y

Đạo hàm theo y của U có x^2-z^2 thì chắc chắn nguyên hàm có số hạng x^2y-yz^2

Đạo hàm theo z của U là $-2yz$ thì chắc chắn nguyên hàm có số hạng $-yz^2$

Tổng hợp từ 3 kết quả trên ta được hàm

$$U(x,y,z)=x^2y-yz^2+C$$

$$\text{Vậy } I_{10} = U(1,2,3)-U(0,0,0) = (1.2-2.9+C)-(C) = -16$$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

Ví dụ 10: Tìm hàm $h(y)$ thỏa $h(1)=1$ sao cho tp

$$I_{11} = \int_A^B (2xy + 3)h(y)dy - y^2 h(y)dx$$

Là tp không phụ thuộc đường đi. Sau đó tính tp với $A(1,1)$, $B(3,2)$

Để I_{11} là tp không phụ thuộc đường đi ta phải có

$$\begin{aligned} Q'_x = P'_y &\Leftrightarrow [(2xy+3).h(y)]'_x = [-y^2.h(y)]'_y \\ &\Leftrightarrow 2y.h = -2y.h - y^2.h' \\ &\Leftrightarrow 4y.h = -y^2.h' \end{aligned}$$

Như vậy, ta được pt vi phân cấp 1 với hàm là h , biến là y

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

Ta sẽ viết lại pt trên thành pt tách biến

$$-\frac{4dy}{y} = \frac{dh}{h} \quad \Leftrightarrow \quad -4 \int \frac{dy}{y} + C = \int \frac{dh}{h} \quad \Leftrightarrow \quad -4\ln y + \ln C = \ln h$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{y^4} = h(y)$$

Thay điều kiện $h(1)=1$ vào, ta được $C=1$.

Khi đó, ta có tp không phụ thuộc đường đi

$$I_{(1,1)}^{(3,2)} = \int_{(1,1)}^{(3,2)} (2xy + 3) \frac{1}{y^4} dy - \frac{1}{y^2} dx$$

Tìm hàm $U(x,y)$ sao cho $U'_y=Q$, $U'_x=P$

2: Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc đường đi

$$U'_x = -\frac{1}{y^2}$$

$$U'_y = \frac{2xy}{y^4} + \frac{3}{y^4}$$

Từ đh của U theo x, suy ra U có chứa $-\frac{x}{y^2}$

Thay vào pt dưới, ta suy ra $U(x, y) = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y^3}$

Vậy $I_{11} = U(2, 3) - U(1, 1) = \frac{47}{27}$