

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

NỘI DUNG

1. Định nghĩa tp đường loại 2
2. Tính chất tp đường loại 2
3. Cách tính tp đường loại 2
4. Định lý Green
5. Tích phân không phụ thuộc đường đi.

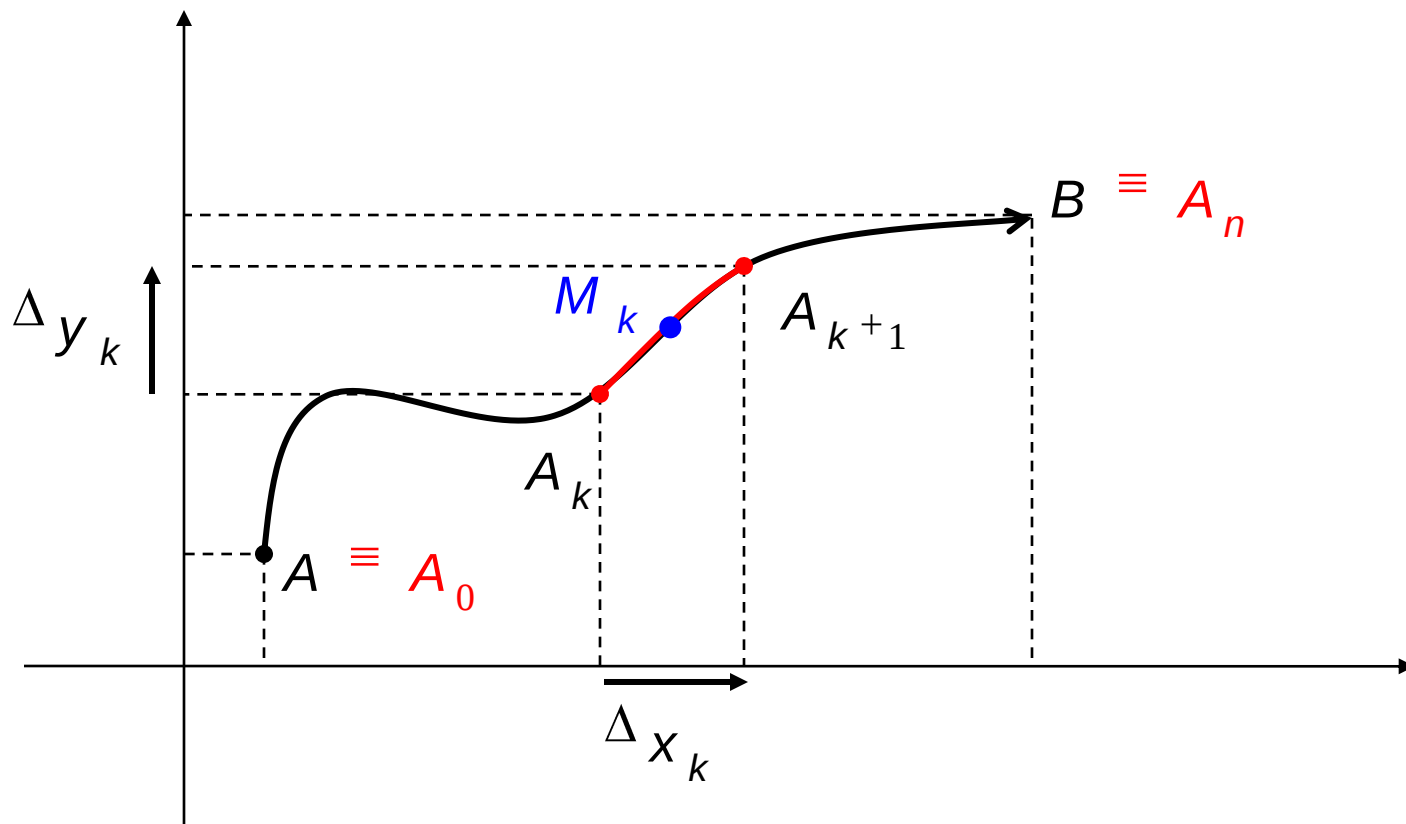
ĐỊNH NGHĨA

Trong mp Oxy, cho cung AB và 2 hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ xác định trên AB.

Phân hoạch AB bởi các điểm $\{A_0, A_2, \dots, A_n\}$, với $A_0 = A$, $A_n = B$. Giả sử $A_k = (x_k, y_k)$, $k = 0, \dots, n$.

Gọi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $k = 0, \dots, n-1$.

Trên cung $A_k A_{k+1}$, lấy điểm M_k , xét tổng tp



$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k) \Delta x_k + Q(M_k) \Delta y_k$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

là tp đường loại 2 của P, Q trên AB

Quy ước: $\oint_C P dx + Q dy$

chỉ tích phân trên chu tuyến (đường cong kín) C

TÍNH CHẤT TP ĐƯỜNG LOẠI 2

1. Tp đường loại 2 phụ thuộc vào chiều đường đi

$$\int\limits_A^B P dx + Q dy = \ominus \int\limits_B^A P dx + Q dy$$

Đổi chiều
đường đi thì tp
đổi dấu.

2. Nếu $C = C_1 \cup C_2$

$$\int\limits_C P dx + Q dy = \int\limits_{C_1} P dx + Q dy + \int\limits_{C_2} P dx + Q dy$$

CÁCH TÍNH TP ĐƯỜNG LOẠI 2

Khi tham số hóa đường cong, lưu ý về chiều đường đi.

TH1: (C) viết dạng tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$,

t_1 : điểm đầu, t_2 : điểm cuối

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

TH2: (C) viết dạng $y = y(x)$,

$x = a$: điểm đầu, $x = b$: điểm cuối

$$\int P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$$= \int_a^b P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) dx$$

TH3: (C) viết dạng $x = x(y)$,

$y = c$: điểm đầu, $y = d$: điểm cuối

$$\int_c^d P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y) dy$$

Nhắc lại

Khi tham số hóa cho cung tròn, elippse, ngược chiều kim đồng hồ là tham số tăng dần, cùng chiều kim đồng hồ là tham số giảm dần.

Cách tính Tp đường loại 2 trong không gian

$$I = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

Cách tính: (C) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,
 t_1 : điểm đầu, t_2 : điểm cuối

$$\begin{aligned} & \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(-, -, -) y'(t) + R(-, -, -) z'(t) dt \end{aligned}$$

VÍ DỤ

1/ Tính: $I = \int_C x^2 dx + xy dy$

C là đoạn nối từ A(0,0) đến B(1,1) theo các đường cong sau đây:

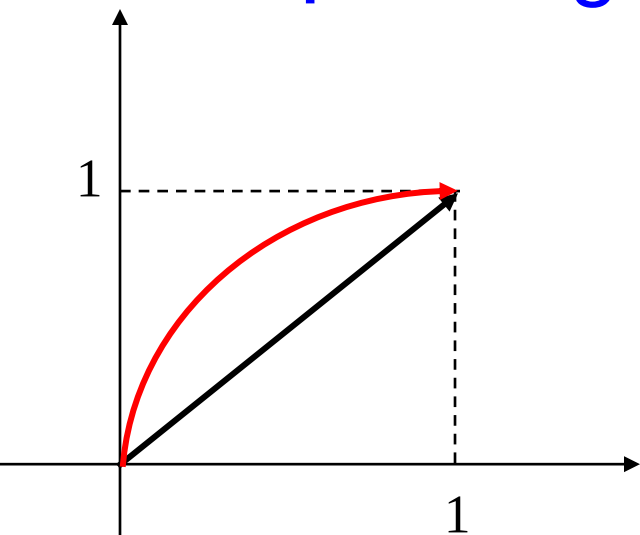
a. Đoạn thẳng AB

b. Parabol: $x = y^2$

c. Đường tròn: $x^2 + y^2 = 2y$, lấy ngược chiều KĐH

$$I = \int_C x^2 dx + xy dy \quad A(0, 0), B(1, 1)$$

a/ Đoạn thẳng AB: $y = x, x : 0 \rightarrow 1$

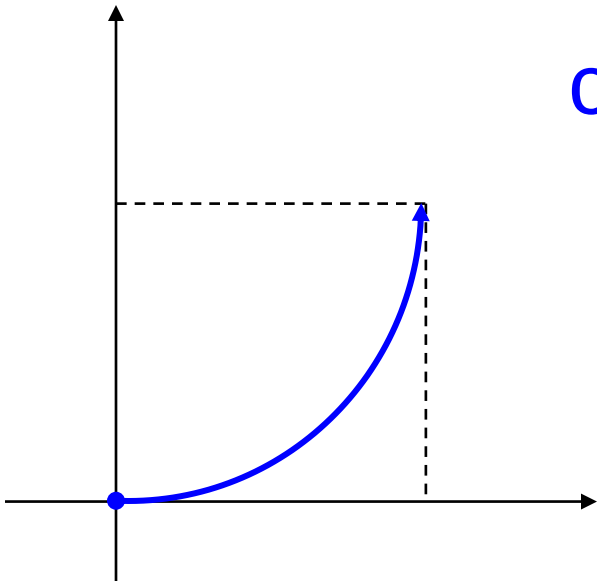


$$I = \int_0^1 \left[x^2 + x \cdot x \cdot y'(x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x^2) dx = \frac{2}{3}$$

b/ Parabol: $x = y^2, y : 0 \rightarrow 1$

$$I = \int_0^1 \left[(y^2)^2 \cdot 2y + y^2 \cdot y \right] dy = \int_0^1 (2y^5 + y^3) dy = \frac{7}{12}$$



$$c/ \quad x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

lấy ngược chiều KĐH

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t,$$

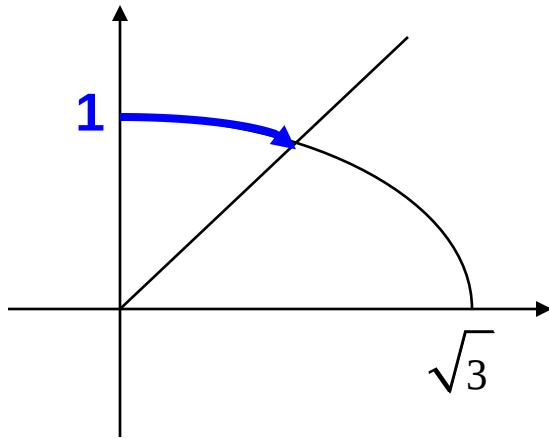
$$A(0,0) \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$

$$B(1,1) \Rightarrow t = 0$$

$$I = \int_{-\pi/2}^0 [\cos^2 t (-\sin t) + \cos t (1 + \sin t) \cos t] dt = \frac{\pi}{4}$$

2/ Tính: $I = \int_C 2y dx + x dy$

với C là cung ellipse $x^2 + 3y^2 = 3$ đi từ $(0, 1)$ đến giao điểm đầu tiên của ellipse với đường thẳng $y = x$, lấy **theo chiều KĐH**.



$$x = \sqrt{3} \cos t, y = \sin t$$

$$(x, y) = (0, 1) \Leftrightarrow t = \pi / 2$$

Tại giao điểm với đt $y = x$:

$$\sqrt{3} \cos t = \sin t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \sqrt{3} \cos t, y = \sin t$$

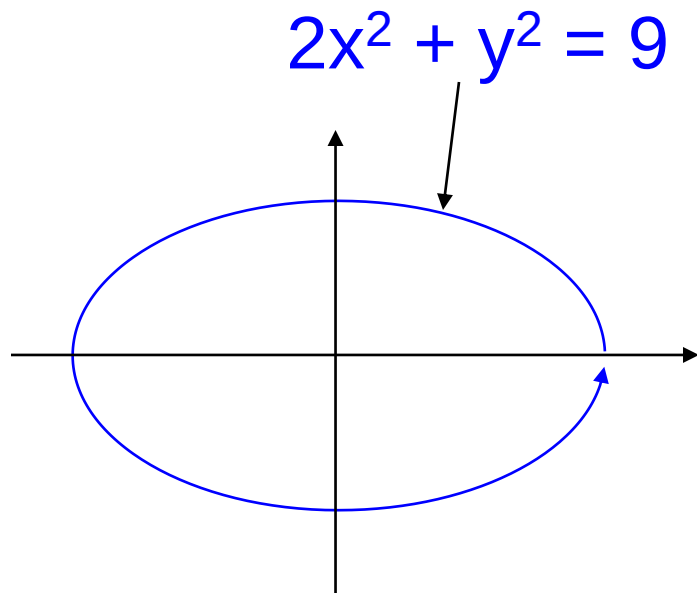
$$I = \int_C 2y dx + x dy$$

C

$$= \int_{\pi/2}^{\pi/3} \left[2 \sin t (-\sqrt{3} \sin t) + \sqrt{3} \cos t \cdot \cos t \right] dt$$

3/ Tính: $I = \int_C 2y dx + z dy + 3y dz$

với C là gt của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ và
mp $z = 3 - x$ lấy ngược chiều KĐH nhìn từ
phía dương trục Oz



$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t,$$

$$y = 3 \sin t,$$

$$z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$$

$$t : 0 \rightarrow 2\pi$$

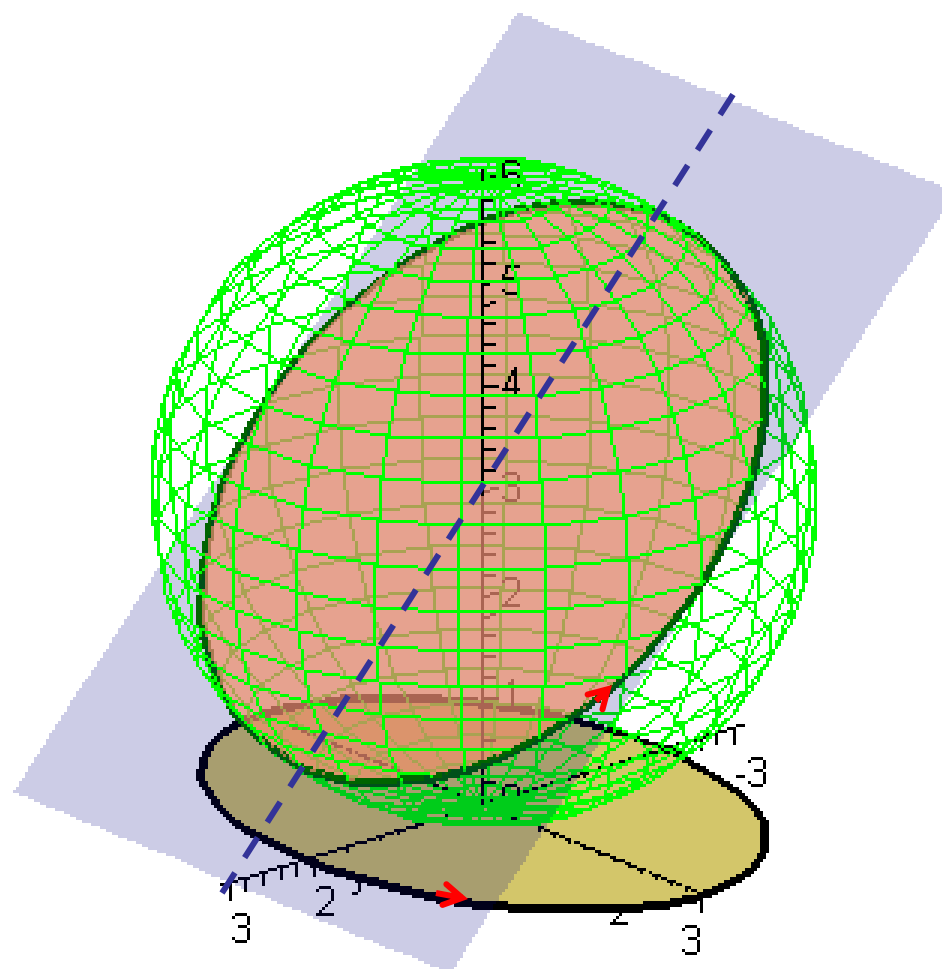
$$I = \int 2y dx + z dy + 3y dz$$

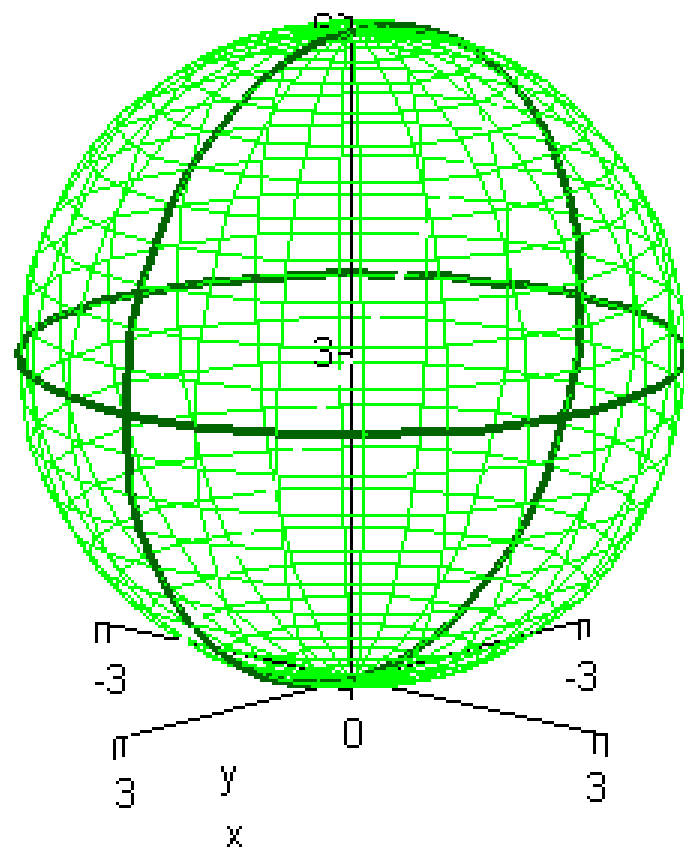
$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, y = 3 \sin t, z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$$

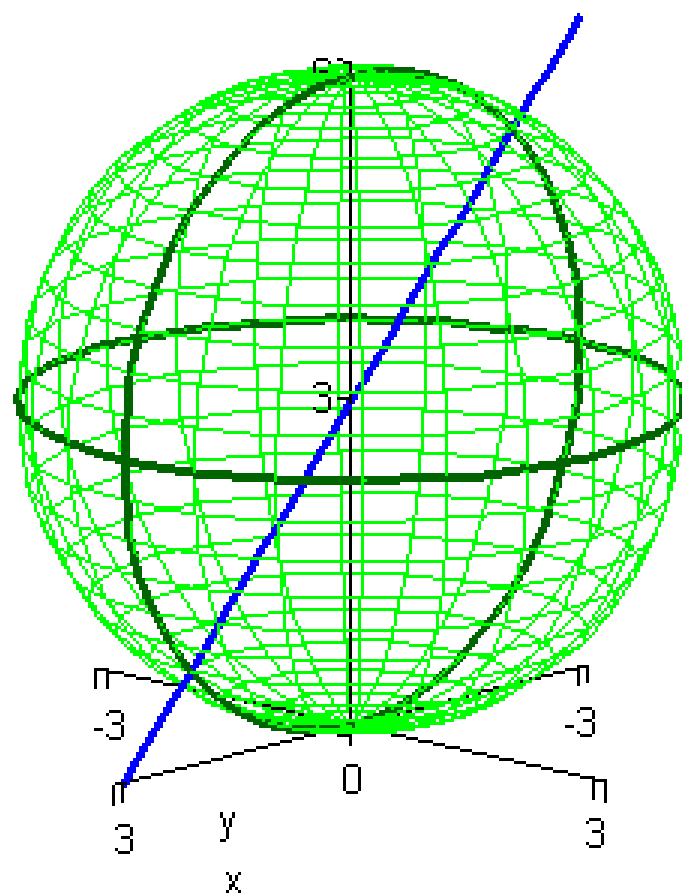
$$2y(t)x'(t) + z(t)y'(t) + 3y(t)z'(t)$$

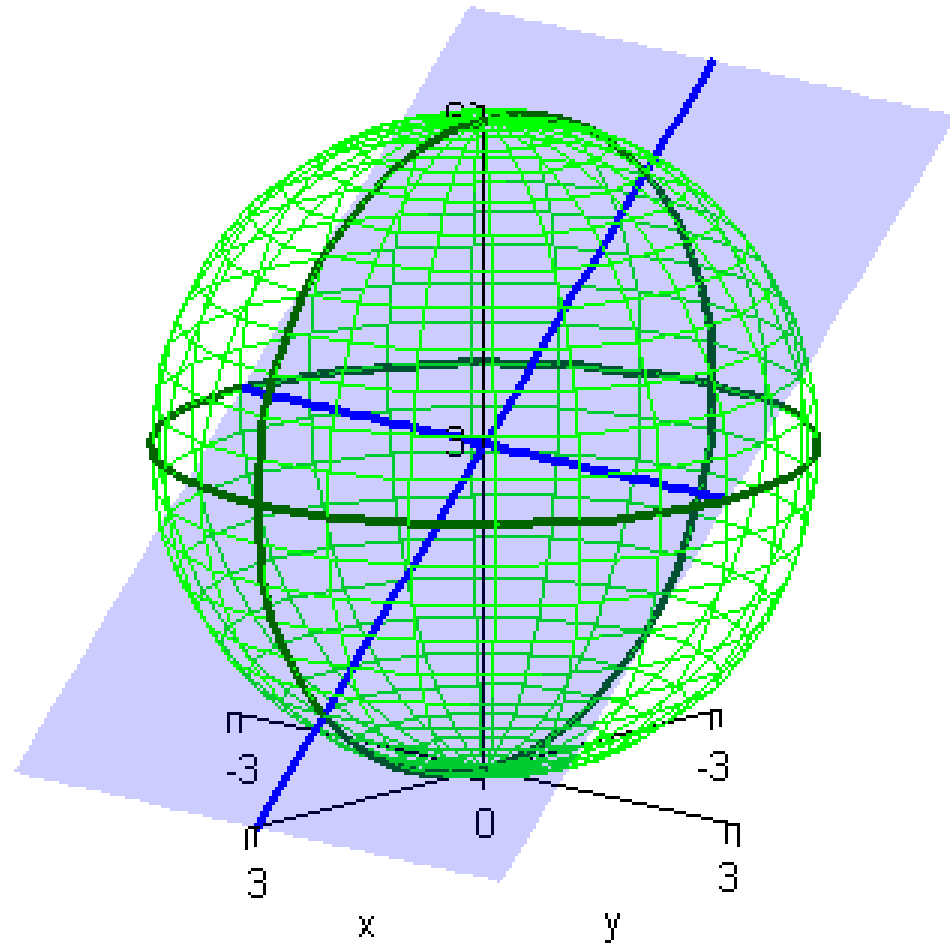
$$= 6 \sin t \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \right) + \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t \right) (3 \cos t)$$

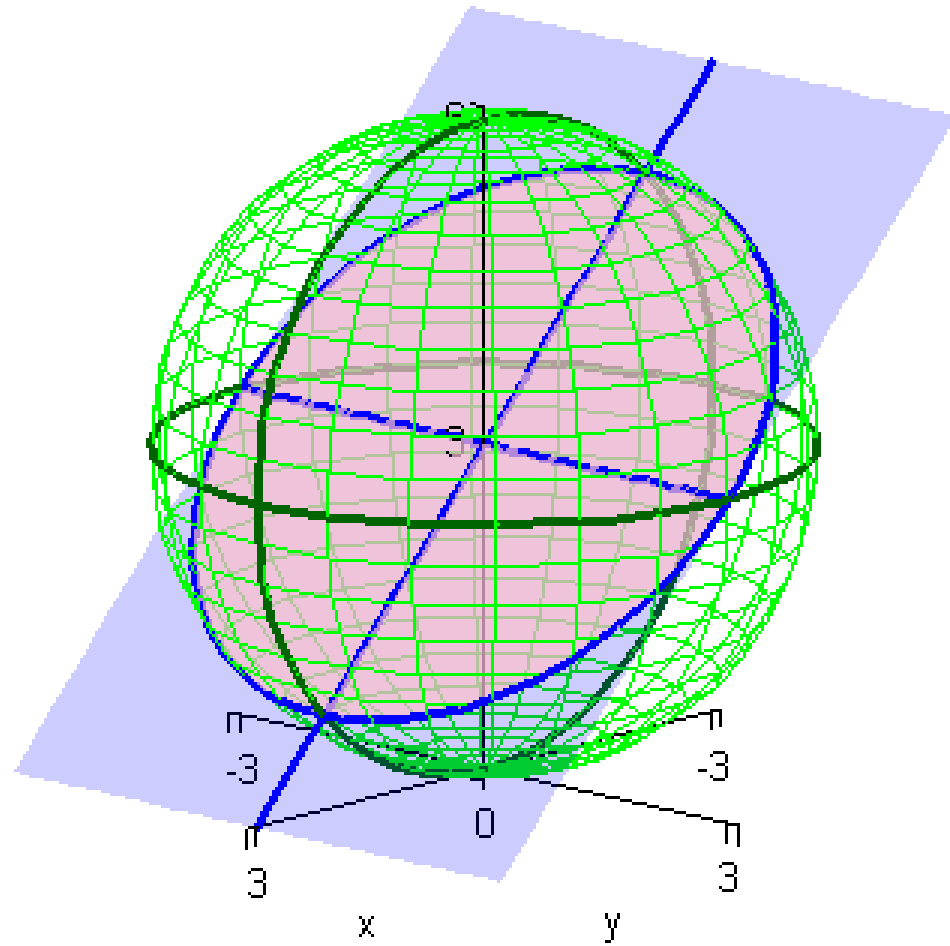
$$+ 9 \sin t \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t = 9 \cos t$$

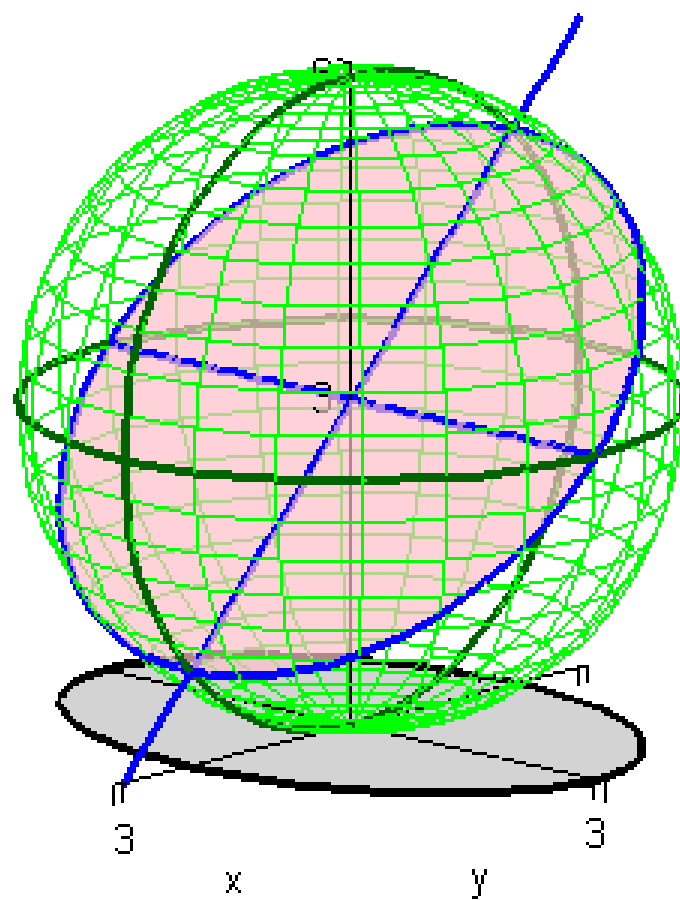






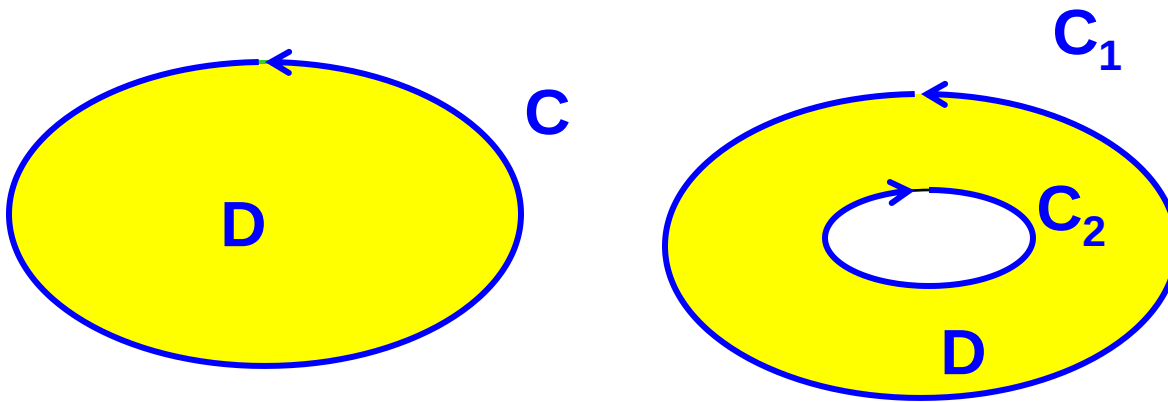






CÔNG THỨC GREEN

Định nghĩa: Nếu chu tuyến C (đường cong kín) là biên của miền $D \subset \mathbb{R}_2$, chiều dương của C là chiều mà đi trên đó, miền D nằm về bên trái.



Định nghĩa: Miền đơn liên là miền mà mọi chu tuyến trong miền này có thể co về 1 điểm trong miền (không chứa lỗ thủng).

Định lý

D là miền đóng và bị chặn trong R_2 , C là biên định hướng dương của D . Giả sử P, Q và các đạo hàm riêng liên tục trên D . Khi đó

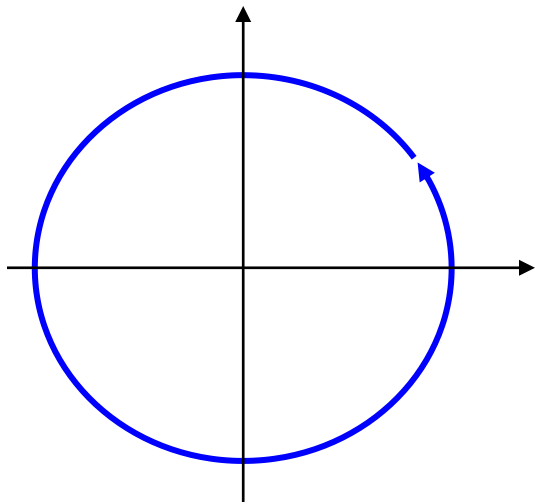
$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(Công thức Green)

Lưu ý: C có thể gồm nhiều chu tuyến giới hạn miền D .

VÍ DỤ

1/ Tính: $I = \int_C x^2 y dx - x y^2 dy$ trong đó C là đ tròn $x^2 + y^2 = 1$, lấy ngược chiều KĐH.



Gọi D là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$,
khi đó C là biên định hướng
dương của D .

Áp dụng công thức Green:

$$I = \int_C x^2 y dx - x y^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_D (-y^2 - x^2) dx dy$$

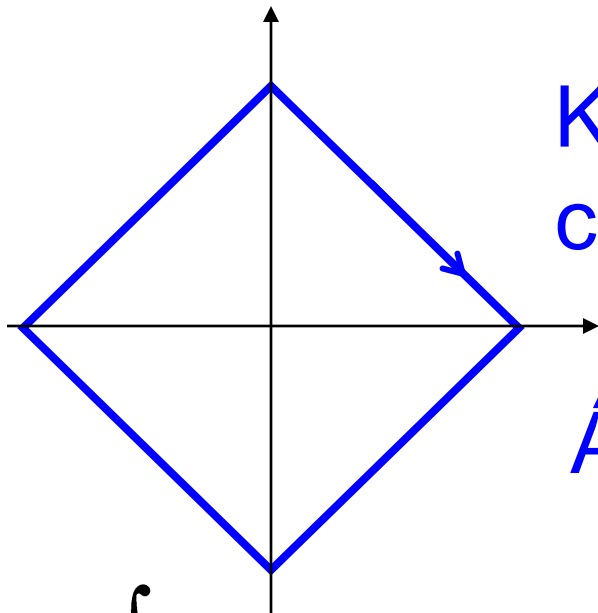
$$D: \\ x^2 + y^2 \leq 1$$

$$= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{-\pi}{2}$$

$$2/ \text{ Tính: } I = \int (x - 2y) dx + (3x + y) dy$$

$C = \{(x, y) / |x| + |y| = 1\}$, lấy theo chiều KĐH.

Gọi D là hình vuông $|x| + |y| \leq 1$.



Khi đó C là biên định hướng âm của D .

Áp dụng công thức Green :

$$I = \int_C (x - 2y) dx + (3x + y) dy = \ominus \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$I = \int_C (x - 2y) dx + (3x + y) dy$$

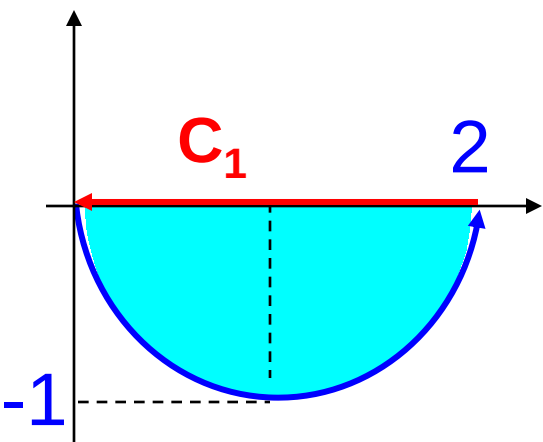
$$= - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= - \iint_D (3 + 2) dx dy = -5S(D) = -10$$

3/ Tính:

$$I = \int_C (x^2 + y \cos xy) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos xy \right) dy$$

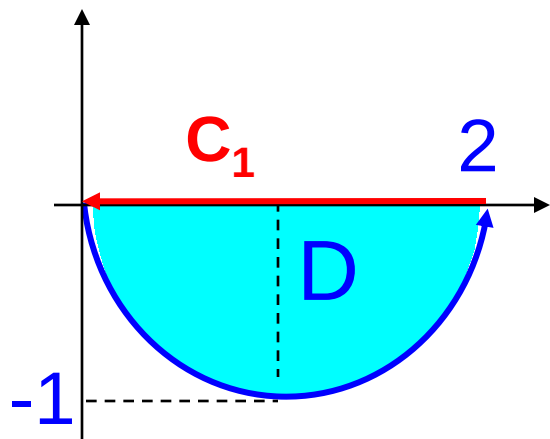
C là nửa dưới đt $x^2 + y^2 = 2x$, ngược chiều KĐH



- Nếu tham số hóa để tính $I \Rightarrow$ khó
- C không kín nên không thể áp dụng ct Green.

Gọi C_1 là đoạn thẳng $y = 0, x: 2 \rightarrow 0$

D là nửa dưới hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2x$



Khi đó $C \cup C_1$ là biên định hướng dương của D.

Áp dụng ct Green:

$$\begin{aligned}
 & \int_{C \cup C_1} (x^2 + y \cos xy) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos xy \right) dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\
 &= \int_{-\pi/2}^0 d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (r^2 - 1) r dr = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\int_{C \cup C_1} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy \oplus \int_{C_1} P dx + Q dy = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = \int_C P dx + Q dy = \frac{\pi}{4} - \int_{C_1} P dx + Q dy$$

$$\begin{cases} P = x^2 + y \cos xy \\ Q = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos xy \end{cases}$$

$$C_1: y = 0, x: 2 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} - \int_2^0 x^2 dx = \frac{\pi}{4} + \frac{8}{3}$$

4/ Cho $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, kiểm tra: $P'_y = Q'_x$

Tính : $I = \int_C P dx + Q dy$ trong các TH sau:

a) C là đtr $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ tùy ý.

b) C là đtr $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

c) $C = \{(x, y) / \max \{|x|, |y|\} = 1\}$

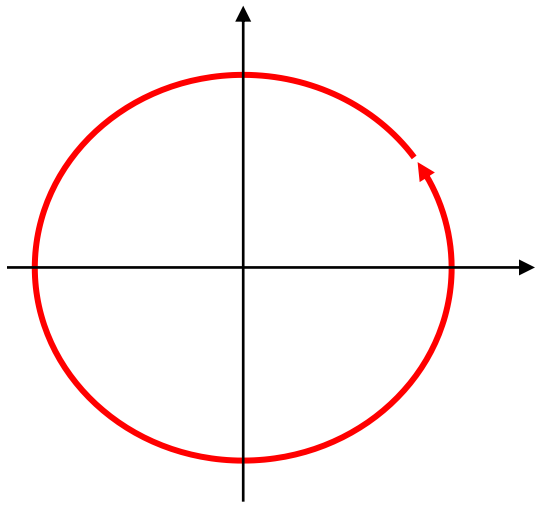
d) C là đường cong bao quanh gốc tọa độ nối từ điểm $(1, 0)$ đến $(\pi, 0)$.

Các đường cong đều lấy ngược chiều KĐH.

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$Q'_x = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = P'_y$$

a) C là đtr $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$ tùy ý.



Vì P , Q và các đạo hàm riêng không xác định tại $(0, 0)$ nên không thể áp dụng công thức Green trên hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Tham số hóa C:

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\begin{cases} x = R \cos t, y = R \sin t \\ t : 0 \rightarrow 2\pi \end{cases}$$

$$I = \int_C P dx + Q dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t (-R \sin t) + R \cos t (R \cos t)}{R^2} dt$$

$$= 2\pi$$

Nhận xét: trên đường tròn C, do $x^2 + y^2 = R^2$,
thay vào tp ta có

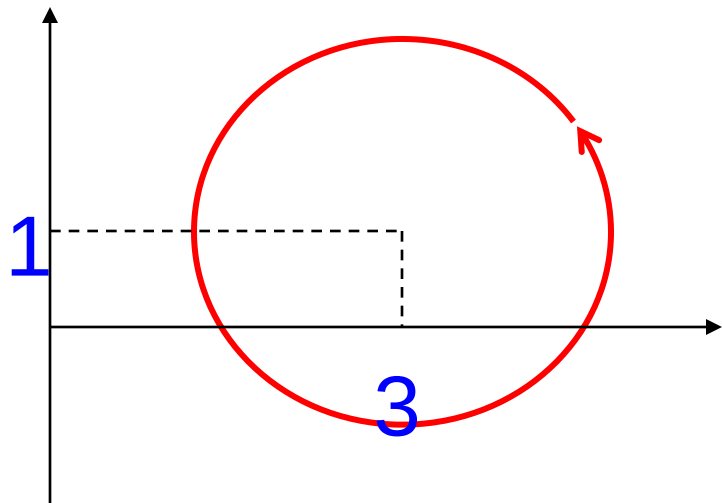
$$I = \int_C P dx + Q dy = \int_C \frac{-y dx + x dy}{R^2}$$

Lúc này : $P = -\frac{y}{R^2}, Q = \frac{x}{R^2}$, xác định tại (0, 0).

$\Rightarrow$ Áp dụng ct Green được

$$I = \int_C \frac{-y dx + x dy}{R^2} = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{-1}{R^2} \right) dx dy = 2\pi$$

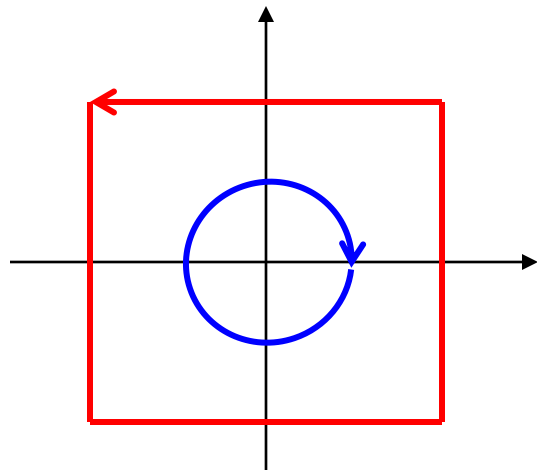
b) C là đtr $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.



Áp dụng ct Green trên
hình tròn biên C

$$\begin{aligned} I &= \int_C P dx + Q dy = \iint_{(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 4} (Q'_x - P'_y) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

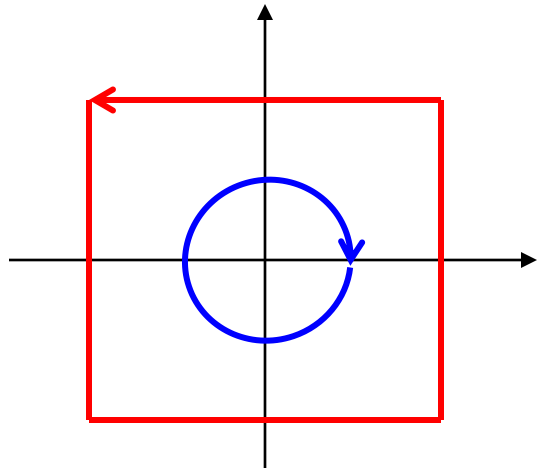
c) $C = \{(x,y) / \max \{ |x|, |y| \} = 1\}$ $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$



Không thể áp dụng ct Green
trên miền hình vuông (P, Q
không xác định tại (0,0)).

Dùng 1 đường tròn C' đủ nhỏ bao gốc O
(hoặc 1 đtròn đủ lớn bao cả đường cong C).
Áp dụng ct Green trên hình vành khăn (HVK)
giới hạn bởi C và C' (hình vành khăn sẽ
không chứa (0,0)).

$C' : x^2 + y^2 = R^2$ lấy cùng chiều KĐH



$$I = \int_{C \cup C'} P dx + Q dy$$

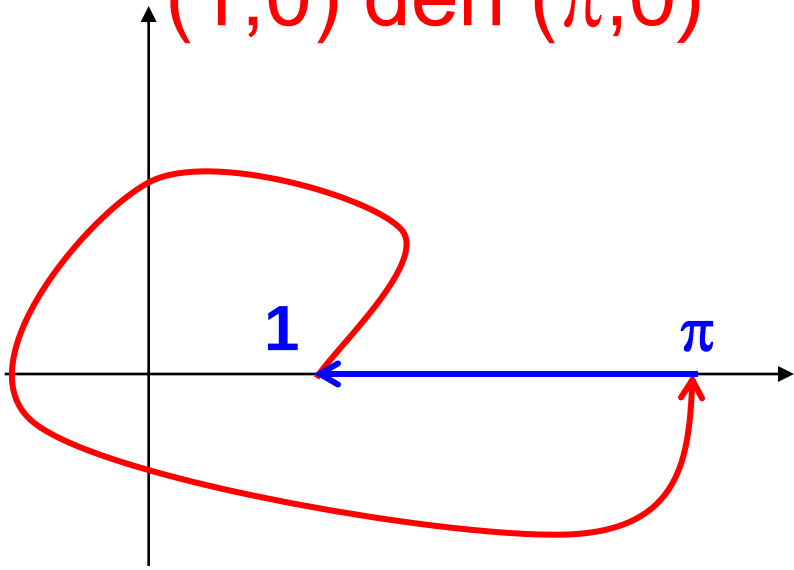
$$= \iint_{HVK} (Q'_x - P'_y) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_C P dx + Q dy = - \int_{C'} P dx + Q dy = 2\pi \text{ (theo câu a)}$$

Nhận xét: khi tính tp trong câu c) theo cách này, không sử dụng tham số hóa của đc (C),

Nếu C là đường cong tùy ý bao gốc O?

d) C là đường cong bao quanh gốc O nối từ $(1,0)$ đến $(\pi,0)$



Nối vào C bởi C' với

$$C': y = 0, x : \pi \rightarrow 1$$

Khi đó $C \cup C'$ là đường cong kín bao gốc O ,
áp dụng kết quả câu c).

TÍCH PHÂN KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG ĐI

D là miền mở đơn liên. P, Q và các đạo hàm riêng liên tục trên D . Các điều sau tương đương:

$$1 / \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$2 / \quad \int_A^B P dx + Q dy \text{ không phụ thuộc đường nối } A, B$$

$$3 / \quad \oint_C P dx + Q dy = 0 \text{ với mọi chu tuyến trong } D$$

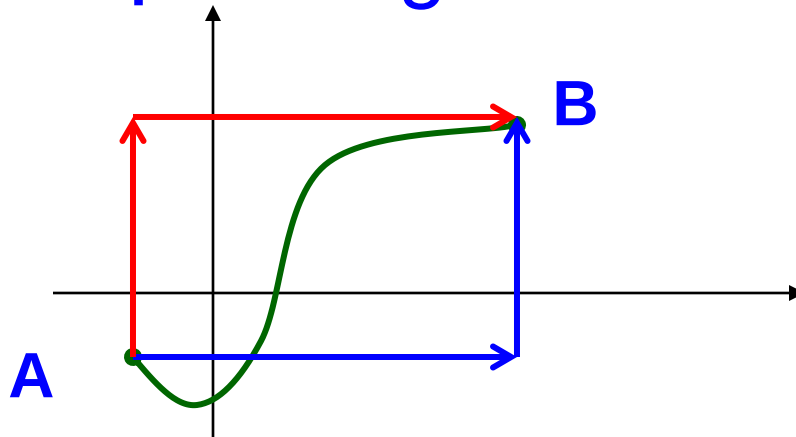
$$4 / \text{ Tồn tại hàm } U(x, y) \text{ thỏa: } dU = P dx + Q dy$$

(Biểu thức dưới dấu tp là vp toàn phần của U)

Áp dụng

1. Thông thường ta sẽ kiểm tra điều kiện **1** hoặc **4** (nếu hàm U có thể đoán nhanh).
2. Nếu 1 hoặc 4 thỏa, có 2 cách tính tp từ A đến B

C_1 : Đổi đường lấy tp thông thường đi theo các đoạn thẳng // với các trục tọa độ



Lưu ý miền D

Áp dụng

C_2 : với hàm U trong đk 4

$$\int_A^B P dx + Q dy = U(B) - U(A)$$

Cách tìm U : $\begin{cases} C_1: \text{Tìm } U \text{ từ hệ : } U'_x = P, U'_y = Q \\ C_2: \text{chọn } (x_0, y_0) \text{ tùy ý trong } D \end{cases}$

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt$$

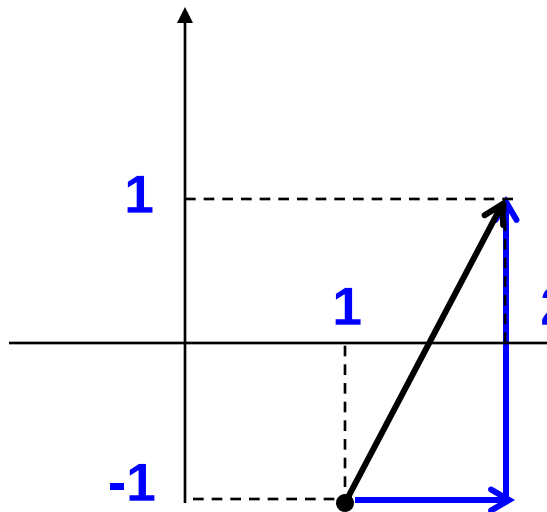
$$\text{hay } U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt$$

VÍ DỤ

1/ Tính : $I = \int_C y dx + x dy$

C: đoạn thẳng nối 2 điểm $(1, -1)$, $(2, 1)$.

$P'_y = Q'_x$ trên R_2 nên tp không phụ thuộc đường đi.


$$I = \int_{(1, -1)}^{(2, 1)} y dx + x dy + \int_{(2, 1)}^{(2, -1)} y dx + x dy + \int_{(2, -1)}^{(1, -1)} y dx + x dy$$
$$= - \int_1^2 1 dx + \int_{-1}^1 2 dy = 3$$

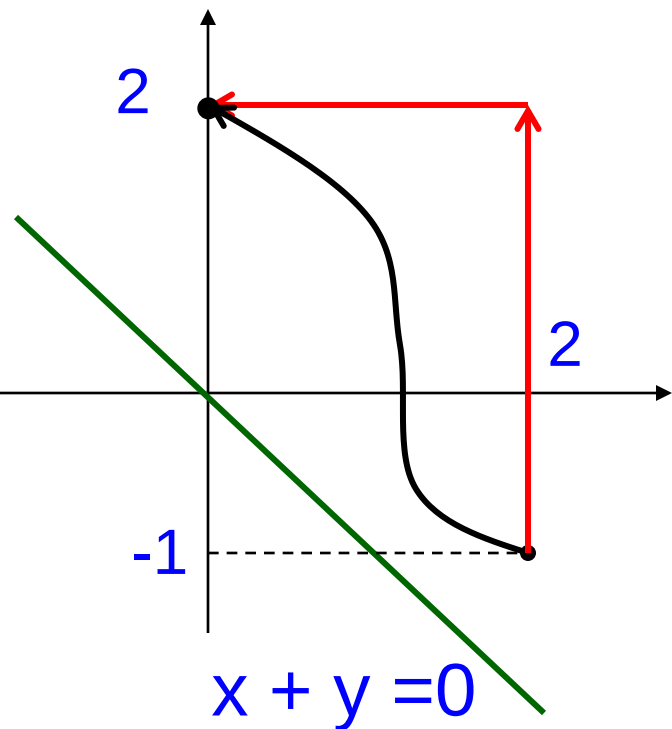
Cách khác: nhận thấy hàm $U(x, y) = xy$ thỏa

$$dU = ydx + xdy \text{ trên } R_2 \text{ nên}$$

$$I = U(2, 1) - U(1, -1) = 2 + 1 = 3$$

2/ Tính : $I = \int_{(2, -1)}^{(0, 2)} \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$

Theo đường không cắt đường thẳng $x + y = 0$



$P'_y = Q'_x, \quad \forall (x, y): x + y \neq 0$

$$I = \int_{-1}^2 \frac{y dy}{(2 + y)^2} + \int_2^0 \frac{(x + 4) dx}{(x + 2)^2}$$

$$= \ln 2 - 2$$

Hoặc(tính U): chọn $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$U(x, y) = \int_1^x \frac{(t + 0) dt}{(t + 0)^2} + \int_0^y \frac{t dt}{(x + t)^2}$$

$$= \ln |x + y| + \frac{x}{x + y} - 1$$

3/ Tìm các hằng số a, b sao cho tp

$$\int_A^B (axy^2 + 3y)dx + [(b-2)x^2y + (a+b)x]dy$$

không phụ thuộc đường đi. Sau đó, với a, b vừa tìm được, tính tp với A(-1, 2), B(0,3).

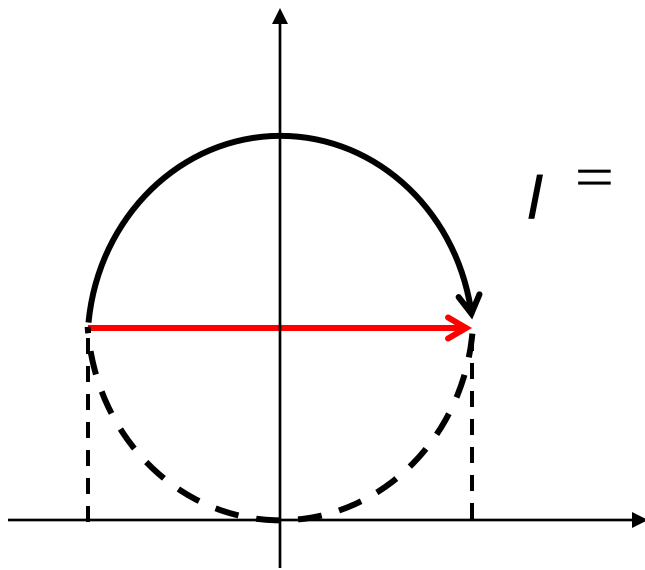
$$P'_y = Q'_x \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{2} \quad U(x, y) = \frac{1}{4}x^2y^2 + 3xy$$

$$\int_A^B P dx + Q dy = U(B) - U(A) = -5$$

4/ Tìm hàm số $h(y)$ thỏa $h(1) = 1$ sao cho tp

$$\int_A^B (2xy + 3)h(y)dy - y^2h(y)dx$$

không phụ thuộc đường đi. Sau đó, với h vừa tìm được, tính tp với $A(-1,1)$, $B(1,1)$ theo đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$, lấy cùng chiều KĐH.



$$I = \int_A^B (2xy + 3)h(y)dy - y^2 h(y)dx$$

$$P'_y = Q'_x \Rightarrow h(y) = \frac{1}{y^4}$$

$$I = \int_{(-1,1)}^{(1,1)} -\frac{dx}{y^2} + \left(\frac{2x}{y^3} + \frac{3}{y^4} \right) dy \quad \text{theo nửa trên đường tròn}$$

Đổi đường lấy tp: chọn đường thẳng nối A, B.

$$I = \int_{-1}^1 -\frac{dx}{1^2} = -2$$