

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Phần 2

Nội dung

1. Đạo hàm và vi phân hàm hợp.
2. Đạo hàm và vi phân hàm ẩn.

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM HỢP

Trường hợp cơ bản: hợp của hàm 2 biến và hàm 2 biến

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Nếu z , x , y khả vi:

$$z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u, \quad z'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v$$

$$dz = z'_u du + z'_v dv$$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy$$

$$= f'_x (x'_u du + x'_v dv) + f'_y (y'_u du + y'_v dv)$$

Trường hợp riêng 1

Cho $z = f(x)$ và $x = x(u, v)$ (hợp của 1 biến và 2 biến)

$$z'_u = f'(x) x'_u, \quad z'_v = f'(x) x'_v$$

$$dz = z'_u du + z'_v dv$$

$$dz = f'(x) dx = f'(x) (x'_u du + x'_v dv)$$

Trường hợp riêng 2:

$z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ (hợp 2 biến và 1 biến)

$$z'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t)$$

$$dz = z'(t)dt$$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x \cdot x'(t)dt + f'_y \cdot y'(t)dt$$

Trường hợp riêng 3:

$z = f(x, y), y = y(x)$ (hợp 2 biến và 1 biến)

$$z'(x) = f'_x + f'_y \cdot y'(x)$$

$$dz = z'(x)dx$$

Lưu ý: khi tính đạo hàm hàm hợp, luôn bắt đầu từ đạo hàm của f theo biến chính. Sau đó, tùy thuộc vào yêu cầu, nhân thêm đạo hàm của biến chính vào cạnh đạo hàm của f .

VÍ DỤ

1/ Cho: $z = f(x, y) = e^{xy}$, $x = u^2$, $y = u + v$

tìm z'_u , z'_v , dz tại $(u, v) = (1, 1)$.

$$z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u$$

$$z'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v$$

$$(u, v) = (1, 1) \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$$

$$z'_u = ye^{xy} \cdot 2u + xe^{xy} \cdot 1$$

$$z'_v = ye^{xy} \cdot 0 + xe^{xy} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_u(1,1) = 2.e^2.2 + 1.e^2.1 = 5e^2 \\ z'_v(1,1) = e^2 \end{cases}$$

$$dz(1,1) = z'_u(1,1)du + z'_v(1,1)dv = 5e^2du + e^2dv$$

2/ Cho: $z = f(x) = \sin(x + x^2), x = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$

Tính z'_u, z'_v tại $(0, 1)$

$$z'_u = f'(x) \cdot x'_u$$

$$z'_v = f'(x) \cdot x'_v$$

$$x(0, 1) = 0$$

$$z'_u = (1 + 2x) \cos(x + x^2) \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

$$z'_v = (1 + 2x) \cos(x + x^2) \times \frac{-u}{v^2} \times \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}$$

$$\begin{cases} z'_u(0,1) = 1 \\ z'_v(0,1) = 0 \end{cases}$$

3/ Cho: $z = f(x, y) = \sin(xy),$

$$x = \arctan t, y = e^t$$

Tính $dz(t)$ tại $t = 0$

Cách 1: $dz = z'(t)dt$, với $z'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t)$,

$$z'(t) = y \cos(xy) \frac{1}{1+t^2} + x \cos(xy) e^t$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0, y = 1$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

$$z = f(x, y) = \sin(xy),$$

$$x = \arctan t, y = e^t$$

Cách 2: $dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x \cdot x'(t) dt + f'_y \cdot y'(t) dt$

$$dz = y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy$$

$$= y \cos(xy) \frac{dt}{1+t^2} + x \cos(xy) e^t dt$$

$$\Rightarrow dz(0) = dt$$

4/ Cho: $z = f(x, y) = \frac{\ln(y^2 + 1)}{x^2}.$

a/ Tính z'_x tại $(1,0)$.

b/ Nếu $y = e^x$, tính $z'(x)$ tại $x = 1$

$$a / z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = -2 \frac{\ln(y^2 + 1)}{x^3} \Rightarrow z'_x(1, 0) = -2 \frac{\ln(1)}{1} = 0$$

b/ $z'(x) = f'_x + f'_y \cdot y'(x)$

$$= -2 \frac{\ln(y^2 + 1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2 + 1)x^2} e^x$$

$$z'(x) = -2 \frac{\ln(y^2 + 1)}{x^3} + \frac{2y}{(y^2 + 1)x^2} e^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = e$$

$$\Rightarrow z'(0) = -2 \ln(e^2 + 1) + \frac{2e^2}{e^2 + 1}$$

5/ Cho: $z = f(x - y, xy)$, với f là hàm khả vi

Tính z'_x, z'_y

Đặt: $u = x - y, v = xy \Rightarrow z = f(u, v)$

(u, v là biến chính của f)

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v y$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot (-1) + f'_v x$$

6/ Cho: $z = x f\left(\frac{x}{y^2}\right)$ với f là hàm khả vi

Chứng minh đẳng thức: $2xz'_x + yz'_y = 2z$

Đặt : $u = \frac{x}{y^2} \Rightarrow z = x.f(u)$

$$z'_x = f(u) + x \cdot f'(u)$$

$$= f(u) + x \cdot f'(u) \cdot u'_x = f(u) + x \cdot f'(u) \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$z'_y = x \cdot f'(u)'_y$$

$$z = x f\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= x f'(u) \cdot u'_y = x \cdot f'(u) \cdot \frac{-2x}{y^3}$$

$$2xz'_x + yz'_y = 2x \left(f(u) + x \cdot f'(u) \cdot \frac{1}{y^2} \right) + yx \cdot f'(u) \cdot \frac{-2x}{y^3}$$

$$= 2xf(u) = 2z$$

7/ Cho: $z = f(x^2 - y, xy^2)$ với f là hàm khả vi

Tính dz theo dx, dy .

Đặt: $u = x^2 - y, v = xy^2 \Rightarrow z = f(u, v)$

• Cách 1: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ với

$$z'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot y^2$$

$$z'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot (-1) + f'_v \cdot 2xy$$

$$dz = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot y^2 \, dx + (-f'_u + f'_v \cdot 2xy) \, dy$$

- Cách khác:

$$dz = f'_u du + f'_v dv$$

$$= f'_u (u'_x dx + u'_y dy) + f'_v (v'_x dx + v'_y dy)$$

$$= f'_u (2x dx - dy) + f'_v (y^2 dx + 2xy dy)$$

$$= (2xf'_u + y^2 f'_v) dx + (2xyf'_v - f'_u) dy$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm hợp

Xét trường hợp cơ bản, các trường hợp khác tương tự.

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$z''_{uu} = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u$$

$$= \left[f'_{xu} \cdot x'_u + f'_x \cdot x''_{uu} \right] + \left[f'_{yu} \cdot y'_u + f'_y \cdot y''_{uu} \right]$$

$$z''_{uv} = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u$$

$$= \left[f'_{xv} \cdot x'_u + f'_x \cdot x''_{uv} \right] + \left[f'_{yv} \cdot y'_u + f'_y \cdot y''_{uv} \right]$$

$$\begin{aligned}
 z''_{vv} &= f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v \\
 &= \left[f'_{xv} \cdot x'_u + f'_{xu} \cdot x''_{uv} \right] + \left[f'_{yv} \cdot y'_u + f'_{yu} \cdot y''_{vv} \right]
 \end{aligned}$$

Các hàm $(f'_x)'_u$, $(f'_x)'_v$, $(f'_y)'_u$, $(f'_y)'_v$ phải tính theo hàm hợp.

Vi phân cấp hai của hàm hợp: (u, v là biến độc lập)

Để đơn giản, viết d^2z theo du , dv

$$d^2z = z''_{uu} du^2 + 2z''_{uv} du dv + z''_{vv} dv^2$$

Vi phân cấp 2 tính theo hàm hợp

Cho $z = f(x, y)$ và $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$dz = f'_x dx + f'_y dy \Rightarrow d^2 z = d(dz) = d f'_x dx + f'_y dy$$

Với x, y là các hàm số thì dx và dy không phải là hằng

$$\Rightarrow d^2 z = d f'_x dx + f'_x d^2 x + d f'_y dy + f'_y d^2 y$$

Lưu ý:

- $d(f'_x)$, $d(f'_y)$ tính theo vi phân cấp 1 của hàm hợp.
- $d^2 x$, $d^2 y$ tính theo vi phân cấp 2 của hàm thường.

VÍ DỤ

1/ Cho: $z = f(x, y) = x^2 y$, $x = u + v$, $y = u - v$

Tính z''_{uu} , z''_{uv} tại $(u, v) = (1, 1)$ ($x = 2, y = 0$)

$$z'_u = 2xy \times x'_u + x^2 \times y'_u$$

$$= 2xy \times 1 + x^2 \times 1 = 2xy + x^2$$

$$z''_{uu} = (2xy + x^2)'_u = 2x'_u y + xy'_u + 2xx'_u$$

$$= 2(y + x) + 2x = 4x + 2y$$

$$\Rightarrow z''_{uu}(1, 1) = 8$$

$$z'_u = 2xy + x^2$$

$$x = u + v, y = u - v$$

$$z''_{uv} = \frac{\partial}{\partial v} (2xy + x^2) = 2x'_v y + xy'_v + 2xx'_v$$

$$= 2(y - x) + 2x = 2y$$

$$z''_{uv}(1, 1) = 0$$

VÍ DỤ

1/ Cho: $z = f(x, y) = x^2 y$, $x = u + v$, $y = u^2$

Tính z''_{uu} tại $(u, v) = (1, 1)$ ($x = 2, y = 1$)

$$z'_u = 2xy \times x'_u + x^2 \times y'_u = 2xy \times 1 + x^2 \times 2u$$

$$z''_{uu} = 2xy + u.x^2$$

$$= 2x'_u y + xy'_u + (x^2 + u.2x.x'_u)$$

$$= 2[(y + x.2u) + x^2 + 2ux.1]$$

$$\Rightarrow z''_{uu}(1, 1) = 26$$

2/ Cho: $z = f(x, y) = x^2 y$, với $x = t^2, y = \ln t$

Tính d^2z theo dt tại $t = 1$

$$d^2z = z''(t)dt^2 \quad (t \text{ là biến độc lập})$$

$$z'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) = 2xy \cdot 2t + x^2 \cdot \frac{1}{t}$$

$$= 4t^3 \cdot \ln t + t^3$$

$$z''(t) = 12t^2 \cdot \ln t + 4t^2 + 3t^2$$

$$d^2z(1) = 7dt^2$$

3/ Cho: $z = f(x^2 - y)$ với f là hàm khả vi cấp 2.

Tính z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy}

Đặt $u = x^2 - y \Rightarrow z = f(u)$

$$z'_x = f'(u)u'_x = f'(u).2x, \quad z'_y = f'(u).(-1)$$

$$z''_{xx} = z'_x{}'_x = f'(u).2x'_x = 2 \left[f'(u) + x f'(u)'_x \right]$$

$$= 2 f'(u) + x f''(u).u'_x = 2 \left[f'(u) + 2x^2 f''(u) \right]$$

$$\begin{aligned}
 z''_{xy} &= z'_x{}'_y = f'(u) \cdot 2x'_y \\
 &= 2x f'(u)'_y = 2x f''(u) \cdot u'_y = -2x f''(u)
 \end{aligned}$$

$$z'_y = f'(u) \cdot (-1)$$

$$\begin{aligned}
 z''_{yy} &= z'_y{}'_y = -f'(u)'_y = -f''(u) u'_y = f''(u)
 \end{aligned}$$

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM ẨN

Nhắc lại: giả sử hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$. Để tính $y'(x)$, lấy đạo hàm phương trình $F = 0$ theo x và giải tìm $y'(x)$ (**cách 1**).

Với cách là này ta xem y là hàm theo x khi lấy đạo hàm của F .

Cách 2: Sử dụng hàm hợp cho hàm nhiều biến

$$G = F(x, y) = 0, \text{ với } y = y(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$$

Đạo hàm của hàm ẩn 1 biến $y = y(x)$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Xem x, y là 2 biến độc lập
khi lấy đh của F .

Xét hàm ẩn 2 biến $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1).$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

x, y, z là các biến độc lập
khi tính F'_x, F'_y, F'_z .

Chứng minh công thức đạo hàm hàm ẩn

Đặt $G = F(x, y, z)$, lấy đạo hàm (1) theo x :

$$G = 0 \Rightarrow G'_x = F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot 0 + F'_z \cdot z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$G = 0 \Rightarrow G'_y = F'_x \cdot 0 + F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Hàm ẩn cho bởi pt (1) có đhr là

Cách tìm vi phân cấp 1:

$$G = 0 \Rightarrow dG = dF = F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0 \Rightarrow \text{Giải pt tìm dz}$$

dz tìm bằng giải pt hoặc từ $dz = z'_x dx + z'_y dy$

Đạo hàm và vi phân cấp 2 của hàm ẩn:

Cách 1: tính z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} và d^2z từ z'_x , z'_y và dz

Cách 2: giải các pt

(a) $G''_{xx} = 0$ tìm z''_{xx}

(b) $G''_{xy} = 0$ tìm z''_{xy}

(c) $G''_{yy} = 0$ tìm z''_{yy}

(d) $d^2G = d^2F = 0$ tìm d^2z

VÍ DỤ

Cho $y = y(x)$ xác định từ pt: $e^y + xy - e = 0$ (1)

Tìm $y'(0)$.

Cách 1: học kỳ 1

Lấy đạo hàm pt đã cho: $y'e^y + y + xy' = 0$ (2)

$$x = 0, (1) \Rightarrow y = 1,$$

$$(2) \Rightarrow y'(0)e + 1 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow y'(0) = -e^{-1}$$

Cách 2: $F(x, y) = e^y + xy - e$

$$(1) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{e^y + x}$$

$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{e + 0} = -e^{-1}$$

Ví dụ

1/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt:

$$F(x, y, z) = z - ye^{x/z} = 0 \quad (1)$$

Tìm z'_x, z'_y tại $(x, y) = (0, 1)$.

từ (1) ta có: $(x, y) = (0, 1) \Leftrightarrow z = 1$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\frac{y}{z}e^{x/z}}{1 + \frac{yx}{z^2}e^{x/z}} \Rightarrow z'_x(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

$$F(x, y, z) = z - ye^{x/z} = 0$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-e^{x/z}}{1 + \frac{yx}{z^2}e^{x/z}}$$

$$\Rightarrow z'_y(0,1) = -\frac{-1}{1+0} = 1$$

Ví dụ

2/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt:

$$F(x, y, z) = xy - \sinh(x + y - z) = 0 \quad (1)$$

Tìm z''_{xx} , z''_{xy} tại $(x, y) = (1, 0)$.

$$(x, y) = (1, 0) \Rightarrow z = 1$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y - \cosh(x + y - z)}{\cosh(x + y - z)}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x - \cosh(x + y - z)}{\cosh(x + y - z)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x(1, 0) = 1, \\ z'_y(1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y^-ch(x^+y^-z)}{ch(x^+y^-z)}$$

$$z''_{xx} = z'_x{}'_x = \left(-\frac{y^-ch(x^+y^-z)}{ch(x^+y^-z)} \right)'_x$$

$$= -\frac{y^-ch(.)'_x \cdot ch(.) - ch(.)'_x \cdot y^-ch(.)}{ch^2(.)}$$

$$= -\frac{-(1-z'_x)sh(.)ch(.) - y^-ch(.) (1-z'_x)sh(.)}{ch^2(x^+y^-z)}$$

$$z''_{xx} = - \frac{-(1 - z'_x)sh(.)ch(.) - y - ch(.) (1 - z'_x)sh(.)}{ch^2(x + y - z)}$$

$$\begin{cases} z'_x(1, 0) = 1, \\ z'_y(1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z''_{xx}(1, 0) = - \frac{-(1 - 1).0.1 - (0 - 1)(1 - 1).0}{1} = 0$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{y - ch(x + y - z)}{ch(x + y - z)} \quad \begin{cases} z'_x(1,0) = 1, \\ z'_y(1,0) = 0 \end{cases}$$

$$z''_{xy} = z'_{xy} = \left(-\frac{y - ch(x + y - z)}{ch(x + y - z)} \right)'_y$$

$$= -\frac{[1 - (1 - z'_y)sh(.)]ch(.) - y - ch(.) (1 - z'_y)sh(.)}{ch^2(x + y - z)}$$

$$\Rightarrow z''_{xy}(1,0) = -\frac{1 - (1 - 0).0 \quad .1 - (0 - 1)(1 - 0).0}{1} = -1$$

Ví dụ

3/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt:

$$F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Tìm $dz(1, -2)$, $d^2z(1, -2)$ nếu $z(1, -2) = 2$

❖ Lấy vi phân pt (1):

$$dF = 3z^2 dz - 4z dx - 4x dz + 2y dy = 0 \quad (2)$$

Thay $x = 1, y = -2, z = 2$ vào (2):

$$12 dz(1, -2) - 8 dx - 4 dz(1, -2) - 4 dy = 0$$

$$\Rightarrow dz(1, -2) = dx + \frac{1}{2} dy$$

❖ Lấy vi phân pt (2):

$$d^2 F = d(3z^2 dz - 4z dx - 4x dz + 2y dy) = 0$$

$$d^2 F = 3 \cdot 2z dz^2 + z^2 d^2 z - 4dz dx$$

$$- 4 dx dz + x d^2 z + 2 dy^2 = 0 \quad (3)$$

(Vì x, y là biến độc lập nên $dx = dy = \text{hằng}$)

Thay $x = 1, y = -2, z = 2, dz = dz(1, -2) = dx + 1/2 dy$
vào (3)

$$d^2 z(1, -2) = -\frac{1}{2} dx^2 - dx dy - \frac{5}{8} dy^2$$

Ví dụ

4/ Cho $z = z(x, y)$, thỏa pt: $F = f(x + z, y) = 0$ (1)

với f là hàm khả vi cấp 2.

Tìm $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}$

Đặt $u = x + z, v = y \Rightarrow F(x, y, z) = f(u, v) = 0$

$$F'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u, \quad F'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_v$$

$$F'_z = f'_u \cdot u'_z + f'_v \cdot v'_z = f'_u$$

$$z'_x = -\frac{f'_u}{f'_u} = -1, \quad z'_y = -\frac{f'_v}{f'_u}, \quad z''_{xx} = 0$$

$$z'_y = - \frac{f'_v}{f'_u}$$

$$u = x + z, v = y$$

$$z''_{yy} = - \left(\frac{f'_v}{f'_u} \right)'_y$$

$$= - \frac{f''_{vu} \cdot u'_y + f''_{vv} \cdot v'_y \cdot f'_u - f''_{uu} \cdot u'_y + f''_{uv} \cdot v'_y \cdot f'_v}{f'^2_u}$$

$$= - \frac{f''_{vu} \cdot z'_y + f''_{vv} \cdot f'_u - f''_{uu} \cdot z'_y + f''_{uv} \cdot f'_v}{f'^2_u}$$

$$z''_{yy} = - \frac{f''_{vu} \cdot z'_y + f''_{vv} \cdot f'_u - f''_{uu} \cdot z'_y + f''_{uv} \cdot f'_v}{f_u'^2}$$

$$z'_y = - \frac{f'_v}{f'_u}$$

$$z''_{yy} = - \frac{\left(f''_{vu} \cdot \left(- \frac{f'_v}{f'_u} \right) + f''_{vv} \right) \cdot f'_u - \left(f''_{uu} \cdot \left(- \frac{f'_v}{f'_u} \right) + f''_{uv} \right) \cdot f'_v}{f_u'^2}$$